Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Editores: J. Ackeret, E. Baumann, P. Niggli, P. Scherrer E. Stiefel, F. Stüssi, H. Ziegler

Redactor: R. Sänger

VOL. III - 1952



VERLAG BIRKHÄUSER · BASEL SCHWEIZ · SWITZERLAND · SUISSE

Nachdruck verboten.

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten.

Copyright 1952 by Verlag Birkhäuser AG., Basel

Printed in Switzerland

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE		
Survey Articles · Comptes rendus	Seite Page	Nr. Issue
LIEPMANN, H.W.: Aspects of the Turbulence Problem Part I	321 407	(5) (6)
Perret, E., Roth, E., Sänger, R., und Voellmy, H. R.: Flugbahnen von Leitstrahlraketen mit Gasstrahlsteuerung	241	(4)
		\ /
ORIGINALARBEITEN		
Original Papers · Articles originaux		
Ackeret, J.: Über exakte Lösungen der Stokes-Navier-Gleichungen inkompressibler Flüssigkeiten bei veränderten Grenzbedingungen	259	(4)
v. Baeyer, H. J., und Knechtli, R.: Über die Behandlung von Mehrleitersystemen mit transversal elektro-magnetischen Wellen bei hohen Frequenzen	271	(4)
Batschelet, E.: Über die numerische Auflösung von Randwertproblemen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen	165	(3)
Cole, J.D.: Note on the Fundamental Solution of $w y_{vv} + y_{ww} = 0$	286	(4)
COLLATZ, L.: Zur numerischen Bestimmung periodischer Lösungen bei nicht- linearen Schwingungen	193	(3)
DÖRR, J.: Zwei Integralgleichungen erster Art, die sich mit Hilfe Mathieuscher Funktionen lösen lassen	427	(6)
v. Dyke, M.D.: Impulsive Motion of an Infinite Plate in a Viscous Compressible Fluid	343	(5)
FAVRE, H., und GILG, B.: La plaque rectangulaire fléchie d'épaisseur linéaire-		
ment variable	354	(5)
GILBARG, D.: Unsteady Flows with Free Boundaries	34	(1)
GLAUS, R.: Die automatische Kursregelung von Flugzeugen, 1. Teil	298	(4)
Schluss	371	(5)
LABHART, H.: Schallgeschwindigkeit in porösen Medien	205 119	(3)
Lübi, F.: Zur Theorie des Magnetronverstärkers.	119	(2)
MEYER ZUR CAPELLEN, W.: Über die Koppelkurven des Zwillingskurbeltriebes ¹), Errata	477	(6)
OHASI, Y.: Bending of a Thin Elliptic Plate of an Orthotropic Material under		(0)
Uniform Lateral Load	212	(3)
Popoff, K.: Sur la thermodynamique des processus irréversibles (I)	42	(1)
Errata	237	(3)
Popoff, K.: Sur la thermodynamique des processus irréversibles (II)	440	(6)
Rohner, F.: Kriterium der Gleitbereitschaft metallischer Vielkristalle	383	(5)
Salzmann, F.: Wärmespannungen und -deformation im elastischen Körper bei	100	(2)
ebener stationärer Wärmeströmung	129	(2)
Speiser, A.P.: Rechengeräte mit linearen Potentiometern	449	(6)

¹) ZAMP 2, 189 (1951).

	Seite Page	Nr. Issue
STIEFEL, E.: Über einige Methoden der Relaxationsrechnung	1	(1)
TRUESDELL, C. A.: A Program of Physical Research in Classical Mechanics	79	(2)
Unger, H.: Lagrange-Hermitesche Interpolation im Komplexen	51	(1)
ZADEH, L.A.: On the Theory of Filtration of Signals	149	(2)
ZIEGLER, H.: Knickung gerader Stäbe unter Torsion	96	(2)
Ziegler, H.: Kinckung gerader Stabe unter Torsion	50	(4)
KURZE MITTEILUNGEN		
Brief Reports · Communications brèves		
Batschelet, E., und Striebel, H.R.: Nomogramm zur Bestimmung der reellen und komplexen Wurzeln einer Gleichung vierten Grades	156	(2)
Beck, M.: Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten		
Stabes,	225	(3)
Erratum	476	(6)
Brunner, Th.: Einige Beobachtungen über das Haften von Eis an Oberflächen	460	(6)
Eckel, K.: Beziehungen zwischen den Störungskoeffizienten der ballistischen Störungsrechnung	309	(4)
Henrici, P.: Bergmanns Integraloperator erster Ert und Riemannsche Funk-		
tion	228	(3)
HENRICI, P.: Weitere Bemerkung zu $\int e^{b(x+a\cos x)} dx$	466	(6)
Kurth, R.: Zum Ergodenproblem	232	(3)
Lüdi, F.: Bemerkungen über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren	390	(5)
Rutishauser, H.: Über die Instabilität von Methoden zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen	65	(1)
Rutishauser, H.: Automatische Rechenplanfertigung bei programmgesteuerten Rechenmaschinen	312	(4)
SEIFERT, G.: On the Existence of Certain Solutions of a Nonlinear Differential		()
Equation	468	(6)
VOETTER, H.: Über die numerische Berechnung der Eigenwerte von Säkular- gleichungen	314	(4)
	311	(,)
VARIA		
Miscellaneous · Divers		
Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 3. Mai 1952 in Baden	394	(5)
Herbsttagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 24. August 1952 in Bern		
International Contest (Frank, Ph. G.)	472	(6)
8. Internationaler Kongress für theoretische und angewandte Mechanik (ZIEG-	236	(3)
LER, H.)	471	(6)
Paul Felix Neméniy (Truesdell, C.A.)	400	(5)
keret, J.)	316	(4)
Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik (Zeitschrift für das Gesamtgebiet der Werkstoffkunde und der Werkstoffprüfung)	237	(3)

BUCHBESPRECHUNGEN

Book Reviews · Notices bibliographiques	Seite Page	Nr. Issue
ACUSTICA, Internationale Akustische Zeitschrift (SHirzel-Verlag, Zürich 1951) (Ref. W. Furrer)	160	
BECKER, E.: Vorstufe zur theoretischen Physik (Springer-Verlag, Berlin 1950) (Ref. G. Busch)	77	(2)
BECKER, R.: Theorie der Elektrizität, Bd. 1: Einführung in die Maxwellsche Theorie; Bd. 2: Elektronentheorie (B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig 1949) (Ref. G. Busch)	161	(1)
BIEBERBACH, L.: Einführung in die Funktionentheorie (Verlag für Wissenschaft und Fachbuch, Bielefeld 1951) (Ref. M. Plancherel)	320	(4)
BLASCHKE, W.: Einführung in die Differentialgeometrie (Springer-Verlag, Berlin 1950) (Ref. E. Roth-Desmeules)	478	(6)
Вотне, W., und Flügge, S.: Kernphysik und kosmische Strahlen, Teil I¹) (Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948) (Ref. K. Wäffler)	477	(6)
Burkill, J. C.: The Lebesgue Integral (Cambridge University Press, Cambridge 1951) (Ref. M. Plancherel)	402	(5)
Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (Springer- Verlag, Berlin 1951) (Ref H. Rutishauser)	319	(4)
COURANT, R.: Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces (Interscience Publishers, New York 1950) (Ref. A. Pfluger)	162	(2)
Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. 1: Theorie der Laplace-Transformation (Verlag Birkhäuser, Basel 1950) (Ref. H. Rutishauser)	239	(3)
Duschek, A.: Vorlesungen über höhere Mathematik (Springer-Verlag, Wien 1950) (Ref. W. Saxer)	75	(1)
DWYER, P.S.: Linear Computations (John Wiley & Sons, New York 1951) (Ref. H. Rutishauser)	478	(6)
Grammel, R.: Der Kreisel. Seine Theorie und seine Anwendungen. Bd. 1: Die Theorie des Kreisels; Bd. 2: Die Anwendungen des Kreisels (Springer-Verlag, Berlin 1950) (Ref. H. Ziegler)	76	(1)
Gröbner, W., und Hofreiter, N.: Integraltafel. 1. Teil: Unbestimmte Integrale; 2. Teil: Bestimmte Integrale (Springer-Verlag, Wien 1949/50) (Ref.		100
H. Rutishauser)	404 320	(5)
Verlag, Berlin 1952) (Ref. H. Ziegler)	406	(4)
Joos, G.: Physik der festen Körper ¹) (Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1947/1948) (Ref. H. Labhart)	477	(6)
KUHLMANN, K.: Theoretische Elektrotechnik, Bd. III: Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen (Verlag Birkhäuser, Basel 1951) (Ref. E. Dünner)	317	(4)
LONDON, F.: Superfluids. Vol. 1.: Macroscopic Theory of Superconductivity (John Wiley & Sons, New York 1950) (Ref. L. C. Jackson)	164	(2)
LÖSCH-SCHOBLIK: Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen (В. G. Teubner, Ver-	104	(5)
lagsgesellschaft, Leipzig 1951) (Ref. M. Plancherel)	401	(5)

¹⁾ Serie «Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939 bis 1946».

	Seite Page	Nr. Issue
Maxwell, E.A.: General Homogeneous Coordinates in Space of Three Dimensions (Cambridge University Press, Cambridge 1951) (Ref. M. Plancherel)	161	(2)
MEYER ZUR CAPELLEN, W.: Integraltafeln, Sammlung unbestimmter Integrale elementarer Funktionen (Springer-Verlag, Berlin 1950) (Ref. H. Rutishauser)	320	(4)
OBERHETTINGER, F., und Magnus, W.: Anwendungen der elliptischen Funktionen in Physik und Technik (Springer-Verlag, Berlin 1949) (Ref. A. Pfluger).	77	(1)
OLLENDORFF, F.: Die Welt der Vektoren (Springer-Verlag, Wien 1950) (Ref. M. Jeger)	78	(1)
Ostrowski, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 2: Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen (Verlag Birkhäuser, Basel 1951) (Ref. A. Pfluger)	162	(2)
RICHTER, R.: Elektrische Maschinen. Bd. 1: Allgemeine Berechnungselemente. Die Gleichstrommaschine (Verlag Birkhäuser, Basel 1951) (Ref. E. Dünner)	163	(2)
SAUER, R.: Ecoulements des fluides compressibles (Béranger, Paris et Liège 1951) (Ref. B. Chaix)	318	(4)
Schäfer, Cl.: Einführung in die theoretische Physik. Bd. 3, Teil 2: Quantentheorie (W. de Gruyter, Berlin 1951) (Ref. W. Baumgartner)	402	(5)
Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie (G. Braun, Karlsruhe 1951) (Ref. J. Ackeret)	405	(5)
SCHWANK, F.: Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der höheren Analysis für Physiker, Mathematiker und Ingenieure (B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951) (Ref. M. Plancherel)	238	(3)
SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. 3: Elektrodynamik (Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948) (Ref. P. Scherrer)	238	(3)
STOKER, J. J.: Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems (Interscience Publishers, New York 1950) (Ref. H. Ziegler)	239	(3)
STRUIK, D. J.: Lectures on Classical Differential Geometry (Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge [Mass.] 1950) (Ref. M. Jeger).	403	(5)
SYMPOSIUM: Proceedings of a Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery (Harvard University Press, Cambridge [Mass.] 1951) (Ref. A.P. Speiser)	404	(5)
TÖLKE, F.: Praktische Funktionenlehre, Bd. 1: Elementare und elementare transzendente Funktionen (Springer-Verlag, Berlin 1950) (Ref. H. Rutis-	m =	
hauser)	75	(1)
cherel)	403	(5)
York 1950) (Ref. E. Baldinger)	75	(1)
Based upon the Functional Equation (Princeton University Press, Princeton 1948) (Ref. M. Plancherel)	240	(3)
VIETORIS, L., und Lochs, G.: Vorlesungen über Differential- und Integral- rechnung (Universitätsverlag Wagner, Innsbruck 1951) (Ref. E. Roth-Des- meules)	76	(1)
VÖLKER, D., und DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transformation (Verlag Birkhäuser, Basel 1951) (Ref. H. Rutishauser)	319	(4)
WILLERS, F.A.: Methoden der praktischen Analysis (W. de Gruyter, Berlin 1950) (Ref. H. Rutishauser)	77	(1)
	11	(1)

AUTORENREGISTER

Index of Authors · Table des Auteurs

Z = Zusammenfassende Berichte - Survey Articles - Comptes rendus

O = Originalarbeiten - Original Papers - Articles originaux

M = Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

V = Varia - Miscellaneous - Divers

B = Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques

ACKERET, J., O 259, V 316

B

von Baeyer, H. J., und Knechtli, R., O 271

BATSCHELET, E., O 165

BATSCHELET, E., und STRIEBEL, H.R.,

BECK, M., M 225/476

BECKER, R., B 77, 161

BIEBERBACH, L., B 320 BLASCHKE, W., B 478

BOTHE, W., und Flügge, S., B 477

Brunner, Th., M 460 Burkill, J. C., B 402

C

COLE, J.D., O 286 COLLATZ, L., O 193, B 319 COURANT, R., B 162

D

DOETSCH, G., B 239 DOETSCH, G., und VÖLKER, D., B 319 Dörr, J., O 427 Duschek, A., B 75 DWYER, P. S., B 478 VAN DYKE, M.D., O 343

E

ECKEL, K., M 309

F

FAVRE, H., und GILG, B., O 354 FLÜGGE, S., und BOTHE, W., B 477 Frank, Ph. G., V 236

G

GILBARG, D., O 34 GILG, B., und FAVRE, H., O 354 GLAUS, R., O 298/371 GRAMMEL, R., B 76 Gröbner, W., und Hofreiter, N., B 404

H

DEN HARTOG, J.P., und MESMER, G., B 320 HENRICI, P., M 228, 466 Hofreiter, N., und Gröbner, W., B 404

J

JOHNSON, L. H., 406 Joos, G., B 477

K

KNECHTLI, R., und von BAEYER, H. J., 0 271 KUHLMANN, K., B 317 Kurth, R., M 232

L

LABHART, H., O 205 LIEPMANN, H. W., Z 321, 407 Lochs, G., und Vietoris, L., B 76 LONDON, F., B 164 Lösch-Schoblik, B 401 Lüdi, F., O 119, M 390

MAGNUS, W., und OBERHETTINGER, F., B 77 MAXWELL, E. A., B 161 MESMER, G., und DEN HARTOG, J.P., MEYER ZUR CAPELLEN, W., O/V 477, B 320

0

OBERHETTINGER, F., und MAGNUS, W., B 77 OHASI, Y., O 212 OLLENDORFF, F., B 78 Ostrowski, A., B 162

Perret, E., Roth, E., Sänger, R., und VOELLMY, H.R., Z 241 Popoff, K., O 42/237, 440

R

RICHTER, R., B 163 ROHNER, F., O 383 ROTH, E., PERRET, E., SÄNGER, R., und VOELLMY, H.R., Z 241 RUTISHAUSER, H., M 65, 312

S

SALZMANN, F., O 129 SÄNGER, R., PERRET, E., ROTH, E., und VOELLMY, H.R., Z 241 SAUER, R., B 318 Schäfer, Cl., B 402 Schlichting, H., B 405 SCHWANK, F., B 238 SEIFERT, G., M 468 SOMMERFELD, A., B 238 Speiser, A.P., O 449 STIEFEL, E., O 1 STOKER, J. J., B 239 STRIEBEL, H. R., und BATSCHELET, E., M 156 STRUIK, D. J., B 403 Symposium, B 404

T

Tölke, F., B 75 Tricomi, F., B 403 Trimmer, J.D., B 75 Truesdell, C.A., O 79, V 400, B 240

U

UNGER, H., O 51

V

VIETORIS, J., und Lochs, G., B 76 VOELLMY, H.R., PERRET, E., ROTH, E., und SÄNGER, R., Z 241 VOETTER, H., M 314 VÖLKER, D., und DOETSCH, G., B 319

W

WILLERS, F.A., B 77

\mathbf{Z}

ZADEH, L., O 149 ZIEGLER, L., O 96, V 471

Fasc. 1 (15. 1. 1952) . . . pag. 1–78
Fasc. 2 (15. 3. 1952) . . pag. 79–164
Fasc. 3 (15. 5. 1952) . . pag. 165–240
Fasc. 4 (15. 7. 1952) . . pag. 241–320
Fasc. 5 (15. 9. 1952) . . pag. 321–406
Fasc. 6 (15. 11. 1952) . . pag. 407–478

Über einige Methoden der Relaxationsrechnung

Von Eduard Stiefel, ETH., Zürich

Die von Southwell¹) und seinen Mitarbeitern als Verfeinerung des Seidelchen Verfahrens und der Methoden von H. Cross²) entwickelte Relaxationsschnung³) zur iterativen Auflösung von linearen Gleichungen hat sich hauptächlich für die Lösung von Randwertaufgaben bei den partiellen Differenzenleichungen der mathematischen Physik bewährt. In der vorliegenden Arbeit verden zunächst im Abschnitt 1 die Grundlagen dieser Rechentechnik erneut useinandergesetzt und zugleich die mathematischen Hilfsmittel bereitgestellt, ie dann in Abschnitt 2 erlauben, das allgemeine Prinzip der Relaxationsrechung mathematisch zu begründen. Sie führen in Abschnitt 3 zur allgemeinen Iethode der simultanen Relaxation.

Später wird dann dem Rechner die in der Relaxationsrechnung mit Recht geschätzte Freiheit in der Wahl der einzelnen Schritte genommen, und es verden – im Hinblick auf den Einsatz von Rechenautomaten – einige zwangsiufige Methoden geschildert. Nach den bekannten Verfahren des stärksten bstiegs und der Iteration in Gesamtschritten wird in Abschnitt 5 ein n-Schritt-Verfahren angegeben, welches sowohl eine sukzessive Approximaton an die Lösung als auch deren exakte Bestimmung in endlich vielen Schritten liefert. Besondere Aufmerksamkeit mußte der Tatsache geschenkt werden, aß alle Relaxationsprozesse dazu neigen, am Schluß die Konvergenz durch ildung von «Käfigen» zu verlangsamen⁴).

Herrn Dr. F. Krantz sei gedankt für seine Entwicklung der numerischen Lechentechnik für die Methoden der Abschnitte 1 und 2. Seine durchgerecheten Beispiele haben mich oft unterstützt. Herrn Dr. H. Rutishauser und lerrn U. Hochstrasser danke ich für die Durchführung einiger größerer Beipiele auf der programmgesteuerten Zuse-Rechenmaschine in Zürich. Herr

¹⁾ R. V. Southwell, Relaxation Methods in Engineering Science (Clarendon, Oxford 1946); elaxation Methods in Theoretical Physics (Clarendon, Oxford 1946).

²) H. Cross, Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments, Proc. Amer. oc. chem. Eng. 1930); Numerical Methods of Analysis in Engineering (Symposium Illinois Initute of Technology, Macmillan, New York 1949).

³) Man vergleiche auch: L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen springer, Berlin 1951), S. 106 und 295. Ferner: G. Temple, The general Theory of Relaxation thods Applied to Linear Systems, Proc. Roy. Soc. London [A], 169, 476–500 (1939). Dort sind as allgemeine Verfahren der Relaxationsrechnung (Abschnitt 2) und das Verfahren des stärksten bstieges (Abschnitt 4) geschildert und Konvergenzbeweise gegeben.

⁴) Allgemeine Konvergenz- und Fehlertheorien findet man bei: J. von Neumann und H. H. oldstine, Numerical Inverting of Matrices of High Order, Bull. Amer. Math. Soc. 53, Nr. 11 (1947).

Dr. E. Baschelet, Privatdozent in Basel, war so freundlich, mich auf einig Literaturstellen aufmerksam zu machen.

1. Grundlagen

Zur Bestimmung der n unbekannten Größen $u_1, u_2, ..., u_n$ sei das symmetrische lineare Gleichungssystem vorgelegt

$$\sum_{k=1}^{n} d_{ik} u_k + l_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$
 (1)

$$d_{ik} = d_{ki} , (2$$

mit den Koeffizienten d_{ik} und den absoluten Gliedern l_i . Setzt man in die linke Seiten der Gleichungen irgendwelche Näherungswerte für die Unbekannte ein – wir nennen sie v_1, v_2, \ldots, v_n –, so werden die rechten Seiten Werte r_1, r_2, \ldots, r_n annehmen, die im allgemeinen von Null verschieden sind und Residue heißen:

$$\sum_{k=1}^{n} d_{ik} \, v_k + l_i = r_i \,. \tag{3}$$

Der Grundgedanke der Relaxationsrechnung besteht nun darin, durch syste matische Korrekturen $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$ der Versuchswerte die Residuenschritt weise immer kleiner zu machen. Diese Korrekturen ergeben die neuen Residuen

$$r_i' = r_i + \sum_{k=1}^n d_{ik} \Delta v_k . \tag{4}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise fassen wir die Unbekannten und die Nähe rungswerte zu Vektoren $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ und $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ zusammer und führen auch den Konstantenvektor $l=(l_1,l_2,\ldots,l_n)$ und den Residuen vektor $r=(r_i)$ ein. Einem beliebig gegebenen Vektor $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ kann durch die Formeln

$$y_i = \sum_{k=1}^n d_{ik} x_k \tag{5}$$

ein neuer Vektor $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ zugeordnet werden. Diese Operation (lineare Transformation) bezeichnen wir durch das Symbol D, schreiben also

$$y = Dx \tag{6}$$

und nennen D den Operator des gegebenen Problems (1). Die Beziehungen (1) (3), (4) können damit geschrieben werden

$$Du + l = 0 , (1')$$

$$Dv + l = r , (3')$$

$$r' = r + D.1v. (4')$$

'ersteht man unter dem skalaren Produkt zweier Vektoren $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ nd $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ den Ausdruck

$$(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k,$$

ergibt sich für das skalare Produkt aus einem Vektor x und seinem Transmierten y = Dx unter Berücksichtigung von (5)

$$(x, Dx) - (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} d_{ik} x_k,$$

$$(x, Dx) = \sum_{(i, \kappa)} d_{ik} x_i x_k,$$
(7)

Iso die mit den Koeffizienten d_{ik} gebildete quadratische Form. Wir nennen sie (x) und setzen im folgenden voraus, daß sie positiv definit sei, das heißt

$$Q(x) = (x, Dx) > 0 \tag{8}$$

fir jeden Vektor $x=(x_1,\,x_2,\,...,\,x_n)$, der vom Nullvektor verschieden ist. I Ist z ein weiterer Vektor, so findet man noch

$$(x, Dz) = \sum_{i} x_i (Dz) = \sum_{(i)} x_i \sum_{(k)} d_{ik} z_k - \sum_{(i,k)} d_{ik} v_i z_i$$

nd andererseits

$$(Dx,z) = \sum_{i} (Dx)_{L} z_{L} - \sum_{i} z_{L} \sum_{i} d_{i}, \ x_{i} - \sum_{i=1}^{L} d_{L}, \ x_{i} z_{L}.$$

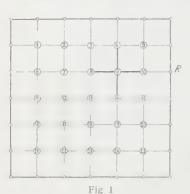
Vegen (2) folgt daraus die wichtige Beziehung

$$(Dx, z) = (x, Dz), (9)$$

omit auch die Symmetriebedingung (2) symbolisch geschrieben ist. Wir ezeichnen (9) auch als *Greensche Formel*, da sie für einen Differenzenoperator das Analogon zur bekannten Greenschen Formel der Differentialrechnung urstellt.

Wir wollen gleich einen solchen Fall zur Illustration behandeln. Es handle ch um die *Dirichletsche* Randwertaufgabe der Differenzenrechnung für ein

gegebenes Grundgebiet, das in Figur 1 quadratisch angenommen wurde. Dieser Quadrat wurde schachbrettartig unterteilt, so daß ein quadratisches Gitten



entsteht. Ist in jedem Gitterpunkt eine Zall angeschrieben, so sprechen wir von einer Gitte funktion. Es sei nun eine solche Gitterfunktion gesucht, so daß

- 1. ihr Wert in jedem inneren Gitterpunldas arithmetische Mittel der vier benachbarten Werte ist und
- 2. die Funktion in den Gitterpunkten der Randes gegebene Werte annimmt.

Numeriert man in Figur 1 die *innere* Gitterpunkte in der Reihenfolge, wie man di Zeilen eines Buches liest, so hat man total \mathcal{L} Unbekannte u_1, u_2, \ldots, u_{25} und erhält zu ihre Bestimmung 25 Gleichungen. Zum Gitte

punkt Nr. 9 gehört zum Beispiel die Gleichung

$$u_9 = \frac{u_4 + u_8 + u_{10} + u_{14}}{4}$$

oder

$$4 u_9 - u_4 - u_8 - u_{10} - u_{14} = 0 , (1)$$

während der Gitterpunkt Nr. 10 zur Gleichung Anlaß gibt

$$4 u_{10} - u_9 - u_{15} - u_5 - t_R = 0. (1)$$

Dabei bedeutet f_R den gegebenen Randwert im Randpunkte R. Diese 25 Glechungen haben die Symmetrieeigenschaft (2), so daß alle bisherigen Überlegungen anwendbar sind. Was wir oben einen Vektor nannten, ist nun hier ein Gitterfunktion, genauer eine Werteverteilung auf den *inneren* Gitterpunkter Die Ausübung des Operators D auf eine Gitterfunktion x ergibt nun als Weitvon y = Dx

im Punkt Nr. 9:

$$y_9 = 4 x_9 - x_4 - x_8 - x_{10} - x_{14} , (12)$$

im Punkt Nr. 10:

$$y_{10} = 4 x_{10} - x_9 - x_{15} - x_5. ag{13}$$

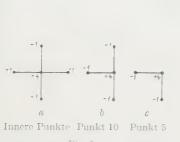
Man veranschaulicht sich das Wirken des Operators am besten durch de Figuren 2a, b, c, welche die Koeffizienten enthalten, mit denen die jeweilige Funktionswerte der Funktion x zu nehmen sind.

Für die quadratische Form Q(x) ergibt sich der folgende Ausdruck: Ma ergänze zunächst die in den inneren Punkten gegebene Funktion x durch Hinzu

ügen von Randwerten, die alle Null sind, zu einer in allen Gitterpunkten erlärten Funktion x. Ferner bezeichne man mit A, B die Endpunkte einer beebigen (im Inneren oder auf dem Rande gelegenen) Gitterstrecke. Dann ist

$$Q(x) = \sum (x_A - x_B)^2, (14)$$

vobei über alle Gitterstrecken zu summieren ist. Diese Form ist positiv definit. ie kann nämlich nur verschwinden, wenn zwei durch eine Gitterstrecke verundene Werte von x gleich sind. Da die Randwerte Null sind, ist dies nur





nöglich, wenn a identisch Null ist. (14) vertritt natürlich das Dirichlet Integral er kontinuierlichen Theorie.

Der erste Schritt zur Lösung unseres Randwertproblems besteht nun in der ahl einer Versuchsgitterfunktion v und der zugehörigen Residuenrechnung Bestimmung der Residuengitterfunktion r₁. Dabei schreibt man natürlich die .5 Gleichungen nicht hin, sondern bildet entsprechend der Formel (3') die unktion Dr unter Benutzung der Figuren 2a, b, c. Man kann diese Rechnung urch die folgende Summenprobe kontrollieren. Es sei e diejenige Gitterfunkon, die in allen inneren Gitterpunkten den Wert 1 hat. Dann ist unter Verwen-...ing von (3') die Summe aller Residuen

$$(r, e) = (Dv + l, e) = (Dv, e) + (l, e) = (v, De) + (l, e),$$
 (15)

cobei die letzte Umformung aus der Greenschen Formel (9) folgt. Hierin ist , e) die Summe der Konstanten in unseren 25 Gleichungen, also nach (10), 1) die negative Summe aller gegebenen Randwerte (mit Ausschluß der vier 'uadratecken). Die Werte von De sind in Figur 3 angegeben. Die Summe der esiduen hängt also nur ab von den Funktionswerten von v in denjenigen Gitrpunkten, die in Figur 3 eingetragen sind.

Für das Folgende brauchen wir noch Gitterfunktionen, die nur in einem nzigen Gitterpunkt von Null verschieden sind. Es sei zum Beispiel e9 die unktion, die im Gitterpunkt Nr. 9 den Wert - 1, aber in allen anderen Gitterpunkten den Wert Null hat. Ist dann x eine beliebige Funktion und $y \in D_x$ so gilt unter Berücksichtigung von (12)

$$(De_9, x) = (e_9, Dx) = (e_9, y) = y_9 = 4 x_9 - x_4 - x_8 - x_{10} - x_{14}.$$

Vergleicht man nun im ersten und letzten Term dieser Gleichung die Koeff: zienten der x_b , so ergibt sich, daß De_9 genau durch die Figur 2a gegeben ist also im Punkt 9 den Wert 4, in den Nachbarpunkten den Wert – i und sons überall den Wert Null hat. Analog ist De_{10} die Figur 2b und De_5 die Figur 2b

Man kann diese Bemerkung dazu benutzen, um die neuen Residuen r' nac einer Funktionskorrektur Av gemäß (4') auszuwerten. Die Funktionskorrektu bestehe zunächst darin, daß nur der Funktionswert im Punkte 9 um eine Betrag α geändert werde. Dann ist

$$\exists v = \alpha e_9$$
,

also

$$r' = r + D \perp v = r + \alpha De_9$$
.

Man erhält also die neue Residuenverteilung, indem man zur alten das α -facht der Figur 2a addiert. Eine Änderung von v um +1 im Punkt Nr. 9 bewirkt als eine Residuenänderung von +4 im Punkte Nr. 9 und Residuenänderungen — in den vier Nachbarpunkten. Aus diesem Grunde nennt man die Figure 2a, b, c auch Relaxations figuren. Wird v in mehreren Gitterpunkten simultations.

korrigiert, so muß man eben die einzelne Residuenänderungen superponieren.

In Figur 4 ist der Start einer Relaxations rechnung illustriert. Links von jedem Gitterpunkt sind Funktionswerte oder Funktionsänderungen angeschrieben, rechts wird der jeweilige Stand der Residuen protokolliert. Es wurde mit einer Versuchsfunktion begonnen, die sich vernünftig an die Randwerte – die ja vorgegeben sind – anschließt und die Residuenrechnung ausgeführt. Dann erfolgte ein erster Relaxationsschritt. Um das Residuum im Punkte Nr. 9 herabzudrücken, wurde dort die Funktion un +8 geändert. Dies ergibt nach der eber hergeleiteten Regel die eingetragenen neuer

Residuen im Punkt Nr. 9 und seinen vier Nachbarn. Man müßte nun sukzessivemit derartigen *Punktrelaxationen* weiterfahren, wobei natürlich jeder Gitterpunkt mehrmals erfaßt werden muß. Um die Rechnung nach mehreren Schritter zu kontrollieren, summiert man die bisherigen Funktionsänderungen auf, bilde

vieder durch. Ein geübter Rechner, der ein gewisses Gefühl für den Verlauf iner Potentialfunktion hat, kann im vorliegenden Beispiel von 25 Unbekannten nit diesem Einzelschrutter jahren durchkommen¹). Im allgemeinen muß aber lie Methode noch bedeutend verleinert werden. Auch muß untersucht werden, vann man aufhören dart, das heißt, wie weit die Residuen herabgedrückt werden nüssen, um die Lösung u des Dirichlet-Problems mit einer gegebenen Antäherung zu erreichen.

Es ist klar, daß auch andere Randwertaufgaben (zum Beispiel diejenigen ler Elastizitätstheorie) auf diese Weise angegriffen werden können.

2. Das allgemeine Verfahren der Relaxationsrechnung

Wir kehren zum allgemeinen Fall der Gleichungen (1) und zur Sprache der vektoren zurück und bilden zu einem gegebenen Versuchsvektor v die quadraische Funktion

$$F(v) = \frac{1}{2} Q(v + (l, \cdot)). \tag{16}$$

Q(v) ist die in (7) definierte quadratische Form Q(v) = (v, Dv) und l der Vektor fer Konstanten. Ausgeschrieben:

$$|F(\cdot)| = \frac{1}{2} \sum_{(i,k)} d_{ik} v_i v_k + \sum_{(i)} l_i v_i.$$
 (17)

.) ifferenzieren wir das nach v_i , so ergibt sich

$$rac{\partial F}{\partial v_i} = \sum_{(k)} d_{ik} \, v_k + l_i \, .$$

Dies ist aber nach (3) nichts anderes als das i-te Residuum r_i :

$$r_i = \frac{\partial F}{\partial v_i} \,. \tag{18}$$

Vir können auch schreiben

$$r = \operatorname{grad} F$$
, (19)

was eben eine abgekürzte Schreibweise für die Aussage bedeuten soll, daß die -te Komponente von r gleich der partiellen Ableitung von F nach v_i ist. Hieraus algt zunächst:

¹⁾ Einzelschrittverfahren bedeutet: Bei jedem Relaxationsschritt wird die Versuchsfunktion ur in einem einzigen Punkt geändert. Vgl. dazu auch A. Willers, Methoden der praktischen Anasis, 2. Aufl. (W. de Gruyter, Berlin 1950), S. 311.

Satz 1: Die Auflösung der gegebenen Gleichungen (1) ist vollständig äquivalent mit der Bestimmung des Minimums der quadratischen Funktion F¹).

Denn um die Gleichungen aufzulösen, müssen die Residuen zu Null gemach werden, und nach (18) bedeutet dies das Aufsuchen derjenigen Werte v_i , für welche alle partiellen Ableitungen von F verschwinden, das heißt, für welche I stationär ist. Da die quadratische Form Q(x) als positiv definit vorausgesetz I_i ist, hat F genau eine stationäre Stelle, und zwar ein Minimum.

Satz I kann zur Begründung des folgenden Relaxationsverfahrens dienen Ausgehend von einem Versuchsvektor $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ und nach Wahl eine vom Nullvektor verschiedenen Gewichtsvektors $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ mache mar die Korrekturen

$$1v_i = \lambda \, \phi_i \tag{20}$$

der Versuchswerte, wobei λ ein noch zu bestimmender Parameter ist. Schreib man (20) vektoriell:

$$1v = \lambda \phi , \qquad (21)$$

so betrachtet man also die lineare Schar von Versuchsvektoren

$$\varepsilon' = \varepsilon - 1\varepsilon = \varepsilon - \lambda \rho$$
.

Bildet man mit jedem i' die quadratische Funktion F, so wird F eine Funktion $F(\lambda)$ von λ . Man bestimme nun λ so, daß F (als Funktion der einzigen Variablei) λ betrachtet) minimal wird. Es handelt sich hier im Grunde genommen um eine Anwendung des Ritzschen Gedankens, ein Minimum angenähert dadurch zu bestimmen, daß man die Konkurrenz auf eine leicht zu handhabende lineard λ Schar beschränkt. Es ergibt sich so unter Benutzung von (18)

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{(i)} \frac{\partial F}{\partial v_i'} \cdot \frac{dv_i'}{d\lambda} = \sum_{(i)} r_i' \, p_i = (r', p) = 0. \tag{23}$$

Hierin ist r' der Residuenvektor, der zum Versuchsvektor v' gehört. Mit anderen Worten:

Satz 2: Nach Durchführung eines Relaxationsschrittes muß der neue Residuenvektor orthogonal auf dem Gewichtsvektor stehen.

Jetzt muß nur noch die Orthogonalitätsbedingung ausgewertet werden Setzt man (4') in (23) ein, so folgt

$$(r + D\Delta v, p) = (r + \lambda Dp, p) = (r, p) + \lambda (Dp, p) = 0$$

 $^{^{1}}$) Bekanntlich kann man viele Randwertaufgaben der mathematischen Physik direkt al-Variationsprobleme formulieren (Energiemethode), so daß sich beim Übersetzen in die Differenzenrechnung direkt die Funktion F(v) ergibt, welche extremal gemacht werden muß. Die zugehörigen linearen Gleichungen ergeben sich dann nach (18) durch Differenzieren von F. Dieser Weg ist zu empfehlen, da infolge der physikalischen Bedeutung von F (Energie) meistens von vorneherein feststeht, daß der homogene Teil, das heißt die quadratische Form Q, positiv definit ist.

150

$$\lambda = -\frac{(r, p)}{(Dp, p)}; \tag{24}$$

umit ergeben sich folgende Regeln für einen allgemeinen Relaxationsschritt: s sei v ein Versuchsvektor, r der zugehörige Residuenvektor. Nach Wahl eines wichtsvektors p mache man die Korrektur

$$\exists v = \lambda \ p \quad \text{mit} \quad \lambda = -\frac{(v, p)}{(D_T, p)}$$
 (25)

sie neuen Residuen sond dann zegeben durch

$$r' = r + \lambda \, D \rho \,. \tag{26}$$

as der Herleitung folgt, daß der Wert der quadratischen Funktion F bei dem Relaxationsschritt sicher abnimmt. Denn für die zweite Ableitung von (λ) ergibt sich aus (23) und (26)

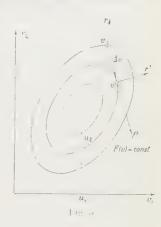
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \phi \right) = (\phi, D\phi) = Q(\phi) > 0.$$
 (27)

ese Ableitung ist also eine positive Konstante und somit die graphische Darellung von $F(\lambda)$ eine nach oben geöffnete Parabel.

Bei jedem Relaxationsschritt nähert man sich also dem schließlich gesuchm Minimum von Fraj. Hierin liegt der Beweis für die Konvergenz dieses Re-

teichungssystems. Für die systematisch gelenkten slaxationsverfahren (wie das Einzelschrittverfahren oder das Verfahren des stärksten Abstiegs) kann ese Bemerkung zu einem mathematisch exakten weis ausgestaltet werden dafür, daß die Versuchsktoren gegen den Lösungsvektor konvergieren. 10 e auseinandergesetzten Verhältnisse lassen sich Falle von n=2 Gleichungen geometrisch illurieren (Figur 5). Im Koordinatensystem v_1 , v_2 ist 12 quadratische Funktion F(v) durch ihre Niveausien dargestellt. Es sind dies konzentrische Ellipa. Das gemeinsame Zentrum ist das Minimum, 130 sind seine Koordinaten u_1 , u_2 die Lösungen des seichungssystems. Es wurde ein Versuchspunkt v

txationsverfahrens gegen die Lösung des gegebenen



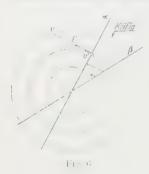
ngezeichnet; der zugehörige Residuenvektorrsteht nach (19) senkrecht auf r Niveaulinie. Ein Relaxationsschritt besteht dann darin, daß nach Wahl

⁽¹⁾ R. von Mises und H. Pollaczek-Geiringer, Z. angew. Math. Mech. 9, 58-77, 152-164 (29); vgl. auch L. Collatz. Zur Herleitung von Konvergenzkriterien für Iterationsverfahren bei waren Gleichungssystemen, Z. angew. Math. Mech. 30, 278-280 (1950); vgl. ferner G. Temple, l. c.

eines Richtungsvektors ϕ von v aus in der Richtung ϕ vorwärtsgegangtwird bis zu dem Punkt v', in dem F auf diesem Wege minimal wird. Diese Punkt befindet sich offenbar dort, wo der Weg eine Niveaulinie berührt. Dort steht der neue Residuenvektor als Gradient senkrecht auf der Niveaulinie, als senkrecht auf ϕ (Satz 2).

Beim Einzelschrittverfahren wird jeweilen nur v_1 oder v_2 geändert, das heil it man benutzt nur zwei Relaxationsrichtungen p während des ganzen Relaxitionsprozesses, nämlich die Parallelen zu den Koordinatenachsen.

Die Sache wird noch übersichtlicher, wenn man die Figur 5 so in eine Figur affin abbildet, daß die Ellipsen zu Kreisen werden. Ein Relaxationsschritt b



deutet dann einfach, daß man den Näherungspunkt orthogonal auf eine gewählte Gerade α projiziert, durch das Zentrum läuft. Wählt man nur zwei fes Gerade α und β , auf die man abwechselnd projiziert dies ist zum Beispiel beim Einzelschrittverfahren der Fall –, so verläuft die Relaxation auf dem Zickzackwicher Figur 5. Wir bezeichnen den kleineren Winkelrauzwischen α und β als $K\ddot{a}fig$, weil man leicht feststell daß die Relaxation – gleichgültig, wo sie beginnt – ein mal in diesen Käfig eintritt und alsdann dauernd in ist bleibt. Je schmäler dieser Winkelraum ist, um so lansamer konvergiert das Verfahren gegen den Lösung

punkt. Das Auftreten von Käfigen ist eine allgemeine Erscheinung bei Rei xationsverfahren und sehr unerwünscht. Es bewirkt, daß die Relaxation a Anfang flott vorwärtsgeht, aber dann immer weniger ausgiebig wird.

Im Falle von n > 2 Gleichungen kann man die Verhältnisse natürlich anal in einem n-dimensionalen Raum veranschaulichen.

Die dargebotenen Überlegungen sollen nun noch auf das Dirichlet-Proble angewendet werden. Die in Figur ‡ gezeigte Punktrelaxation (Einzelschritt) escheint nun wie folgt als Spezialfall der allgemeinen Theorie: Da die Versuchfunktion nur im Punkte 9 geändert werden soll, ist die Gewichtsfunktion gleich e_9 , also 1 im Punkte Nr. 9 und sonst überall Null. Nach Satz 2 muß d. Relaxation so durchgeführt werden, daß die neue Residuenfunktion r' orth gonal zu e_9 ist, das heißt, daß der neue Residuenwert im Punkte 9 Null wird. I ergibt sich also die

Regel: Bei einer Punktrelaxation soll das Residuum im betreffenden Punvollständig beseitigt werden. Entsprechend der Relaxationsfigur 2a verteilt es si dabei gleichmäßig auf seine vier Nachbarpunkte¹) (vergleiche Punkt 2 in Figur:

Es ist leicht festzustellen, wann man bei diesem Einzelschrittverfahren d Dirichlet-Problems in einem Käfig sitzt. Dies ist dann der Fall, wenn die Re

 $^{^{\}rm 1})$ Die aualoge Regel gilt natürlich auch für das Einzelschrittverfahren bei beliebigen Gleichun, systemen.

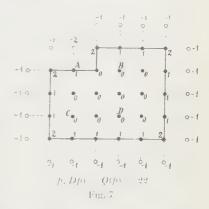
faen in den inneren Punkten alle dieselben Vorzeichen haben. Nehmen wir twa an, sie seien alle ±0. Da sich bei jeder Punktrelaxation das Residuum i betreffenden Punkt auf die vier Nachbarn gleichmäßig verteilt, sind auch ichher wieder alle Residuen ±0. das heißt, die Relaxation verläuft weiterhin nuernd im Käfig. Der Leser mag sich an einem einfachen numerischen Beispiel berzeugen, daß dies auch hier eine starke Verminderung der Konvergenzge hwindigkeit bedeutet, so daß der positive Residuenberg mit dem Löffel statt it einer Baggerm schine abgetragen wird. Andererseits besteht die Gefahr, iß wie in Figur 6 der Relaxationsprozeß gleichgültig, mit welcher Residuenbrteilung er startet einaml in den Käfig eintritt oder sich wenigstens größere silgebiete positiver Residuen. *Teilkäfig.et* bilden, zum Beispiel in der linken beren Ecke und am oberen Rand der Figur 4. Es bestehen folgende Möglichwiten, um einen derartigen Teilkäfig abzubauen und damit die unbedingt notendige Konvergenzbeschleunigung zu erreichen.

a) Blockrelaxation

In Figur 7 ist ein Teil des quadratischen Gitters im Grundgebiet gezeichnet, er einen Käfig bilden soll, und zwar seien alle Residuen in den schwarzen Gitrunkten positiv. Dann wählen wir als Gewichtsfunktion p für einen allge einen Relaxationsschritt (25) die Funktion, welche in allen schwarzen Punktin gleich 1, außerhalb aber Null ist. In Figur 7 wurden die Werte der Funktion

|p| angeschrieben und (p, Dp) = Q(p) = 22 isgerechnet. [Wegen (14) ist Q(p) gleich der razahl der gestrichelten Strecken.] Die ganze gur 7 bezeichnen wir als «Block».

Nach der Regel (25) ist nun ein solcher ock folgendermaßen anzuwenden: Man eralt λ , indem man die negativ genommene amme der Residuen in den schwarzen Punkin durch 22 dividiert. Die Versuchsfunktion ord in allen schwarzen Punkten um denselben vert λ korrigiert. Die dadurch bewirkten esiduenänderungen ergeben sich, indem man ze Zahlen der Figur 7 mit λ multipliziert. Nach Satz 2 hat dieser Relaxationsschritt



lgende Wirkung: Die Summe der neuen Residuen in den schwarzen Punkten rd Null. Da aber nach Figur 7 die Residuen in den inneren Punkten nicht ändert werden, bedeutet dies, daß auf dem dick gezogenen Rand der Figur 7 sitive und negative Residuen hergestellt werden, im Innern aber ein posizer Käfig bleibt. Dieser muß dann durch einen kleineren Block angegriffen erden.

b) Scheibenrelaxation

Man kann die Blockmethode verallgemeinern, indem man für die Gewichtstunktion p eine beliebige, in den schwarzen Punkten subharmonische Funktions nimmt, die außerhalb Null ist. (Subharmonisch bedeutet Dp > 0.) Nach (26); ändern sich nämlich dann alle Residuen bei diesem Relaxationsschritt im gle ochen Sinn. Eine derartige Gewichtsfunktion nennen wir eine Scheibe. Unter den vielen möglichen Methoden, Scheiben zu bauen, seien die beiden folgendet erwähnt:

1. Das Gebiet der schwarzen Gitterpunkte, für welche eine Scheibe korstruiert werden soll, sei ein Rechteck. Dann löse man das Eigenwertproblem

$$Dp = \mu p$$
, in jedem schwarzen Punkt, (28)

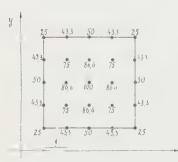
$$p = 0$$
 außerhalb (29)

(schwingende Membran) und nehme für p die Grundschwingung; diese hat bekanntlich keine Knoten, also in allen schwarzen Punkten dasselbe Vorzeichel somit ist nach (28) tatsächlich p subharmonisch.

Dieses Eigenwertproblem ist durch Fourier-Entwicklung leicht zu löser Es ergibt sich zum Beispiel für ein Quadrat von 5 · 5 Gitterpunkten im Kooi dinatensystem der Figur 8

$$p(x, y) = \sin \frac{\pi x}{6} \sin \frac{\pi y}{6}, \qquad (30)$$

und der Eigenwert dieser Grundschwingung ist



 $(p, Dp) = \mu (p, p) = 90\,000\,\mu = 48\,240$ Fig. 8

$$\mu = 8 \sin^2 \frac{\pi}{12} = 0.536$$
.

In Figur 8 sind die Werte von p mit drei Stelle tabelliert. Noch ein Beispiel zur Anwendung de Scheibe: die gegebene Residuenverteilung bild einen Teilkäfig, der sich ungefähr auf ein quadratisches Gebiet von $5\cdot 5$ Gitterpunkten erstreckt und zwar so, daß das Residuum in jedem diese Punkte ungefähr + 100 beträgt. Die Anwendun der Scheibe ergibt dann nach Regel (25) in Mittelpunkt des Quadrats eine Funktionskorrektur von etwa -(289). Demgegenüber liefert eins einzelne Punktrelaxation in diesem Mittelpunk

nur eine Funktionskorrektur von 100:4 = 25 zur Beseitigung des Residu ums +100, also einen mehr als zehnmal zu kleinen Wert!

2. Kleinere Scheiben, die nur wenig Gitterpunkte enthalten, können direk durch Relaxieren konstruiert werden. Man geht aus von einer Versuchsfunktio

ür ϕ und bildet $D\phi$. Durch systematisches Korrigieren der Versuchsfunktion i Einzelschritten beseitigt man zunächst alle negativen Werte von $D\phi$ und leicht dann die positiven Werte von $D\phi$ aus, so daß zum Schluß $D\phi$ überall ast übereinstimmende positive Werte hat.

Größere Scheiben bildet man, indem man innen in eine kleinere bekannte ocheibe ein Feld von Versuchswerten einsetzt und längs der entstandenen Naht ourch Relaxation ausgleicht.

Scheiben sind zum Aufbrechen von Käfigen im allgemeinen wirksamer als slöcke, da sie im Gegensatz zu diesen auch das Innere des Käfigs angreifen. Es ist sogar gelegentlich anzuraten, Teilkäfige absichtlich herzustellen, um cheiben anwenden zu können. Dies kann zum Beispiel so geschehen, daß in enem Teilgebiet längere Zeit – etwa nach dem Gesamtschrittverfahren von bschnitt 4 – relaviert wird. Wir werden später zeigen, daß dann die Residuenerteilung asymptotisch die Form der oben eingeführten Grundschwingung ieses Teilgebietes bekommt, so daß eine Scheibe vom Typus 1 wunderbar paßt».

Es ist zweckmäßig, für einen gegebenen Operator D eine Sammlung von Jöcken und Scheiben anzulegen. Zum Beispiel kann eine solche Sammlung on Blöcken und Scheiben für den Operator der Figur 2a dann zur Lösung jedes otentialproblems Verwendung finden, gleichgültig, wie das Grundgebiet auseht oder wie die Randbedingungen lauten.

3. Simultane Relaxation

Zurückkehrend zum Beginn des Abschnitt 2 können wir den dortigen Ansatz 21) wie folgt verallgemeinern: An Stelle des einzigen Gewichtsvektors p wählen ir jetzt m Gewichtsvektoren $p_1, p_2, ..., p_m$, die linear unabhängig sein sollen¹), ann machen wir für den Korrekturvektor des Versuchsvektors v den Ansatz

$$\Delta v = \lambda_1 \, p_1 + \lambda_2 \, p_2 + \dots + \lambda_m \, p_m \tag{31}$$

it den jetzt zu bestimmenden Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Wir betrachten also e lineare Schar von Versuchsvektoren

$$v' = v + \Delta v = v + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, p_k \,. \tag{32}$$

'ie in (23) ergibt sich für die Ableitung der zu minimalisierenden Funktion f(v') nach λ_i :

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = (r', p_i) = 0 , \qquad (33)$$

obei r' der zu v' gehörige Residuenvektor ist, also

¹⁾ Indizes bedeuten von jetzt an Nummern von Vektoren und nicht mehr wie früher die Komnenten eines einzelnen Vektors.

Satz 3: Bei simultaner Relaxation mit mehreren Gewichten muß der nel Residuenvektor orthogonal zu sämtlichen Gewichtsvektoren sein.

Die Auswertung dieser Orthogonalitätsbedingung ergibt nach (4') und (3

$$\begin{split} r' &= r + D \Delta v = r + \sum_{k=1}^m \lambda_k \, D p_k \;, \\ (r', p_i) &= (r, p_i) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \, (p_i, D p_k) = 0 \;. \end{split}$$

Man erhält also zur Bestimmung von $\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_m$ das lineare Gleichung system

$$\sum_{k=1}^{m} (p_i, Dp_k) \lambda_k + (r, p_i) = 0.$$
 (3)

Dabei ist r der Residuenvektor, der zum Versuchsvektor v gehört. Wegen de Greenschen Formel (9) ist dieses System symmetrisch, fällt also seinerseits wirdes Ausgangssystem (1) unter die Theorie von Abschnitt 1 und könnte dahe durch Relaxationsrechnung aufgelöst werden. Die zu ihm gehörige quadratisch Form ist nach (7)

$$\sum_{(i,\,k)} \left(p_i,\, D p_k
ight) \, \lambda_i \, \lambda_k = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \, p_i \,,\, D \sum_{k=1}^m \lambda_k \, p_k
ight)
ight),$$

und dies ist nichts anderes als unsere alte Form

$$Q(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_m p_m)$$
.

Sie ist daher immer größer als oder gleich Null und kann nur verschwinden, wer

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_m p_m = 0,$$

was wegen der Unabhängigkeit der p_i nur möglich ist, wenn

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = \lambda_m = 0$$
.

Damit ist gezeigt, daß das Gleichungssystem (34) die in Abschnitt 1 gestellt Definitheitsforderung erfüllt. Sind die Gleichungen (34) aufgelöst, so findet ma die Funktionskorrekturen und neuen Residuen aus

$$\Delta v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, p_k \,, \quad r' = r + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, D p_k \,. \tag{3.2}$$

Im allgemeinen wird man natürlich die Zahl der Gewichte nicht zu groß unspeziell kleiner als die Zahl n der Unbekannten in (1) wählen. Die Methode de

undtanen Relaxation besteht also – grob gesprochen – darin, daß das Gleiungssystem (1) mit Hilfe von Gleichungssystemen mit weuiger Unbekannten löst wird. Wir geben im folgenden drei Anwendungen der Methode.

a) Verbesserung der Blocktechnik

Wir haben in Abschnitt 2 festgestellt, daß ein einzelner Block p (Figur 7) wöhnlich nicht genügt, um einen Käfig abzubauen, sondern daß anschließend ch mehrere Blöcke im Innern des ersten anzuwenden sind. Es soll etwa in gur 7 außer $p-p_1$ noch ein weiterer Block p_2 auf das Quadrat ABCD gelegt orden, so daß also die Gewichtsfunktion p_2 in jedem der neun Punkte dieses nadrats den Wert +1, sonst aber überall den Wert Null hat. Statt nachnander sollen die Blöcke nun simultan angewandt werden, was viel vorteilfter ist. Man berechnet sofort

$$(p_1, Dp_1) = 22, \quad (p_2, Dp_1) = 1, \quad (p_2, Dp_2) = 12,$$

daß die Gleichungen (34) lauten:

$$22 \lambda_1 + \lambda_2 + (r, p_1) = 0$$
, $\lambda_1 + 12 \lambda_2 + (r, p_2) = 0$.

erin ist (r, p_1) die Summe der Residuen in den schwarzen Punkten der zur 7 und (r, p_2) die Summe der Residuen in den neun Punkten des Quates ABCD. Die Wirkung dieser simultanen Relaxation ist nach Satz 3 die, 3 sowohl am Rande des Quadrats ABCD als auch in den schwarzen Punkten Berhalb dieses Quadrates Residuen beiderlei Vorzeichens entstehen. Hätte n diesmal den Block p_2 ganz ins Innere von p_1 gelegt, so wäre $(p_2, Dp_1) = 0$, a heißt, es käme auf dasselbe heraus, wenn die beiden Blöcke simultan oder cheinander angewendet würden.

b) Konjugierte Gewichte

Wir nennen zwei Gewichtsvektoren p_1 und p_2 konjugiert, wenn $(p_2, Dp_1) = 0$ Wegen der Greenschen Formel ist dann auch $(p_1, Dp_2) = 0$, so daß also diese lation zwischen zwei Gewichten symmetrisch ist. Wir haben eben einen chen Fall angetroffen. Die simultane Relaxation mit Gewichtsvektoren p_2, \ldots, p_m , die paarweise zueinander konjugiert sind¹), ist besonders fach, indem man an Stelle der Gleichungen (34) für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ die explifin Formeln hat:

$$\lambda_i = -\frac{\langle r, p_i \rangle}{\langle p_i, D p_i \rangle}. \tag{36}$$

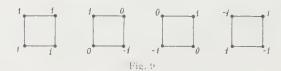
 $^{^{(1)}}$ Sind alle p_i von Null verschieden, so sind sie von selbst linear unabhängig.

Gelingt es für ein gegebenes Problem (1) mit n Unbekannten auch n von Nuverschiedene und paarweise konjugierte Gewichte zu finden, so führt eine eitzige simultane Relaxation mit diesen Gewichten zur exakten Lösung des Problems. Denn der neue Residuenvektor nach dieser Relaxation, r', steht nach Satz 3 orthogonal auf jedem der n linear unabhängigen Gewichtsvektoren, is also der Nullvektor.

Beim Dirichlet-Problem für ein gegebenes Grundgebiet kann man in eine rechteckigen Teilgebiet konjugierte Gewichtsfunktionen wie folgt konstruieren Man löse wie bei der Scheibenkonstruktion das Eigenwertproblem (28)

$$Dp = u p$$
 in den Gitterpunkten des Teilgebietes,
 $p = 0$ außerhalb des Teilgebietes (3)

durch Fourier-Entwicklung nach den beiden Koordinatenrichtungen der Figure und nehme als Gewichte p_1, p_2, \ldots die sukzessiven Eigenfunktionen, geordnen nach wachsenden Eigenwerten. Diese Funktionen sind orthogonal, also wege (37) auch konjugiert. Die Berechnung der Koeffizienten (36) für die Simultagrelaxation ist dann nichts anderes als die zweidimensionale Fourier-Analyse die gegebenen Residuenverteilung im vorliegenden Rechteck, die Berechnung der Korrekturen (35) eine darauffolgende Synthese. Man kann also die sehr weit ausgebildeten Rechenverfahren der trigonometrischen Interpolation benutzet Die Wirkung der Simultanrelaxation besteht dann darin, daß p_1 als Scheik einen etwa vorhandenen Käfig beseitigt, während die höheren Eigenfunktione dann noch vorhandene Rauhigkeiten glätten. Für ein Quadrat aus vier Gitter punkten erhält man so die in Figur 9 gezeichneten vier konjugierten Gewicht



funktionen. Eine simultane Relaxation mit diesen vier Gewichten macht der Residuen in den vier Quadratecken exakt zu Null.

c) Ausrelaxieren eines Teilgebietes

Es sei etwa beim Dirichlet-Problem wieder ein Teilgebiet von m Gittepunkten gegeben. Denkt man sich für einen Moment m Gewichtsfunktione gewählt, von denen jede in genau einem Gitterpunkt des Teilgebiets den Werthat, sonst aber überall den Wert Null. Dann besagt Satz 3, daß die zugehörig Simultanrelaxation die Residuen in sämtlichen m Gitterpunkten des Teilgebietzu Null machen muß.

Ohne die allgemeine Theorie zu benutzen, kann man die Gleichungen für Funktionskorrekturen im Teilgebiet direkt hinschreiben. Ist zum Beispiel Figur 1 das Teilgebiet die Strecke der Punkte Nr. 6, 7, 8, 9, so lauten diese eichungen:

erauf kann man folgende Relaxationstechnik gründen: Man wählt eine einhe Punktfigur (zum Beispiel ein Quadrat aus 3·3 Gitterpunkten), bringt se Figur an verschiedene Stellen im Grundgebiet und beseitigt jeweilen die Isiduen im Inneren der Figur durch Auflösen der Gleichungen vom Typ (38). Is Einzelschrittverfahren (Punktrelaxation) ist natürlich derjenige Spezialt, wo die Figur aus einem einzigen Punkt besteht.

3 Das häufige Auflösen der Gleichungen wird man sich erleichtern, indem man i für alle Male die inverse Matrix der Gleichungsmatrix bildet. Wählt man inktfiguren hoher Symmetrie, so bietet die Theorie der Charaktere der zugezigen Symmetriegruppe Möglichkeiten, um die Gleichungen in Systeme mit Aniger Unbekannten zu zerfällen.

Im Institut für angewandte Mathematik der ETH, in Zürich wurden die stischen Spannungen in einer Gewichtsstaumauer unter Berücksichtigung I elastischen Einbettung in den Baugrund so bestimmt¹). [Auflösung der zarmonischen Gleichung für die Airysche Spannungsfunktion durch Relation, Punktfigur — Quadrat von 4 · 4 Punkten, Auflösung der 16 Gleichungen in Typus (38) vollautomatisch auf einer programmgesteuerten Rechenmatine.]

4. Methode des stärksten Abstiegs

a) Gesamtschrittverfahren

Während die bisherigen Methoden der Intuition des Rechners betreffend Wahl des nächsten Relaxationsschrittes weitgehenden Spielraum lassen, namen wir jetzt zu den Verfahren, die zwangsläufig fortschreiten und sich er für programmgesteuerte Rechenautomaten eignen. Diese Verfahren geen alle in den Abschnitt 2, arbeiten also pro Schritt mit einem einzigen wichtsvektor p und nicht simultan mit mehreren Gewichten. Nach jedem fritt wird der nächste Gewichtsvektor vorgeschrieben und ist also nicht wie zur noch wählbar.

¹⁾ Ein Bericht darüber erscheint demnächst in den Comptes rendus des Colloques internationaux L'omité national de recherches scientifiques, Paris, Colloque de l'Institut Blaise-Pascal, 8. bis Januar 1951.

Wir werfen einen Blick auf die Figur 5. Ausgehend von einem Versuch punkt v sollen wir in der Richtung des Gewichtsvektors p vorwärtsgehen, daß unsere quadratische Funktion F abnimmt. Nun nimmt aber F (wenigstes in der Umgebung von v) dann am stärksten ab, wenn wir senkrecht zu de Niveaulinien, also in der entgegengesetzten Richtung zu grad F, fortschreite Ist r der zu v gehörige Residuenvektor, so bedeutet dies wegen (19) die We

$$p = -r. ag{3}$$

Das Verfahren des stärksten Abstiegs besteht also darin, daß der neue Gewich vektor entgegengesetzt gleich dem Residuenvektor gewählt wird. Satz 2 sa dann:

Satz 4: Beim Verfahren des stärksten Abstiegs sicht nach Durchführung eir Relaxationsschrittes der neue Residuenvektor orthogonal auf dem alten.

Die Formeln (25) ergeben die Regeln:

Es sei v ein Versuchsvektor, r der zugehörige Residuenvektor. Dann betri die Korrektur

$$Iv = -\lambda r \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{(\tilde{r}, I)}{(D\tilde{r}, r)}$$
 (-

und die neuen Residuen:

$$r'=r-\lambda Dr$$
.

Der Quotient (40) spielt eine große Rolle beim Problem, die Eigenwerte der Abschnitt 1, Formel (7), eingeführten quadratischen Form Q(x)=(x,Dx) bestimmen. Man bezeichnet gewöhnlich

$$R(x) = \frac{Q(x)}{(x, x)} \tag{4}$$

als Rayleighschen Quotienten des Vektors x. Sein Wert liegt immer zwisch dem größten und dem kleinsten Eigenwert der Form Q(x). Wir stellen also fe daß unser Korrekturjaktor λ der reziproke Rayleighsche Quotient des Residue vektors ist.

Haben wir zum Beispiel beim Dirichlet-Problem einen Käfig über das gart Grundgebiet hinweg, also überall positive Residuen, so liegt diese Residue verteilung in der Nähe der Grundschwingung der Membran, das heißt in α Nähe der ersten Eigenfunktion des Eigenwertproblems $Dx = \mu x$. Der Releighsche Quotient von r ist somit in der Nähe des kleinsten Eigenwertes und daher λ groß, das heißt nahe am maximalen Wert $1/\mu_1$, den λ überhaupt anehmen kann. Die Funktionskorrekturen sind nach (40) auch groß, was ja ze Beseitigung des Käfigs nötig ist. Haben hingegen die Residuen stark abweiselnde Vorzeichen, so sind wir eher in der Nähe einer höheren Eigenfunktiund λ wird klein.

Unter Gesamtschrittverjahren¹⁾ verstehen wir folgende Variante der Methode stärksten Abstiegs: Man rechnet bei diesem Verfahren wie bei (40), (41) ich den Formeln

$$1v = -\lambda r, \quad r' = r - \lambda Dr, \tag{43}$$

mmt aber für λ nicht den reziproken Wert des Rayleighschen Quotienten, ndern eine ein für allemal jest gewählte Konstante, die bei allen Relaxationsnitten verwendet wird. Man erspart sich damit die Berechnung der skalaren odukte (Dr, r) und (r, r) bei jedem einzelnen Schritt. Da es sich hier um eine orschrift handelt, die von unserem Grundprinzip des Minimalisierens der adratischen Funktion F abweicht, müssen wir neu untersuchen, ob das Vernren gegen die Lösung des Problems konvergiert. Wir brauchen zu diesem zeck die Eigenwerte

$$u_1 \le \mu_2 \le \mu_3 \le \dots \le \mu_n$$

d die zugehörigen Eigenvektoren

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

s Eigenwertproblems $Dx = \mu x$ oder – was auf dasselbe hinausläuft – der adratischen Form Q(x). Wir starten die ganze Relaxationsrechnung mit em Versuchsvektor v_0 und entwickeln den zugehörigen Residuenvektor r_0 ch Eigenvektoren:

$$r_0 = \alpha_1 \, x_1 + \alpha_2 \, x_2 + \dots + \alpha_n \, x_n \,. \tag{44}$$

-nn ist der Residuenvektor nach k-maliger Anwendung des Gesamtschrittlfahrens:

$$r_k = \alpha_1 (1 - \lambda \mu_1)^k x_1 + \alpha_2 (1 - \lambda \mu_2)^k x_2 + \dots + \alpha_n (1 - \lambda \mu_n)^k x_n$$
, (45)

is man leicht durch vollständige Induktion wie folgt verifiziert: Aus (45)

$$r_{k+1} - r_k = -\alpha_1 (1 - \lambda \mu_1)^k \lambda \mu_1 x_1 - \dots - \alpha_n (1 - \lambda \mu_n)^k \lambda \mu_n x_n$$

Il dies ist wegen $Dx_i = \mu_i x_i$ gleich

$$\int_{a+1} - r_k = -\lambda (1 - \lambda \mu_1)^k D\alpha_1 x_1 - \dots - \lambda (1 - \lambda \mu_n)^k D\alpha_n x_n = -\lambda Dr_k,$$

(1) In leichter Verallgemeinerung einer in der Literatur eingebürgerten Terminologie (vgl. Wils, l. c., Seite 304). Das Verfahren samt den zugehörigen Konvergenzuntersuchungen wurde wohl ersten Male ausführlich geschildert von I. F. RICHARDSON, The Approximate Arithmetical tion by Finite Differences of Physical Problems..., Phil. Trans. Roy. Soc. London [A], 210, i-357 (1911).

also

$$r_{k+1} = r_k - \lambda D r_k$$

in Übereinstimmung mit der Vorschrift (43) für jeden Relaxationsschritt. Dam nun das Verfahren konvergiert, also die Residuen gegen Null streben, muß jet der Klammern in (45) dem Betrag nach kleiner als 1 sein. Dies ergibt als not wendige und hinreichende Konvergenzbedingung

$$0 < \lambda < \frac{2}{\mu_n} . \tag{4}$$

Je nach Wahl von λ zeigt das Vertahren verschiedenes Konvergenzverhaltes. Es soll dies noch etwas diskutiert werden, wobei zweckmäßig $\mu=1/\lambda$ eingeführen wird, so daß (45) lautet

$$r_k = \alpha_1 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu}\right)^k x_1 + \alpha_2 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu}\right)^k x_2 + \dots + \alpha_n \left(1 - \frac{\mu_n}{\mu}\right)^k x_n$$
. (4)

Fall 1: $\mu_n \leq \mu$. Dann strebt jeder Koeffizient in (47) monoton gegen Nu und es ergibt sich asymptotisch

$$r_k \sim \alpha_1 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu} \right)^k x_1 \tag{4}$$

(falls nicht zufällig der erste Eigenwert μ_1 mehrfach ist oder der Fourier-Koet zient α_1 verschwindet). Ist speziell $\mu = \mu_n$, so wird der Beitrag der höchst Eigenfunktion an die Residuenverteilung sofort beseitigt.

Fall 2: $(\mu_1 + \mu_n)/2 \le \mu \le \mu_n$. Die asymptotische Formel (48) gilt noch die Koeffizienten in (47) mit $\mu_i \le \mu$ nehmen monoton und diejenigen ru $\mu \le \mu_i$ oszillierend ab.

Fall 3: $\mu = (\mu_1 + \mu_n)/2$. Hier gilt statt (48)

$$r_k \sim \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu}\right)^k \left[\alpha_1 x_1 + (-1)^k \alpha_n x_n\right]. \tag{4}$$

Fall 4: $\mu_n/2 < \mu < (\mu_1 + \mu_n)/2$. Jetzt ist

$$r_k \sim \alpha_n \left(1 - \frac{\mu_n}{\mu} \right)^k x_n \,. \tag{-}$$

Aus dieser Diskussion ergibt sich deutlich, daß wir zwei Typen von Relaxatio problemen unterscheiden müssen.

Typus I: Probleme mit $\mu_n/2 \leq \mu_1$. In diesen Fällen hat man es in der Har durch geeignete Wahl von μ den Einfluß jeder Eigenfunktion rasch zu elim nieren. (Man wähle eben μ gleich dem betreffenden Eigenwert.) Für die pratische Durchführung wird man also μ das Intervall der Eigenwerte $\mu_1 \leq \mu \leq$ durchlaufen lassen.

Typus II: Probleme mit $u_1 \ge u_n$ 2. Hier bleibt der Einfluß der ersten rgenfunktion bis zum Schluß merklich, und in den Fällen 1, 2, 3 wird die esiduenverteilung sogar immer mehr dieser Eigenfunktion ähnlich¹). Wir nden also hier die früher an speziellen Beispielen besprochene Erscheinung 1s Käfigs wieder und werden definieren: Unter einem Käfig versteht man eine esiduenverteilung, welche ungefähr die Gestalt der ersten Eigenfunktion hat. Wir kennen, daß die Residuenverteilung im Verlauf der Relaxation die Tendenz t, diese Käfigform anzunehmen und daß der Abbau des Käfigs nur langsam folgt. Neben der ersten Eigenfunktion sind natürlich auch die Beiträge dernigen Eigenfunktionen gefährlich, deren Eigenwerte unterhalb $\mu_n/2$ liegen. ii den Problemen vom Typus II wird man mit u hart an die Konvergenzenze u, 2 herangehen, also Fall 4 wählen. Um Käfige aufzubrechen, empfiehlt ; sich sogar gelegentlich, für einige Relaxationsschritte $\mu \leq u_p/2$ zu wählen lethode der Überkorrektion. Dies bewirkt allerdings, daß die Beiträge der theren Eigenfunktionen wieder aufgeschaukelt werden²). Beim Verfahren des irksten Abstiegs wird \(\hat{\lambda}\) als Rayleighscher Quotient automatisch reguliert.

Was liefern diese Erkenntnisse für das Dirichlet-Problem in einem beliebigen rundgebiet, das quadratisch unterteilt wurde? Ist μ_i ein Eigenwert dieses loblems, so ist auch $(8-\mu_i)$ ein solcher, man kann also die Eigenwerte aren. Um dieses einzusehen, nehmen wir die Schachbrettfunktion» s zu lfe, welche dadurch charakterisiert ist, daß sie in allen Gitterpunkten des fadratischen Netzes Werte ± 1 hat, und zwar so, daß die Werte in zwei beliebarten Gitterpunkten verschiedenes Vorzeichen haben. Ist nun x Eigennktion zum Eigenwert μ_i , so ist y - s y Eigenfunktion zum Eigenwert (8- μ_i). der Tat gilt zum Beispiel im Punkt Nr. 9 von Figur 1

$$4 x_9 - x_{10} - x_4 - x_8 - x_{14} - \mu_i x_9$$

d somit

$$4 x_9 + x_{10} + x_4 + x_8 + x_{14} = (8 - \mu_i) x_9$$

$$4 y_9 - y_{10} - y_4 - y_8 - y_{14} = (8 - \mu_i) y_9$$
.

beziell sind also der höchste und der niedrigste Eigenwert durch die Relation rknüpft $\mu_1 + \mu_n = 8$, und der obige Fall 3 entspricht der Wahl

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_n}{2} = 4$$
, oder $\lambda = \frac{1}{4}$.

e Regel (43) für die Korrektur einer Versuchsfunktion vergibt dann

$$1_{7'} \qquad - \frac{1}{4} r ,$$

¹⁾ Dies bedeutet in der Figur 5, daß der Relaxationsweg in der Richtung der Ellipsenhauptise in den Lösungspunkt einmündet.

²⁾ Vergleiche auch S. P. Frankel, Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Different Equations. Mathematical Tables and other Aids to Computation 4, 30 (1950).

also etwa im Punkt Nr. 9 der Figur 1

$$\varDelta v_{9} = -\,\,\frac{1}{4}\,\,(4\,\,v_{9} - \,v_{10} - \,v_{4} - \,v_{8} - \,v_{14}) \;. \label{eq:v9}$$

Der neue Funktionswert in diesem Punkt beträgt also

$$v_9' = \frac{1}{4} \left(v_{10} + v_4 + v_8 + v_{14} \right) \tag{5}$$

und im Punkt Nr. 10

$$v'_{10} = \frac{1}{4} \left(v_5 + v_9 + v_{15} + f_R \right) , \tag{5}$$

wobei f_R den gegebenen Randwert bedeutet. Dies ist das bekannte Verjahrvon Richardson. Es ist nicht mit dem Einzelschrittverfahren von Abschnitt 1 verwechseln. Bei diesem wird die Korrektur (51) in (52) schon berücksichtig man hat also

$$v_{10}' = \frac{1}{4} (v_5 + v_9' + v_{15} + f_R) .$$

Beim Dirichlet-Problem ist immer $\mu_1 \subset \mu_n$ 2, und mit wachsender Zahl der Gitterpunkte nähert sich μ_1 immer mehr dem Wert Null. Die Konvergenz dir Richardsonschen Verfahrens ist daher hoffnungslos schlecht, da es gegen dir Schluß hin einen ausgeprägten Käfig liefert, zu dessen Beseitigung kein einer scheidender Schritt getan wird.

b) Pauschalkorrekturen

Nach (43) und (45) erhält man für den Versuchsvektor v_k nach k Schritte durch Summation von geometrischen Reihen

$$v_k = v_0 + \alpha_1 \frac{(1 - \lambda \mu_1)^k - 1}{\mu_1} x_1 + \dots + \alpha_n \frac{(1 - \lambda \mu_n)^k - 1}{\mu_n} x_n.$$
 (5)

Die Lösung des Problems ergibt sich für $k \to \infty$ als

$$u = v_0 - \frac{\alpha_1}{\mu_1} x_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\mu_n} x_n \tag{5}$$

und damit der Fehler

$$v_k - u = \alpha_1 \frac{(1 - \lambda \mu_1)^k}{\mu_1} x_1 + \dots + \alpha_n \frac{(1 - \lambda \mu_n)^k}{\mu_n} x_n.$$
 (5)

Wir wollen nun annehmen, daß wir am Schluß eines Gesamtschrittverfahrer arbeiten und uns im Käfig befinden, so daß näherungsweise die höheren Eigerfunktionen in (53) und (55) weggelassen werden können. Man kann nun folger

's Verfahren zur Beseitigung des Käfigs verwenden: Man bilde für zwei In zes i < k den Vektor $v_i - v_k$. Sowohl er als auch der Vektor $v_k - u$ sind anhernd proportional zum ersten Eigenvektor x_1 , also gilt angenähert

$$u \cong v_k + c (v_i - v_k)$$

at einer beliebigen Konstanten c. Nimmt man daher $v_i - v_k$ als Gewichtsector p für eine allgemeine Relaxation im Sinne von Abschnitt 2, so wird man die Nähe der Lösung kommen. Es ist ratsam, überhaupt jede Relaxationschnung durch eine solche Pauschalkorrektur abzuschließen.

5. Das *n*-Schritt-Verfahren¹)

Beim Verfahren des starksten Abstiegs ist die Wahl des Gewichtsvektors rich den gerade vorliegenden Stand der Residuen bestimmt; sie ist also unabngig von der Vorgeschichte der ganzen Relaxationsrechnung. Benützt man se Vorgeschichte auch die eben hergeleitete Methode der Pauschalkorrektur it dies —, so kann man ein Verfahren finden, das in endlich vielen Schritten Lösung führt, also zugleich eine sukzessive Approximation an die Lösung it einen Algorithmus zu ihrer Bestimmung liefert. Es seien nun wieder v_0, \ldots, v_k, \ldots die sukzessiven Versuchsvektoren, $r_0, r_1, \ldots, r_k, \ldots$ die zugehörigen Isiduenvektoren und $p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots$ die Gewichtsvektoren. Der Übergang i v_k zu v_{k+1} ist ein allgemeiner Relaxationsschritt mit dem Gewichtsvektor p_k Sinne von Abschnitt 2. Es gilt also nach (25)

$$v_{k+1} = v_k + \lambda_k \, p_k \quad \text{mit} \quad \lambda_k = -\frac{(r_k, p_k)}{(Dp_{k_k} p_k)} \tag{56}$$

ner nach Satz 2

$$r_{k+1} = r_k + \lambda_k \, D p_k \; ; \tag{57}$$

$$(r_{k+1}, p_k) = 0. (58)$$

is Verfahren des stärksten Abstiegs besteht in der Wahl $p_k=-r_k$ für den veiligen Gewichtsvektor. Jetzt wählen wir zwar noch

$$p_0 = -r_0 \,, \tag{59}$$

er

$$p_k = -r_k + \varepsilon_{k-1} p_{k-1} \quad \text{für} \quad k > 0.$$
 (60)

¹⁾ Zusatz bei der Korrektur: Nach Niederschrift der vorliegenden Arbeit stellte ich anlaßlich is Besuches im Institute for Numerical Analysis (University of California) fest, daß dieses Verren etwas später auch von einer Gruppe des genannten Instituts entwickelt worden war. Ein läufiger interner Bericht für das National Bureau of Standards wurde von M. R. Hestenes im zust 1951 gegeben (N. A. M. L. Report, 52-9).

Wir fügen also eine Korrektur hinzu, die proportional ist zum vorhergehend Gewichtsvektor. ε_{k-1} wird so bestimmt, daß ϕ_k und ϕ_{k-1} konjugiert sind¹) Sinne von Abschnitt 3, Untertitel b. Also

$$(p_k, Dp_{k-1}) = 0 \tag{6}$$

oder

$$-(r_k, Dp_{k-1}) + \varepsilon_{k-1}(p_{k-1}, Dp_{k-1}) = 0, \quad \varepsilon_{k-1} = \frac{(r_k, Dp_{k-1})}{(p_{k-1}, Dp_{k-1})}. \quad (6)$$

Nun folgt zunächst aus (57) unter Berücksichtigung von (58) und (61)

$$(\gamma_{k+1}, p_{k-1}) = (\gamma_k, p_{k-1}) + \lambda_k (Dp_k, p_{k-1}) = 0.$$
 (6)

Indem man r_k aus (60) ausrechnet und (58), (63) verwendet:

$$(r_{k+1}, r_k) = -(r_{k+1}, p_k) + \varepsilon_{k-1} (r_{k+1}, p_{k-1}) = 0.$$
 (6)

Für die folgenden Betrachtungen können wir $\lambda_k = 0$ annehmen. Anderenfalist nämlich nach (57) $r_{k+1} = r_k$, und aus (64) folgt $(r_k, r_k) = 0$, und die Relaxati ist beendet. Jetzt beweisen wir

Satz 5: Beim n-Schritt-Verfahren hilden die Gewichtsvektoren ein konjugier. System.

Beweis durch Induktion. Es sei also bereits gezeigt, daß p_0, p_1, \ldots , paarweise konjugiert sind. Wir müssen zeigen, daß p_{k+1} zu diesen Vektorkonjugiert ist. Wir wissen bereits $(p_{k+1}, Dp_k) = 0$, berechnen also zunäch (p_{k+1}, Dp_{k-1}) . Aus (57) folgt

$$(r_{k+1}, r_{k+1}) = (r_k, r_{k+1}) + \lambda_k (D\phi_k, r_{k+1}) = \lambda_k (D\phi_k, r_{k+1})$$
 (6)

wegen (64). Für k = 1 ist dies 0 wegen (59); für k > 1 folgt aus (60)

$$r_{k-1} = -p_{k-1} + \varepsilon_{k-2} p_{k-2}$$
.

Daher aus (65) ebenfalls

$$(r_{k+1}, r_{k-1}) = -\lambda_k (D\phi_k, \phi_{k-1}) + \lambda_k \varepsilon_{k-2} (D\phi_k, \phi_{k-2}) = 0$$
 (6)

nach Induktionsvoraussetzung.

Jetzt folgt aus (60)

$$(\phi_{k+1}, D\phi_{k-1}) = -(r_{k+1}, D\phi_{k-1}) + \varepsilon_k (\phi_k, D\phi_{k-1}) = -(r_{k+1}, D\phi_{k-1}) \tag{6}$$

wegen der Induktionsvoraussetzung. Aus (57):

$$Dp_{k-1} = \frac{1}{\lambda_{k-1}} (r_k - r_{k-1}).$$

 $^{^{1}}$) In Figur 5 bedeutet dies, daß man vom Näherungspunkt v aus direkt auf das Zentrum d Ellipse hinzielt. Denn der vorhergehende Gewichtsvektor ist Tangente an die Ellipse in v.

hher ergibt (67):

$$(p_{k+1}, Dp_{k-1}) = -\frac{1}{\lambda_{k-1}} (r_{k+1}, r_k) + \frac{1}{\lambda_{k-1}} (r_{k+1}, r_{k-1}) = 0$$
 (68)

gen (64) und (66). Es sind also p_{k+1} und p_{k-1} konjugiert. Genau analog weist man zunächst im weiteren

$$(r_{k+1}, r_{k-2}) = 0$$
 und dann $(p_{k+1}, Dp_{k-2}) = 0$ (69)

ed so fortfahrend schließlich den Satz 5. Aus (64), (66), (69) usw. folgt noch Satz 6: Beim n-Schritt-Verfahren bilden die Residuenvektoren ein orthogonales stem.

Ist n wieder die Anzahl der Unbekannten in den ursprünglich gegebenen zichungen (1), so können in diesem Orthogonalsystem höchstens n von Null schiedene Vektoren sein. Daher gilt

Satz 7: Das n-Schritt-Verfahren führt nach höchstens n Schritten zur exakten sung der gegebenen Gleichungen.

Außer den in den Sätzen 5, 6 genannten Orthogonalitätseigenschaften gibt noch mehrere andere. Wir erwähnen nur

Satz 8: Der Residuenvektor r_{k+1} ist konjugiert zu $r_0, r_1, ..., r_{k-1}$.

Dies ergibt sich sofort, wenn man die r_i aus (60) berechnet und Satz 5 andet. Außerdem ergeben sich manche Identitäten zwischen skalaren Prokten, zum Beispiel aus (60)

$$(r_k, p_k) = -(r_k, r_k) + \varepsilon_{k-1}(r_k, p_{k-1}) = -(r_k, r_k)$$
 (70)

gen (58). Somit kann man an Stelle von (56) die Formel

$$\lambda_k = \frac{(\gamma_k, \gamma_k)}{(D\rho_k, \rho_k)} > 0 \tag{71}$$

utzen. Ferner aus (57) und Satz 6:

$$(r_{k+1}, r_{k+1}) = (r_{k+1}, r_k) + \lambda_k (r_{k+1}, Dp_k) = \lambda_k (r_{k+1}, Dp_k).$$
 (72)

:nit kann man (62) schreiben

$$arepsilon_{k-1} = rac{1}{\lambda_{k-1}} \cdot rac{(r_k, r_k)}{(p_{k-1}, Dp_{k-1})}$$
 ,

indem man (71) einsetzt:

$$\varepsilon_{k-1} = \frac{(\gamma_k, \gamma_k)}{(\gamma_{k-1}, \gamma_{k-1})} > 0. \tag{73}$$

Zusammengefaßt besteht die Methode in folgendem Rechenzyklus: Gegebe seien die Residuenvektoren r_{k-1} , r_k und der Gewichtsvektor p_{k-1} .

- 1. Berechnung von ε_{k-1} aus (73).
- 2. $p_k = -r_k + \varepsilon_{k-1} p_{k-1}$, Probe $(p_k, Dp_{k-1}) = 0$.
- 3. Berechnung von $D\phi_k$ und λ_k aus (70).
- 4. $r_{k+1} = r_k + \lambda_k D \phi_k$, Probe $(r_{k+1}, r_k) = 0$.

Das Verfahren startet mit k=0 beim Punkt 2, wobei p_{k-1} gleich Null zu setze ist. Ist dieser Zyklus oft genug durchlaufen, so summiert man nachträglich als Korrekturen $\Delta v_k = \lambda_k p_k$.

Wir besprechen noch zwei weitere Anwendungen des Verfahrens:

a) Nach Satz 5 bekommen wir gratis ein System konjugierter Gewichtsvertoren mitgeliefert. Wir wollen einmal annehmen, daß dieses System vollständsei, also aus n Vektoren bestehe. Müssen nun die Gleichungen (1) noch einmaufgelöst werden mit anderen absoluten Gliedern l_i , so kann dies nun mit eine Schlage geschehen. Man setze den Lösungsvektor an

$$u - \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_{n-1} p_{n-1}$$
.

Skalare Multiplikation mit $D\phi_i$ liefert dann sofort

$$(u, Dp_i) = (Du, p_i) = \alpha_i (p_i, Dp_i),$$

und aus den gegebenen Gleichungen (1')

$$lpha_i = -rac{(l, p_i)}{(p_i, Dp_i)}$$
 (

Dies bedeutet auch, daß eine Simultanrelaxation im Sinne von Abschnitt 3 r den Gewichten p_i ausgeführt wurde, ausgehend von einem ersten Versuchsvetor, der identisch Null ist. Diese Simultanrelaxation kann man auch ausführe wenn das System der Gewichtsvektoren nicht vollständig ist. Man erhält danur eine angenäherte Lösung. Verbessert man diese wieder nach dem n-Schrift Verfahren, so erhält man automatisch eine Fortsetzung des Systems kont gierter Gewichtsvektoren¹).

b) Es soll noch das Eigenwertproblem $Dx = \mu x$ gelöst werden. Hier v wenden wir das System der Residuenvektoren, welches wir als vollständig anehmen; wir setzen also an

$$x = \xi_0 r_0 + \xi_1 r_1 + \cdots + \xi_{n-1} r_{n-1}$$
.

¹⁾ Natürlich kann man auf diese Weise auch Matrizen invertieren.

 $\varepsilon = \mu x \text{ ergibt}$

$$\xi_0 Dr_0 + \cdots + \xi_{n-1} Dr_{n-1} = \mu (\xi_0 r_0 + \cdots + \xi_{n-1} r_{n-1}).$$

erch skalare Multiplikation mit den einzelnen Residuenvektoren entstellt gen Satz 8 das gestaffelte symmetrische Gleichungssystem

$$\begin{split} & Dr_0, \, r_0 (|\xi_0| - iDr_1, \, r_0 (|\xi_1| - iDr_2, \, r_1 (|\xi_2| - \mu)(r_0, \, r_0)) |\xi_0| \\ & (Dr_0, \, r_1 (|\xi_0| - iDr_1, \, r_1 (|\xi_1| - iDr_2, \, r_1 (|\xi_2| - \mu)(r_1, \, r_1)) |\xi_1| \\ & Dr_1, \, r_2 (|\xi_1| - iDr_2, \, r_2 (|\xi_2| - iDr_3, \, r_2)) |\xi_n| - \mu (r_2, \, r_2) |\xi_2| \\ & \dots \\ & (Dr_{n-2}, \, r_{n-1}) |\xi_{n-2}| + (Dr_{n-1}, \, r_{n-1}) |\xi_{n-1}| = \mu (r_{n-1}, \, r_{n-1}) |\xi_{n-1}| , \end{split}$$

sen Eigenwerte μ berechnet werden müssen, was durch Kettenbruchenteklung in bekannter Weise leicht geschehen kann¹). Ähnliche Orthogonalteme, wie sie hier durch die Residuenvektoren geliefert werden, verwendet inczos²) zur Lösung von Eigenwertproblemen.

Die nachfolgende Tabelle enthält ein numerisches Beispiel. In einem quadrathen Netz von $3 \cdot 3$ Gitterpunkten soll eine Gitterfunktion u so bestimmt den, daß

Du = 10000 in der linken oberen Ecke,

Du = 0 in den übrigen 8 Gitterpunkten.

bei ist D der Dirichlet-Operator von Figur 2. Es handelt sich also um die utimmung einer Greenschen Funktion. Es wurde mit der Versuchsfunktion ε 0 gestartet. Jedes Kästchen der Tabelle entspricht einem Gitterpunkt, ε es sind in ihm die jeweiligen Werte von p_k , Dp_k , r_{k+1} in dieser Reihenfolger einer Zeile protokolliert. Die Rechnung schreitet nach unten fort. Am luß sind die Werte der gesuchten Funktion u angegeben. Infolge der spelen Symmetrieverhältnisse braucht das Verfahren nur sechs Schritte statt im neun. Außer den in (74) erwähnten quadratischen Proben kann man noch fare Proben vom Typus (15) benutzen.

Das n-Schritt-Verfahren ist besonders bequem, wenn es sich um einen Difnzenoperator D handelt, weil dann die Berechnung von Dp viel weniger Mühe ht, als wenn ein ausgefülltes Gleichungssystem (1) vorgelegt ist.

¹⁾ L. Collatz, Eigenwertprobleme und thre numerische Behandlung (Akademische Verlagsgesell-Et, Leipzig 1945), S. 316.

²) C. LANCZOS, An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differland Integral Operators, J. Res. Nat. Bureau of Standards 45, Nr. 4 (1950).

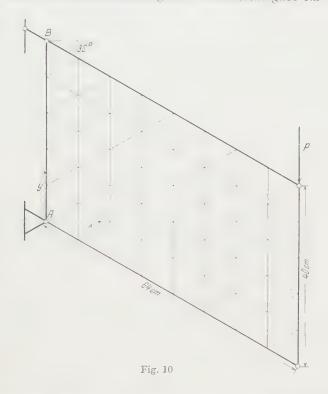
k		p_k		Dp_k	r_{k+1}		p_k		Dp_k	r _{k = 1}	Pk	Dp_k	*k+1
					-10000					0			a de la companya de l
0	1	0.000	1	40 000	0		0	_	10000		0		1
1		1250		0	0		2500		8750	0		-2500	-71
2		306		0	0		612	_	1	0	+714	+2244	
3		93		0	0	1	186		0	0	+217	0	
4		20		0	0	+	40		1	0	+ 47	+ 1	
		2991					982				312		
					0					0			
0		0		10000	- 2500		0			0	0		
1		2500		8750	0		0	_	5000	-1429	0	0	
2	1	612	_	1	0	+	1429	1	4492	0		-2143	-68
3	+	186		0	0	+	434		0	0	+682	+2077	99
4	+	40	-	1	0	+	94	+	2	0	+147	- 1	
		982					625				268		
					0					0			
0		0			0		0			0	0		
1		0	_	2500	- 714		0		0	0	0	0	
2	+-	714	+	2244	0		0	_	2143	- 682	0	0	
3	+	217		0	0	+	682	+	2077	0	0	-1364	- 44
4	+	47	+	1	0	+	147	-	1	0	+448	+1498	
		312					268				134		

$$(r_0, r_0) - 100 \cdot 10^6$$
, $(p_0, Dp_0) = 400 \cdot 10^6$ $\lambda_0 = 0.25$, $\varepsilon_0 = 0.125$, $(r_1, r_1) = 12.5 \cdot 10^6$, $(p_1, Dp_1) = 4375 \cdot 10^6$ $\lambda_1 = 0.28571$, $\varepsilon_1 = 0.24494$ $(r_2, r_2) = 3061633$, $(p_2, Dp_2) = 9622276$, $\lambda_2 = 0.31818$, $\varepsilon_2 = 0.30384$ $(r_3, r_3) = 930248$, $(p_3, Dp_3) = 2833028$, $\lambda_3 = 0.32836$, $\varepsilon_3 = 0.21572$ $(r_4, r_4) = 200704$, $(p_4, Dp_4) = 671012$, $\lambda_4 = 0.29911$,

Ein größeres Beispiel dieser Art, das auf 106 lineare Gleichungen führ wurde im Institut für angewandte Mathematik der Eidgenössischen Techtschen Hochschule mit Hilfe der programmgesteuerten Zuse-Rechenmaschildurchgeführt. Es handelt sich um folgendes physikalisches Problem:

Auf eine parallelogrammförmige Scheibe, die durch ein Gelenk A und eine endelstütze B gehalten wird, wirkt eine Einzelkraft P in ihrer Mittelebene. an sucht die Spannungen und Verschiebungen.

Um wenigstens eine der numerisch ungünstigen Differentiationen zu verleiden, berechneten wir statt der Airyschen Spannungsfunktion direkt die erschiebungen, indem die diesbezügliche Randwertaufgabe für ein System



n zwei partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe der Differenzenrechnung proximativ gelöst wurde. Die Wahl des eingezeichneten Dreiecksnetzes mit Gitterpunkten (der festgehaltene Punkt A kann weggelassen werden) führt auf 106 lineare Gleichungen vom Typus (1) für die Verschiebungskomponten in Richtung der Koordinatenachsen in den Gitterpunkten. Für den art des n-Schritt-Verfahrens wurden die Verschiebungen als Null angenommund anschließend 90 Rechenzyklen durchgeführt. Nach dem neunzigsten hritt waren die Residuen so klein, daß die Rundungsfehler zu überwiegen gannen und somit abgebrochen werden konnte. (Die Schlußresiduen waren gefähr der 106-te Teil der Ausgangsresiduen.) Infolge der beschränkten Speierkapazität der Maschine dauerte ein Zyklus etwa 2 h 20 m. Die Durch-

rechnung eines zweiten Lastfalles gemäß Formel (74) ergab nur eine angerte herte Lösung, die durch weitere Relaxation verbessert werden mußte. Dies darauf zurückzuführen, daß das konjugierte Funktionensystem der p_i infolder nur fünfstelligen Rechnung zu stark mit Rundungsfehlern behaftet war.

6. Harmonische Gewichtsfunktionen

Es soll hier am speziellen Beispiel des Dirichlet-Problems eine Querverbidung zu den Methoden von Trefftz, Bergmann und Picone¹) hergeste werden, welche darin bestehen, Partikulärlösungen der gegebenen partiellen. Differentialgleichungen zur Lösung von Randwertaufgaben heranzuziehen. Wiebetrachten zu diesem Zweck in einem unendlichen, die ganze Ebene ausfüllend quadratischen Netz Gitterfunktionen p, die in jedem Punkt die Differenze gleichung Dp = 0 erfüllen. Dabei ist D der Operator von Figur 2a. Wir nennetann p eine «differenzharmonische» Funktion. So sind zum Beispiel Real- un Imaginärteil des Ausdrucks

$$\sum_{m+n=k} i^n \begin{pmatrix} 1 & -\binom{n}{2} \\ -\binom{n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\binom{n}{2} \\ -\binom{n}{2} \end{pmatrix}$$

für $k=0,1,2,\ldots$ solche differenzharmonische Gewichtsfunktionen²), die de harmonischen Polynomen bei der Laplaceschen Differentialgleichung entsprichen. (Netz und Koordinatensystem wie in Figur 8; m,n ganze Zahlen $\geq i=$ imaginäre Einheit).

Ist nun etwa unser altes Dirichlet-Problem von Figur 1 vorgelegt, so kan man, ausgehend von der Versuchsfunktion v = 0 als Gewichtsfunktion für direktelaxation, die Werte einer differenzharmonischen Funktion in den 25 inneren Gitterpunkten nehmen. (Am Rande des Grundgebiets und außerhalb desselbei ist die Gewichtsfunktion natürlich gleich Null zu setzen.)

Relaxiert man ausschließlich mit differenzharmonischen Gewichtsfunkti, nen, so können nur Residuen in den Punkten vom Typus Nr. 10 und Nr. 5, all entlang des Randes auftreten; der innere Kern von 3 · 3 Gitterpunkten bleib dauernd frei von Residuen. Dementsprechend braucht man im Beispiel de Figur 1 genau 16 linear unabhängige differenzharmonische Gewichte, um de Problem zu lösen. Mit anderen Worten: Im ursprünglich gegebenen Problem ist die Anzahl der Unbekannten gleich der Zahl der inneren Punkte im Grunden.

¹⁾ E. Trefftz, Konvergenz und Fehlerabschätzung beim Ritzschen Verfahren, Math. Ann. 100, 5 (1928). – S. Bergmann, Punch-card Methods applied to the Solution of the Torsion Problem, Qua appl. Math. 5, 69 (1947). – S. Bergmann und M. Schiffer, Kernel Functions in the Theory Partial Differential Equations of the Elliptic Type, Duke Math. J. 15, 535 (1948). – M. Picon Appunti di Analisi superiore, Rondinelle 1940. – G. Fichera, On some general Integration Methodemployed in Connection with Linear Differential Equations, Pubbl. Ist. naz. Appl. Calcolo, Nr. 2 (1950).

²⁾ Mitteilung von Herrn Dr. H. RUTISHAUSER.

biet (hier 25); die eben entwickelte Relaxationsmethode bewirkt eine Redukon auf 16 Unbekannte (= Zahl der «randnahen» Punkte).

Man kann mit differenzharmonischen Funktionen als Gewichten einzeln und nultan relaxieren und schließlich auch durch den Schwarzschen Orthogonalirungsprozeß ein System von konjugierten differenzharmonischen Gewichtsnktionen herstellen. Diese Methode entspricht der Bildung der Bergmannschen ernfunktion für die Laplacesche Differentialgleichung.

Die Ausgestaltung dieses Ansatzes, der auch im Zusammenhang mit der ch Friedrichs benannten $Transformation^1$) von Variationsproblemen intersant ist, muß weiteren Arbeiten vorbehalten bleiben. Dasselbe gilt von der rwendung von Grandlesungen als Gewichtsfunktionen. (Unter einer Grundsung verstehen wir eine im unendlichen Gitter definierte Funktion p, die in en Gitterpunkten mit Ausnahme eines einzigen «Quellpunktes» differenz-rmonisch ist. Im Quellpunkt soll Dp-1 sein, wobei D wieder der Operator p Figur p ist.)

7. Fehlerabschätzungen

Es soll aus der Größe der Residuen in einer Relaxationsrechnung auf die öße der Fehler in den Unbekannten geschlossen werden, um festzustellen, nn die Relaxation abgebrochen werden kann. Es sei wieder u der Lösungs- xtor, v der Versuchsvektor und r der zugehörige Residuenvektor, so daß nach \mathfrak{h} , (3') gilt

$$Du + l = 0, \quad Dv + l = r.$$
 (76)

Für den Fehlervektor f = v - u hat man also

$$Df = r. (77)$$

r führen nun die Schwarzschen Konstanten2) von f ein:

$$\alpha_{0} = (f, f) ,$$

$$\alpha_{1} = (f, Df) = (f, r) ,$$

$$\alpha_{2} = (f, D^{2}f) = (Df, Df) = (r, r) ,$$

$$\alpha_{3} = (f, D^{2}f) = (Df, D^{2}f) = (r, Dr) ,$$

$$\alpha_{4} = (f, D^{4}f) = (D^{2}f, D^{2}f) = (Dr, Dr) ,$$

$$\dots$$
(78)

¹⁾ Vgl. R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Band 1, 2. Aufl. ringer, Berlin 1931).

²⁾ Vgl. L. Collatz, Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung (Akademische Vergesellschaft Leipzig, 1945), 4. Kapitel, § 12.

Ferner die Schwarzschen Quotienten

$$\sigma_k = \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$$
, $(k \geq 0, 1, 2, \ldots)$

welche bekanntlich eine monoton wachsende Folge bilden. Das geometrisc Mittel zwischen σ_0 und σ_1 beträgt

$$\sigma_{1/2} = \sqrt{\sigma_0 \, \sigma_1} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}} = \sqrt{\frac{(r, r)}{(f, f)}} . \tag{5}$$

Führen wir noch den mittleren quadratischen Fehler

$$\delta = \sqrt{\frac{(f,f)}{n}}$$

und das mittlere quadratische Residuum $\varrho - V(r, r)/n$ ein, so gilt also

$$\delta = \frac{\varrho}{\sigma_{1/2}}$$
 (§

Auf dieser Formel beruhen alle Fehlerabschätzungen. So folgt zum Beispaus der erwähnten Monotonität

$$\sigma_{1/2} \le \sigma_1 \le \sigma_2 = \frac{(r, Dr)}{(r, r)} = R(r) \tag{5}$$

wobei R den Rayleighschen Quotienten bedeutet (vgl. Abschnitt 4). Daher

$$\delta \geq \frac{\varrho}{R(r)}$$
 . (8)

Ferner

$$\sigma_{1/2} \geq \sigma_0 = rac{(f,\, Df)}{(f,\, f)} - R(f) \geqq \mu_1$$
 ,

wenn μ_1 den kleinsten Eigenwert des Problems $Dx = \mu x$ oder der quadratischt Form Q(x) bedeutet. Somit

$$\delta \leq \frac{\varrho}{\mu_1}$$
 (4

Aus (83) lernen wir folgende wichtige

Regel: Um eine Relaxationsrechnung günstig abzuschließen, muß die wie bleibende Residuenverteilung einen möglichst hohen Rayleighschen Quotien haben, das heißt wie der höchste Eigenvektor aussehen.

Beim Dirichlet-Problem bedeutet das, daß die Vorzeichen der verbleibend Residuen schachbrettartig abwechseln sollten (vgl. Abschnitt 4). Hört man reinem Käfig auf, überwiegt also etwa das positive Vorzeichen in der Residue rteilung, so können grobe Irrtümer entstehen, indem dann nach (83) δ um nige Zehnerpotenzen größer sein kann als ϱ . Ähnliches gilt für die biharmonichen Probleme der Airyschen Spannungsfunktion.

Die Abschätzung (84) ist in der Praxis meistens unbrauchbar. Erstens weiß un bei komplizierten Problemen zu wenig über u_1 , und zweitens berücksicht (84) nicht die Gestalt der Residuenverteilung, ist also auf den schlimmsten ill des ausgeprägten Käfigs zugeschnitten und gibt daher meistens ein entatigendes Resultat.

Um eine etwas bessere Information als (83) über δ zu erhalten, kann man gendermaßen vorgehen. Man bildet außer $\sigma_2 = R(r)$ auch noch

$$\sigma_3 = rac{D_{i,j}D_{i,j}}{(i,D_{i,j})}$$

d berechnet dann angenähert $\sigma_{1|2}$ durch logarithmische Extrapolation aus und σ_3 :

$$\log \sigma_{1/2} \cong \log \sigma_2 - \frac{3}{2} \left(\log \sigma_3 - \log \sigma_2 \right). \tag{85}$$

ch mit dieser Formel wird der Fehler meistens noch unterschätzt. Hingegen tin (83) das Gleichheitszeichen, wenn rirgendein Eigenvektor ist, weil dann Schwarzschen Quotienten gleich dem zugehörigen Eigenwert sind. Beim Schritt-Verfahren von Abschnitt 5 kann man die Schwarzschen Quotienten ein aus den Zahlen λ_k , ε_k berechnen.

Summary

The general outlines of the so-called relaxation technique are developed. By laxation" is meant every "step-by-step procedure" for solving systems of lar equations based on minimizing quadratic forms. After a short discussion of littial methods developed by Southwell and his school, allowing full leeway to intuition of the computing person, the general mathematical background is lited. § 3, 4 are the central parts of the paper. After a study of the gradient who dit is shown that relaxation methods are not necessarily successive approxiations taking an infinite number of steps but that it is possible to speed up evergence such that the desired result is reached in a finite number of steps. The semethods may be suitable for use on sequence-controlled computing machines, recial consideration is given to the well-known fact that relaxation very quickly bothes the trial function but that it may be a combersome task to get rid of remaining smooth residual distribution.

gegangen: 14. 7. 1951.)

Unsteady Flows with Free Boundaries')

By DAVID GILBARG, Bloomington, Ind., U.S.A.2)

Unsteady flows with tree boundaries are of interest in the theory of unde water cavity formation. Mathematically they present a generalization of the now classical Helmholtz problem of conformal mapping. The time dependent character of the flows introduces two difficulties beyond those already apparer in the stationary flow problem; namely, (1) the unsteady form of Bernoulle equation replaces the much simpler condition of constant flow speed as the kinematic boundary condition on the constant pressure surface (free bound ary); and (2) the free boundary, being a material line, is generally not a stream line. The effect of these difficulties is to place the exact solution of the unstead free boundary problem beyond the realm of present techniques. However, is shown here, we can achieve considerable mathematical simplification, wit out doing great violence to the physical problem, by replacing the requirement that the free boundary be a material line with the approximating condition that it be a streamline. It is physically reasonable, at least for not too rapid varying flows, that this model of the unsteady cavity should yield results substantial agreement with the exact theory. We shall see that the unstead flow problem, thus modified, is not essentially more difficult than the statio ary free boundary problem³), and, as regards flows past polygonal obstacle that it can be solved completely by standard conformal mapping technique

Von Kármán⁴) has exhibited an explicit example of a symmetric unstead flow with finite closed wake (or cavity) behind a flat plate. We intend here solve in detail (subject to the above modification) the problem proposed him of determining all symmetric unsteady flows with finite closed cavibehind a flat plate, and more generally, behind any symmetrical polygor Among the solutions thus obtained will be a class of flows with constant cavishape (of which von Kármán's example is a particular case), for which therefore, the present model and the exact theory coincide. To solution of the asymmetric flow problem, which is more difficult only in detained not in principle, is briefly indicated here.

¹⁾ Prepared under Navy Contract with Indiana University.

²⁾ Graduate Institute for Applied Mathematics, Indiana University.

³) For this see, e.g., L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics* (Macmillan, N. York 1938), Chapter 12.

⁴⁾ Von Karman, Ann. Mat. pura appl. [4] 29, 247-249 (1949).

Finite cavity flow past a flat plate

Consider the problem of symmetric finite closed cavity behind a stationary plate. Let the flow be described by a complex velocity potential,

$$w(z, t) = \varphi(x, y, t) + i \psi(x, y, t), \qquad (z = x + i y, t = time),$$

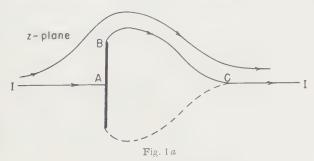
hich is assumed to have the properties:

- (i) $\lim_{z \to \infty} w' = U(t)$, $(w' \equiv \partial w/\partial z)$;
- $w' \neq 0$ in the interior of the flow region (i.e., there are no stagnation ints in the interior of the flow);
- i (iii) free boundaries, on which pressure is constant, separate from the ends of the flat plate and meet to enclose with the plate a finite region (the cavity) gare 1a); the potential α is defined in the entire α plane outside this region;
- (iv) the free boundaries are streamlines, namely curves on which $\psi(x, y, t)$ econst.

On the free streamlines, Bernoulli's equation takes the form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |w'|^2 = c(t). \tag{1}$$

most applications, $c(t) = U^2/2 + p_\infty - p_c$, where p_∞ and p_c are the static d cavity pressures, respectively (assumed to be either constant or known actions of time only). Equation (1) for nonstationary flows replaces the addition, $p_\alpha' - const$ on free streamlines, for the classical steady flow problem. Because of the postulated symmetry we need consider only the upper half the flow plane, and corresponding to it, the upper half-plane of the complex



Finite cavity behind a flat plate.

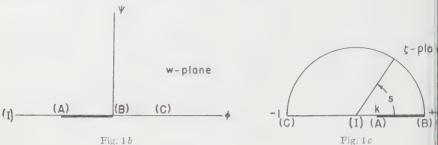
ential, w. If I represents the point at infinity in the physical plane, A the ignation point on the plate, B the upper edge of the plate, and C the terminus (the free streamlines (figure 1a), then the dividing streamline IABCI maps to the real (φ) -axis of the w-plane (figure 1b); the points w_A , w_B , w_C , vary

with t in general, although any one of them, say w_B , may be taken equal zero for all time.

Let now

$$w = \alpha(t) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right],$$
 $(\alpha > 0)$

define a mapping of the upper half unit circle, $|\zeta| \leq 1$, Im $\zeta \geq 0$ (figure 1



Plane of the complex velocity potential w.

Plane of the auxiliary variable ζ

into the closed upper half α -plane, $\operatorname{Im} \alpha \geq 0$. Under this mapping we have the correspondence, for a suitable value of α at each t,

$$\begin{split} \zeta &= 0 \longleftrightarrow w_I = \infty, \quad w_B = 0 \longleftrightarrow \zeta = 1, \quad w_C \longleftrightarrow \zeta = -1, \\ w_A \longleftrightarrow \zeta = k \; (= \text{a real number, } 0 < k < 1) \; ; \end{split}$$

the free streamline BC is the image under (2) of the semicircle, $|\zeta|=1$. We define,

$$\omega(\zeta) = \log w' = \log |w'| - i \theta,$$

where θ is the inclination of the streamline through the point z at time ℓ , the real ζ -axis, $\theta = 0$ for $-1 \le \zeta < k$, $\theta = \pi/2$ for $k < \zeta \le 1$. Hence to function,

$$f(\zeta) = \omega(\zeta) - \log\left(\frac{k - \zeta}{1 - k \zeta}\right)^{1/2}$$

is analytic in the ζ half-circle (recall $w' \neq 0$), and real and continuous on treal axis. By Schwarzian reflection $f(\zeta)$ can therefore be defined in the funit circle $|\zeta| \leq 1$. On $|\zeta| = 1$, we have by (1),

$$\operatorname{Re} f(\zeta) = \operatorname{Re} \omega(\zeta) = \log |w'|$$

$$= \frac{1}{2} \log \left\{ -2 \alpha'(t) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right] + 2 c(t) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \log \left\{ A(t) + B(t) \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right\}, \qquad (|\zeta| = 1)$$

iere

$$A(t) = -2 \alpha'(t) + 2 c(t), \quad B(t) = \alpha'(t).$$

tice $f(\zeta)$ for $|\zeta| < 1$ is uniquely determined by its real part on $|\zeta| = 1$, it fixes to find an analytic function $g(\zeta)$ with the properties: (a) $|g(\zeta)| - 1$ $|\zeta| = 1$; (b) $h(\zeta) \equiv g(\zeta) [A\zeta + B(\zeta^2 + 1)]$ is regular for $|\zeta| < 1$, without os or poles; (c) $h(\zeta)$ is positive for ζ real. For, given such a function $g(\zeta)$, if follows by (3) that $\log h(\zeta)/2$ has the same real part on $|\zeta| = 1$ as $f(\zeta)$, is jular for $|\zeta| < 1$ and real for ζ real, and hence

$$f(\zeta) = \frac{1}{2} \log \{ g(\zeta) [A \zeta + B(\zeta^2 + 1)] \}.$$

The function $\zeta(\zeta)$ is easily determined. Let ζ_0 be a zero of the quadratic $\zeta^2 + 1 + A(\zeta) = 0$, with $|\zeta_0| \leq 1$ (the case B = 0 is obviously degenerate 1 of no interest). We consider the two possibilities,

I:
$$|\zeta_0| < 1$$
, II: $|\zeta_0| - 1$.

Case I: If $|\zeta_0| < 1$, then $\zeta_0 = \varrho$, a real number; the function $g(\zeta)$ satisfying liditions (a) and (b) above must map the unit circle into its exterior and ζ_0 a simple pole at $\zeta = \zeta_0 = \varrho$; thus $g(\zeta)$ is of the form $e^{i\lambda}(\varrho \zeta - 1)/(\zeta - \varrho)$. satisfy (c), $h(\zeta) = B(\zeta - 1/\varrho)$ ($\varrho \zeta - 1$) $e^{i\lambda}$ is real and positive for ζ real if |1 only if $Be^{i\lambda}/\varrho$ is real and positive; hence $e^{i\lambda} = \text{sign}(B/\varrho)$, and thus

$$f(\zeta) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{B}{\varrho} \left[(1 - \varrho \zeta)^2 \right] \right]. \tag{4}$$

Case II: If $|\zeta_0| = 1$, $\zeta_0 = e^{i\beta}$, and since $h(\zeta) = B(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_0)(\zeta)$ it lows that $g(\zeta) = \text{sign } B$ satisfies conditions (a) to (c), and

$$f(\zeta) = \frac{1}{2} \log \{ |B| (\zeta^2 - 2 \zeta \cos \beta + 1) \}.$$
 (5)

From the above, we have, therefore, in case I,

$$-\mathbf{a}^{\prime} = \frac{B}{\varrho}^{-1/2} \left(1 - \varrho \xi\right) \left(\frac{k}{1} - \frac{\xi}{k} \xi\right)^{1/2}$$

 \mathbb{H} , since w'(0) = U, then $|B| = U^2 |\varrho|/k$, and

(Case I)
$$w' = U(1 - \varrho \zeta) \left(\frac{1 - \zeta/k}{1 - k \zeta}\right)^{1/2}$$
. (6)

milarly, in case II, $|B| = U^2/k$, and

(Case II)
$$w' = U(\zeta^2 - 2\zeta\cos\beta + 1)^{1/2} \left(\frac{1 - \zeta/k}{1 - k\zeta}\right)^{1/2}$$
. (7)

(6), (7) one obtains readily,

To determine k and α , and from these the entire flow, it remains only satisfy the conditions that z_C lie on the real axis, and to fix the mappings that $z_B - h$ i, h being the half-width of the plate. The former condition require that $z(\zeta)$ be single-valued in the neighborhood of $\zeta \to 0$ ($z \to \infty$ in the physic plane), or, in other words, that the residue of $dz/d\zeta = 0$ at $\zeta = 0$. From (

(Case I)
$$k - \frac{1}{k} = 2 \, \varrho$$
, (Case II) $k - \frac{1}{k} = 2 \cos \beta$.

In both cases, we have therefore $-1 \le \varrho$, $\cos \beta < 0$, and $\sqrt{2} - 1 \le k < 1$. The remaining condition states,

$$h \ i = \int_{k}^{1} \frac{dz}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dz} \ dz$$

$$(Case I) = \left(\frac{i\alpha}{l}\right) \int_{k}^{1} \frac{1 - z^{2}}{z^{2} (1 - \varrho z)} \left(\frac{1 - k z}{z k - 1}\right)^{1/2} dz = \left(\frac{i\alpha}{l}\right) F_{1}(k).$$

$$\left[\varrho - \frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{k}\right)\right]$$

$$\left[(Case II) = \left(\frac{i\alpha}{l}\right) \int_{k}^{1} z^{2} (1 - 2z \cos \beta - z^{2})^{1/2} \left(\frac{1 - k z}{z k - 1}\right)^{1/2} dz - \left(\frac{i\alpha}{l}\right) F_{2}(k).$$

$$\left[\cos \beta - \frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{k}\right)\right]$$

Both $F_1(k)$ and $F_2(k)$ are expressible in terms of elementary functions. I unknown parameter k is now determined within a constant (its initial value in terms of U(t) after elimination of α from the relations,

(Case I)
$$\alpha = \frac{Uh}{F_1(k)}$$
, $\left|\frac{d\alpha}{dt}\right| = |B| = -\frac{U^2\varrho}{k} = \frac{1}{2} U^2 \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)$. (Case II) $\alpha = \frac{Uh}{F_2(k)}$, $\left|\frac{d\alpha}{dt}\right| = |B| \frac{U^2}{k}$.

With the determination of k and hence α , the flow is given to within quadrature by (2) in conjunction with (6) or (7).

To summarize: the symmetric unsteady flows with finite cavity behind a plate of width 2 h are given in parametric form by

(Case I)
$$\begin{cases} w = \frac{Uh}{F_1(k)} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right], \\ \frac{dw}{dz} = U(1 - \varrho \zeta) \left(\frac{1 - \zeta/k}{1 - k \zeta} \right)^{1/2}, \quad \left[\varrho = \frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{k} \right) \right]; \end{cases}$$

$$\text{ase II)} \left\{ \begin{array}{ll} w & \frac{l \cdot k}{F_2(k)} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{z} - \frac{1}{z} \right) \right], \\ \frac{dw}{dz} = U \left(\xi^2 - 2 \cdot \xi \cos \beta + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \xi/k}{1 - k \cdot \xi} \right)^{1/2}, \left[\cos \beta = \frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{k} \right) \right]; \end{array} \right.$$

were $\sqrt{2-1} \le k < 1$, $F_1(k)$, $F_2(k)$ are given by (8), (9), respectively, and

ase I)
$$\left| \frac{d}{dt} \cdot \frac{Uh}{F_1(k)} \right| = \frac{1}{2} U^2 \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right),$$
ase II)
$$\left| \frac{d}{dt} \cdot \frac{Uh}{F_2(k)} \right| = \frac{U^2}{k}.$$

re equation of the free boundary is given by:

$$z = -i h \frac{F_{1,2}(e^{is})}{F_{1,2}(k)}$$
 (0 \le s \le \pi)

Cavities with constant shape. The unsteady flows whose free boundaries are constant shape are given exactly by this model, since for such flows the free teamlines are also material lines. We have from the preceding that these flows the characterized by the condition k = const. From (10) it follows

$$U = \frac{U_0}{1 + U_0 g(k) t/h}, \quad \left[g(k) = \frac{1}{2} F_1(k) \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) \right] \quad (12)$$

• sign in the denominator being opposite that of dz/dt (= B) and of dU/dt. The particular flow for which $\varrho = -1$, $k = \sqrt{2} - 1$, and the sign in (12) is gative, is the example given by von Kármán¹). We note, contrary to his algebraic that this flow is only one of a class of flows with constant cavity. Initially, such a class can be constructed based on (11).

Shape of the cavity. From the fact that $\theta = -\arg w' = 0$ at $\zeta = -1$ if -1 in (6) we conclude that the cavity shapes defined by the above flows we cusps at the rear. In the instance $\varrho = -1$ in (6) and $\beta = \pi$ in (7) the which is that given by von Kármán), has a stagnation point in the rear of is of constant shape.

For general flows of type II an examination of formula (7) shows that $-\operatorname{Im}\log w'$ is a decreasing function of s (= $\arg \zeta$) on $|\zeta| = 1$, except at β where θ makes a jump increase of $\pi/2$; since θ has initial value $\pi/2$ at 0 and final value 0 at $s-\pi$ it follows that the free streamlines must at the point cross the axis of symmetry of the flow. Thus the complete flow planest contain a doubly covered subregion (figure 2), from which it appears it flows of type II are physically unrealistic.

¹ Yon Karman, Ann. Mat. pura appl. [4] 29, 247-249 (1949).

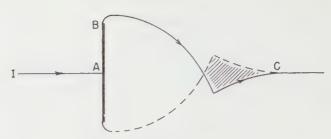


Fig. 2

Flow of type II, showing doubly covered flow region.

Similarly, one observes from (6) that

$$\theta(s) = -\operatorname{Im}\log w' \Big|_{\zeta = e^{is}} = \arctan \frac{\varrho \sin s}{1 - \varrho \cos s} - \operatorname{arg}\log \left(\frac{k - \zeta}{1 - k \zeta}\right)^{1/2},$$

$$(0 \le s \le \pi)$$

Simple computation shows that $\theta''(s) > 0$ for $0 < s < \pi$, and since θ has minimum value (< 0) in $0 \le s \le \pi$, the free streamline must be an arc with one point of inflection, lying entirely above the axis of symmetry of the flow (figure 1a). This is the characteristic shape of the cavity for the flows of type behind a flat plate.

Arbitrary polygonal obstacles

The preceding results can be extended easily to include arbitrary symmetry polygonal obstacles, and with some additional formal complication, also asymmetric polygonal obstacles. We outline these extensions briefly.

Consider the upper half of a polygonal obstacle which is symmetric will respect to the x-axis, the direction of the flow. Let the angle between the axis of the flow and the face of the obstacle along which it divides be $\alpha_0 \pi$, and the vertex angles of the polygon, $\alpha_i \pi$ (i=1, ..., n-1; n= number of faces where the angles taken are those facing the interior of the flow. Then the same considerations as for the flat plate lead to the following analytic description of the flow:

$$w = \alpha(t) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right], \quad (\alpha > 0)$$

$$\frac{dw}{dz} = U(1 - \varrho \zeta) \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1 - \zeta/k_i}{1 - k_i \zeta} \right)^{1 - \alpha_i}$$

$$|\zeta| \le 1, \quad \text{Im } \zeta \ge 0; \quad (1)$$

(only flows of type I are considered, for sake of brevity). The parameter α , k_i , ϱ are determined as before from the conditions that the residue $dz/d\zeta = 0$ at $\zeta = 0$, and that the vertices of the polygon are at assigned point

 $i=0,\,1,\,\ldots,\,n$) in the z-plane. The former condition gives readily

$$\varrho = \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \alpha_i) \left(k_i - \frac{1}{k_i} \right).$$
 (14)

we introduce the function $F(\zeta)$, defined by the indefinite integral

$$F(\zeta) = \int_{-\zeta}^{\zeta} \frac{1-\zeta^2}{\zeta^2 \left(1-\varrho \, \zeta\right)} \, \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1-k_i \, \zeta}{1-\zeta/k_i}\right)^{1-\alpha_i} \, d\zeta,$$

in the second of the above conditions gives,

$$z = \frac{\pi}{I^*} [F(k_i) - F(k_0)], \quad (i = 0, 1, ..., n; k_n = 1)$$
 (15)

conditions .14) and (15), combined with the relation,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{U^2 \varrho}{\prod_{i=0}^{n-1} k_i^{2(1-\alpha_i)}},$$

ch is obtained in the process of derivation of (13), suffice to determine the ratities, α , ϱ , k_i (i = 0, 1, ..., n - 1), as functions of t once their initial less are given. Their numerical determination is of course a formidable polem of calculation in general.

The problem of cavity shape is somewhat more complicated in general than the simple case of the flat plate, and we forego the discussion here.

Concerning the asymmetric flow problem, we make only the following brief barks. It is now necessary to consider the entire flow plane, and its image the w-plane. The latter is simply the full w-plane slit along a segment of the a axis; the two edges of the slit correspond to the boundary of the flow on, that is, obstacle plus free streamlines, each edge corresponding to one two streamline arcs into which the dividing streamline separates on the endary. A mapping of the form

$$w = \frac{\alpha}{1 + \beta^2 [\cos s_0 - (\zeta + 1/\zeta)/2]^2}$$
 (16)

re α , β are real (functions of t) and $0 < s_0(t) < \pi$, takes the upper half circle $|\zeta| \le 1$, Im $\zeta \ge 0$, into the w-plane, the semicircle $|\zeta| = 1$ coronding to the free boundary under the mapping, and the real axis to the 1 boundary; the point at infinity is an interior point of the mapping. The ping (16) replaces (2) in the analysis of the asymmetric flow problem. Now wing a line of argument similar to that in the symmetric case, and deviating

only in the details rather than in basic method, we arrive at a (more complication formula for a analogous to (13), with appropriate side conditions to determine the parameters of the problem. However, we omit the formal details here.

In conclusion, the author wishes to acknowledge the able assistance contributions of James Serrin in this work.

Zusammenfassung

Instationäre Strömungen mit endlich begrenztem Hohlraum hinter vieleckt. Hindernissen werden unter der Voraussetzung, daß freie Ränder Stromlinien strottet. Das mathematische Problem wird in expliziter Form nach dem lichen Verfahren der konformen Abbildung gelöst und zeigt nicht wesentlich in Schwierigkeiten als das klassische Problem der freien Ränder für stationäre Stimungen. Die Form des Hohlraums für symmetrische Strömungen hinter einen Platte wird diskutiert, und Strömungen mit konstant bleibendem Horaum werden mit expliziten Formeln näher umschrieben.

(Received: April 9, 1951).

Sur la thermodynamique des processus irréversibles

Par Kyrille Popoff, Sofia1)

Introduction

Onsager²) a esquissé les fondements d'une théorie des processus irréresibles basée sur la théorie des probabilités. Casimir³), de Groot⁴) et d'au ront repris et développé cette théorie. Les phénomènes irréversibles s'exprime en première approximation, par des relations phénoménologiques du type

$$J_i = \sum_k L_{ik} X_k;$$

on établit, en se basant sur la théorie des probabilités, qu'on a $L_{ik} = L_{ki}$. Parriver à ce résultat, on considère la marche des processus thermodynamiques dans un système adiabatiquement isolé, au voisinage de l'état stable. Soi $\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_r$ les paramètres définissant l'état du système, $S(\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_r)$ l'entropie du système à un moment donné t et $\xi_1^0, \, \xi_2^0, \, \ldots, \, \xi_r^0$ les valeurs de paramètres au moment t = 0, correspondant à l'état stable, défini par

¹⁾ Institut de Mathématiques à l'Université de Sofia.

L. Onsager, Reciprocal Relations in Irreversible Processes, Phys. Rev. 37, 405-426 (1938), 2265-2279 (1931).

³) H. B. C. Casimir, On Onsager's Principle of Microscopic Reversibility, Rev. modern Phys. 343-350 (1945); Philips Res. Rep. 1, 185 (1946).

⁴) S. R. de Groot, *Thermodynamics of Irreversible Processes* (North-Holland Publishing C. pany, Amsterdam, 1951).

ximum de S. On a pour la variation ΔS de l'entropie

$$\Delta S = S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) - S(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_r^0)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 S_0}{\partial \xi_i} (\xi_i - \xi_i^0) (\xi_k - \xi_k^0) = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik} x_i x_k,$$
(1)

l'on a mis

$$x_i = \xi_i - \xi_i^0 \ .$$

coefficients $\xi_1 = \partial^2 S_0 (\partial \xi_1 \partial \xi_2)$ désignant les dérivées secondes de S pour $\{\xi_2^0, \ldots, \xi_r^0\}$ on a par conséquent $g_{ik} = g_{ki}$.

De l'équation (1) on tire d'abord

$$\delta(\Delta S) = -\sum_{i,k} g_{ik} x_i \, \delta x_k \tag{2}$$

nsuite, en introduisant les dérivées généralisées¹) par rapport à t

$$-1S = -\sum_{k} g_{ik} x_i \hat{x}_k . \tag{3}$$

:Les équations (2) et (3) peuvent être mises sous la forme

$$\delta(\Delta S) = \sum_{k} X_{k} \, \delta x_{k} \,, \tag{4}$$

$$\Delta \dot{S} = \sum_{k} X_k \, \dot{x}_k \tag{5}$$

$$X_k = \frac{\partial (\varDelta S)}{\partial x_k} \, .$$

Onsager et de Groot appellent les dérivées généralisées $\hat{x_k}$ des «flux» els désignent par J_k , les X_k — des «forces» et posent

$$J_i = \sum_k L_{ik} X_k \,. \tag{6}$$

D'après l'équation (4), $\delta(\Delta S)$ peut être interprété comme le travail des es X_k correspondant aux déplacements respectifs δx_k . Dans ce qui suit, es montrons qu'en considérant les X_k comme des forces Newtoniennes, c'estre en partant des équations

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = X_k, \qquad (k = 1, 2, \dots, r)$$
 (7)

KYRILLE POPOFF, Sur une extension de la notion de dérivée, C. r. Acad. Sci. Paris 206, 1440 à (1938); 207, 110-112 (1938); 209, 472-474, 668-670 (1939); Über die verallgemeinerten Ableitund Abh. Preuß. Akad. Wiss., math.-naturw. Klasse Nr. 2 (1942); Sur une extension de la notion de dée, Mh. Math. Phys. 51, 115-152 (1944).

on arrive aux relations phénoménologiques

$$J_i = \sum_k L_{ik} \, X_k$$

avec

$$L_{ik}=L_{ki}.$$

Pour arriver à ce résultat, il n'est pas nécessaire de limiter ses considératic au voisinage de l'état stable du système. Nous admettons d'une manière pgénérale que le moment t=0 correspond à un moment quelconque et c par conséquent, on a, avec une approximation suffisante, adoptée par ONSAG DE GROOT et d'autres,

$$1S = -\sum_{k} g_{k} x_{k} - \frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik} x_{i} x_{k},$$

avec

$$g_{ik} = g_{ki}$$
.

Cette généralisation s'impose par le fait que les équations d'Onsager et de Groot, étant linéaires, correspondent à la valeur infinie du temps t de l'édéquilibre qu'elles définissent.

Etablissement des relations phénoménologiques

En partant de (8), posons à l'instar d'Onsager et de de Groot

$$X_k = \frac{\partial (\varDelta S)}{\partial x_k} = -g_k - \sum_i g_{ik} \; x_i \; , \label{eq:Xk}$$

ce qui donne aussi dans le cas général

$$\delta(\Delta S) = \sum_k X_k \, \delta x_k \,, \quad \Delta \dot{S} = \sum_k X_k \, \dot{x}_k \,.$$

Des équations

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = X_k$$

l'on tire, en multipliant par $x_k' = \dot{x}_k - dx_k/dt$,

$$\sum_k x_k' \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \sum_k X_k x_k' = \frac{d(\Delta S)}{dt},$$

et par conséquent

$$x_1^{\prime 2} - x_2^{\prime 2} + \dots - x_r^{\prime 2} = .1S + C$$
,

C désignant une constante d'intégration. L'équation (11) exprime ainsi une analogue à la loi de conservation de l'énergie.

Après cette remarque préliminaire admettons, pour ne pas compliq inutilement l'exposition, r=2 et posons $x_1=x,\ x_2=y,\ X_1=X,\ X_2=y$

aura à considérer ainsi le système d'équations différentielles, avec une iture un peu changée,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = l + a x + b y = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = m + b x + c y = Y, \quad (12)$$

i, a, b, c étant des constantes, correspondant aux valeurs des dérivées preres et secondes de S au moment t = 0.

De ces équations, on tire d'abord, en omettant les constantes d'intégration. [ui revient à ce que les forces nulles correspondent aux flux nuls,

$$\frac{dx}{dt} = l t + a \int x dt + b \int y dt,$$

en intégrant par partie,

$$\frac{dx}{dt} = (l + a x + b y) t - a \int t \frac{dx}{dt} dt - b \int t \frac{dy}{dt} dt.$$

Une nouvelle intégration par partie donne

$$\left(1 + \frac{a}{2}t^2\right) \frac{dx}{dt} + \frac{b}{2}t^2 \frac{dy}{dt} = Xt + \frac{a}{2} \int t^2 \frac{d^2x}{dt^2} dt + \frac{b}{2} \int t^2 \frac{d^2x}{dt^2} dt.$$

En substituant sous les signes d'intégrale aux dérivées secondes de x et y s valeurs respectives X et Y et en intégrant par partie, on obtient

En substituant aux dérivées de X et de Y leurs valeurs tirées de (12), es une nouvelle intégration par partie et des simplifications évidentes, on a

$$\begin{vmatrix} a & t^2 & a^2 + b^2 & t^4 \end{vmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} b & t^2 & b & (a+c) & t^4 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} t & a & t^3 \end{pmatrix} X$$

$$\begin{vmatrix} b & t^3 & Y + a \\ -\frac{b}{3!} & t^3 & Y + \frac{a}{4!} & \int t^4 \left(a & \frac{d^2x}{dt^2} + b & \frac{d^2y}{dt^2} \right) dt + \frac{b}{4!} & \int t^4 \left(b & \frac{d^2x}{dt^2} + c & \frac{d^2y}{dt^2} \right) dt .$$

En substituant de nouveau aux dérivées secondes de x et de y leurs valeurs les de (12), on obtient

$$\begin{pmatrix}
1 + \frac{a}{2!} t^2 + \frac{a^2 + b^2}{4!} t^4 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} + \begin{pmatrix} b \\ 2! t^2 + \frac{b(a+c)}{4!} t^4 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\
= \begin{pmatrix} t + \frac{a}{3!} t^3 + \frac{a^2 + b^2}{5!} t^5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} b \\ 3! t^3 & b(a+c) \\ 5! & 5! \end{pmatrix} Y \\
- \frac{a^2 + b^2}{5!} \int t^5 \frac{dX}{dt} dt - \frac{b(a+c)}{5!} \int t^5 \frac{dY}{dt} dt
\end{pmatrix} (13a)$$

nsi de suite, l'itération pouvant être poussée à l'infinie.

Par un procédé analogue, en partant de la seconde des équations (12), obtient de même

$$\begin{pmatrix}
\frac{b}{2!} & t^2 + \frac{b}{4!} & (a+c) & t^4
\end{pmatrix} \frac{dx}{dt} + \left(1 + \frac{c}{2!} & t^2 + \frac{b^2 + c^2}{4!} & t^4
\end{pmatrix} \frac{dy}{dt}
= \left(\frac{b}{3!} & t^3 + \frac{b}{5!} & (a+c) & t^5
\end{pmatrix} X + \left(t + \frac{c}{3!} & t^3 + \frac{b^2 + c^2}{5!} & t^5
\end{pmatrix} Y
- \frac{b}{5!} & \int t^5 & \frac{dX}{dt} & dt - \frac{b^2 + c^2}{5!} & \int t^5 & \frac{dY}{dt} & dt .$$
(1)

L'étude de la convergence des séries

Nous allons montrer que les séries qui figurent dans ces développemes sont convergentes pour toutes les valeurs de la variable t et que les intégradans les dernières lignes des équations (13a) et (13b) tendent vers zéro lorsqui pousse l'itération à l'infini. Pour cela, il n'y a qu'à considérer le système d'équations majorantes

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\not p\;(1+x+y)=X\;,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\not p\;(1+x+y)=Y\;,$$

où ϕ est le plus grand des nombres |a|, |b|, |c|.

En suivant la méthode du numéro précédent, on a d'abord

$$\begin{split} \frac{dx}{dt} &= \oint \int \left(1 + x + y\right) \, dt = t \oint \left(1 + x + y\right) - \oint \int t \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) \, dt \\ &= t \, X - \frac{p}{2} \, t^2 \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) + \frac{p}{2} \int t^2 \left(X + Y\right) \, dt \; , \end{split}$$

d'où

$$(1 - \frac{p}{2}t^2) \frac{dx}{dt} + \frac{p}{2}t^2 \frac{dy}{dt} = \left(t + \frac{p}{3!}t^3\right)X + \frac{p}{3!}t^3Y$$

$$- \frac{p}{3!} \int t^3 \left(\frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt}\right) dt .$$

En substituant aux dérivées de X et de Y leurs expressions au moyen dérivées de x et de y, tirées de (14), on a

$$\left(1 + \frac{p}{2}t^{2}\right) \frac{dx}{dt} + \frac{p}{2}t^{2} \frac{dy}{dt} = \left(t + \frac{p}{3!}t^{3}\right)X + \frac{p}{3!}t^{3}Y - \frac{2p^{2}}{3!} \int t^{3} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) dt$$

et, d'une manière générale, le procédé d'itération donne

$$\vdash \frac{p}{2!} t^{2} + \frac{2}{4!} \frac{p^{2}}{t^{4}} + \frac{2^{2}}{6!} \frac{p^{3}}{t^{6}} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2n)!} \frac{p^{n}}{t^{2n}} t^{2n} \right) \frac{dx}{dt}$$

$$\vdash \left(\frac{p}{2!} t^{2} + \frac{2}{4!} \frac{p^{2}}{t^{4}} + \frac{2^{2}}{6!} \frac{p^{3}}{t^{6}} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2n)!} \frac{p^{n}}{t^{2n}} \right) \frac{dy}{dt}$$

$$\cdot \left(t + \frac{p}{3!} t^{3} + \frac{2}{5!} \frac{p^{2}}{t^{5}} + \cdots + \frac{2^{n-2}}{(2n-1)!} \frac{p^{n-1}}{t^{2n-1}} \right) X$$

$$- \left(\frac{p}{3!} \frac{t^{3}}{t^{3}} + \frac{2}{5!} \frac{p^{2}}{t^{5}} + \cdots + \frac{2^{n-2}}{(2n-1)!} \frac{p^{n-1}}{t^{2n-1}} \right) Y + \frac{2^{n-1}}{(2n)!} \int t^{2n} (X + Y) dt.$$

On a ici, l'intégrale étant prise entre des limites finies,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{n-1} p^n}{(2n)!} \int t^{2n} (X + Y) dt = 0.$$

D'autre part, la limite du rapport des termes de rang (n + 1) aux termes ang n tendant vers zéro avec 1 n, quel que soit t, les séries qui figurent comme ficients de dx/dt, dy/dt, X et Y sont convergentes et d'une convergence de pour toutes les valeurs de t. A fortiori les coefficients correspondants ; les formules 13a et (13b) convergent pour toutes les valeurs de t, et on a

$$A \frac{dx}{dt} + B \frac{dy}{dt} = \alpha X + \beta Y, \quad B \frac{dx}{dt} + C \frac{dy}{dt} = \beta X + \gamma Y, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix}
1 + \frac{a}{2!} t^2 + \frac{a^2 + b^2}{4!} t^4 + \cdots, & \alpha = t + \frac{a}{3!} t^3 + \frac{a^2 + b^2}{5!} t^5 + \cdots, \\
\frac{b}{2!} t^2 + \frac{b(a+c)}{4!} t^4 + \cdots, & \beta = \frac{b}{3!} t^3 + \frac{b(a+c)}{5!} t^5 + \cdots, \\
1 + \frac{c}{2!} t^2 + \frac{b^2 + c^2}{4!} t^4 + \cdots, & \gamma = t + \frac{c}{3!} t^3 + \frac{b^2 + c^2}{5!} t^5 + \cdots.
\end{bmatrix} (16)$$

réquations (15) donnent enfin

$$J_1 = \frac{dx}{dt} = L_{11} X + L_{12} X$$
, $J_2 = \frac{dy}{dt} = L_{21} X + L_{22} Y$, (17)

$$-\frac{C\alpha + B\beta}{AC - B^2}, \quad L_{12} = \frac{C\beta - B\gamma}{AC - B^2}, \quad L_{21} = \frac{A\beta - B\alpha}{AC - B^2}, \quad L_{22} = \frac{A\gamma - B\beta}{AC - B}. \quad (18)$$

Dbservons d'abord que l'on a

$$AC - B^2 = 1 + \frac{a + c}{2!} t^2 + \cdots$$

Pour montrer qu'on a $L_{12} = L_{21}$, il n'y a qu'à former la différence

$$(C\beta - B\gamma) - (A\beta - B\alpha) = \beta(C - A) - B(\gamma - \alpha).$$

Un calcul simple, en tenant compte de (16), montre qu'elle est nulle.

Dans ce qui précède, nous avons mis nulles les constantes d'intégral ce qui revient à admettre qu'aux forces nulles correspondent des flux promises c'est admis dans les différentes théories des phénomènes phychimiques. Dans le cas général, il faut écrire

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} = \alpha X + \beta Y + M$$
, $B\frac{dx}{dt} + C\frac{dy}{dt} = \beta X + \gamma Y + N$

M et N étant des constantes d'intégration.

Remarque. On arrivera aux mêmes résultats en prenant comme poir départ une autre fonction caractéristique au lieu de l'entropie, ce qui génér les résultats concernant les transformations linéaires des forces et des étudiées dans l'ouvrage cité de DE GROOT.

Expression des coefficients L_{ij} au moyen de a, b, c

Les relations phénoménologiques

$$\frac{dx}{dt} = A(ax + by) + B(bx + cy) = AX + BY,$$

$$\frac{dy}{dt} = B(ax + by) + C(bx + cy) = BX + CY,$$

$$(A, B, C \text{ des constantes})$$

où, pour éviter les indices, nous avons mis A, B, C au lieu de L_{11} , $L_{12} = L_{22}$ respectivement, conduisent, par un choix convenable de A, B, C, aux étions

$$rac{d^2 \chi}{dt^2}$$
 X, $rac{d^2 \gamma}{dt^2} = Y$.

En effet, des équations (19), on tire immédiatement

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}} = (A \ a + B \ b) \frac{dx}{dt} + (A \ b + B \ b) \frac{dy}{dt}
[(A \ a + B \ b) \ A + (A \ b + B \ c) \ B] \ X
+ [(A \ a + B \ b) \ B + (A \ b + B \ c) \ C] = A_{1} \ X + B_{1} \ Y ,$$

$$\frac{d^{2}y}{dt^{2}} = (B \ a + C \ b) \frac{dx}{dt} + (B \ b + C \ c) \frac{dy}{dt}$$

$$- (B \ a + C \ b) \ A + (B \ b + C \ c) \ B] \ X$$

$$+ [(B \ a + C \ b) \ B + (B \ b + C \ c) \ C] \ Y = D_{1} \ X + C_{1} \ Y .$$

$$A \ a + B \ b = - \frac{C}{B} (A \ b + B \ c), \quad B \ b + C \ c = - \frac{A}{B} (B \ a + C \ b),$$

uation $A_1 = C_1 = \mu$ donne

$$\frac{A\ b+B\ c}{B}\ (B^2-A\ c) + \frac{B\ c}{B}\ (B^2-A\ C) + \mu\ ,$$

$$Ab = Bc + Ba = Cb$$
; $C = A + B = \frac{c-a}{b}$.

c cette valeur de C, l'équation $A_1 - C_1 = 0$ devient

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2 + 2\left(\frac{A}{B}\right)\frac{a}{b} + 1 + \frac{c(c-a)}{b^2} = 0,$$

$$\frac{A}{B} = -\frac{c}{b} \pm \sqrt{\frac{a c - b^2}{b^2}}, \quad \frac{C}{A} = -\frac{a}{b} \mp \sqrt{\frac{a c - b^2}{b^2}},$$

ui donne enfin

$$\mu = \frac{B^2}{b^2} \left(a \, \epsilon - b^2 \right) \left[a + \epsilon^2 + 2 \right] \left[a \, \epsilon - b^2 \right].$$

En choisissant B de façon qu'on ait $\mu = 1$, les équations (21) deviennent enfin

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

lu'il fallait démontrer.

Les relations phénoménologiques (19) représentent un système d'intégrales premières du système (20)

Ecrivons les équations (20) sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = \xi, \quad \frac{d\xi}{dt} - ax + by, \quad \frac{dy}{dt} - y, \quad \frac{d\eta}{dt} = bx + cy. \quad (22)$$

li admettent les intégrales

$$x - e^{rt}$$
, $y = \alpha e^{rt}$, $\xi = \beta e^{rt}$, $\eta = \gamma e^{rt}$,

où r est déterminé par l'équation

$$r^4 - r^2(a+c) + ac - b^2 = 0$$

et α, β, γ sont donnés par

$$\beta - r$$
, $\alpha = \frac{r\beta - a}{b} = \frac{\beta^2 - a}{b}$, $\gamma = r\alpha = \beta \alpha$.

Les racines de l'équation en r sont ici

$$r_1 = -\int \frac{a}{2} \frac{r}{c} + \int \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2 - ac$$
, $r_2 = r_1$,
 $r_3 = +\sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + b^2 - ac}$, $r_4 = -r_3$.

La forme quadratique $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ étant définie positive, on a

$$b^2 - a c < 0$$
, $a > 0$, $c > 0$,

et par conséquent

$$\left(\frac{a - e}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{a - e}{2}\right)^2 + b - ac - \left(\frac{a - e}{2}\right)^2 + b^2 \geq 0.$$

On a ainsi

$$r_1 > r_3 > 0$$
 , $r_2 < r_4 < 0$.

Les intégrales du système (22), s'annulant pour $t \to -\infty$, sont par conséquit

$$x = C_2 e^{r_2 t} + C_4 e^{r_4 t}, \qquad y = C_2 \alpha_2 e^{r_2 t} + C_4 \alpha_4 e^{r_4 t},$$

$$\xi = C_2 \beta_2 e^{r_2 t} + C_4 \beta_4 e^{r_4 t}, \quad \eta = C_2 \gamma_2 e^{r_2 t} + C_4 \gamma_4 e^{r_4 t}.$$

En substituant à e^{r_2t} , e^{r_4t} dans les dernières équations leurs valeurs tindes deux premières, ayant égard aux relations (23), on obtient après des calculaimples

$$\frac{dx}{dt} = \xi = \frac{\beta_2}{\alpha_4} \frac{\alpha_4}{-\alpha_2} - \frac{\beta_4}{\alpha_2} \alpha_2 - \frac{\beta_2 - \beta_4}{\alpha_4 - \alpha_2} y = A (a x + b y) + B (b x + c y)$$

$$- A X + B Y - (A a + B b) x + (A b + B c) y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \eta = \frac{\gamma_2 \alpha_4 - \gamma_4 \alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_2} x - \frac{\gamma_2 - \gamma_4}{\alpha_4 - \alpha_2} y = D (a x + b y) + C (b x + c y)$$

$$D X + C Y - (D a + C b) x + (D b + C c) y.$$

La comparaison des coefficients de x et y dans les premiers et les seconds nbres de ces équations, en égard aux expressions de r_2 , r_4 , α_i , β_i , γ_i , donne lès quelques transformations

$$(c-b^2)$$
 $B=-(r_4-r_2)$ \sqrt{a} $c-b^2$, $(a$ $c-b^2)$ $D=-(r_4-r_2)$ \sqrt{a} $c-b^2$, $C=D$,

Summary

Basing on the probability theory, Onsager and Casimir have established the coefficients L_{ik} of the phenomenological relations between the "Flows" and the "Forces" X_i , $J_i = \sum L_{ik} X_k$ near the steady states [i.e. taking the

ression of variation of entropy as $\Delta S = -(\sum_{i,k} g_{ik} x_i x_k)/2$] satisfy the equalities $L = L_{ki}$.

 $L=L_{ki}$. In the preceding it is shown that these are phenomenological consequences EMETON's Mechanics in the more general case where ΔS is assumed as $\Delta S = \sum_{i=1}^{k} g_{i} x_{i} - (\sum_{i=1}^{k} g_{ik} x_{i} x_{k})^{1/2}$.

ı le 14 juillet 1951.)

Lagrange-Hermitesche Interpolation im Komplexen')

Von Heinz Unger, Darmstadt²)

1. Einleitung

Die Interpolation einer analytischen Funktion im Komplexen wird mit zu mender Bedeutung nichtelementarer Funktionen ein immer dringlicheres alem. Die dabei zu beachtenden Gesichtspunkte unterscheiden sich im alleinen wesentlich von denen der reellen Interpolation. Die Tafeln erfordern Komplexen doppelten Eingang und können kaum so engmaschig angelegt en, daß etwa kubische Interpolation [1]3) noch ausreicht. Es sind von wherein hochgradige Interpolationsformeln ins Auge zu fassen. Dabei muß r versuchen, mit möglichst wenig Angaben auszukommen, um die Tafelige nicht zu umfangreich werden zu lassen. Andererseits muß aber auch der brand zur Berechnung eines Zwischenwertes mit hochgradigen Näherungs-

Es handelt sich um eine ausführliche Wiedergabe eines Vortrages, der auf der Tagung der Aschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (Freiburg i. Br. vom 29. bis 31. März 1951) wen wurde. Vgl. auch Z. angew. Math. Mech. 31, 246–247 (1951).

[:] Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt.

e: Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf S. 64.

polynomen in erträglichen Grenzen bleiben. Beide Forderungen richtig gegeinander abzuwägen, rechtfertigt besondere Untersuchungen. Es handelt hier vornehmlich um die Berechnung einzelner Zwischenwerte, nicht um Aufgabe der Untertafelung, die wieder andere Methoden erfordert.

In einer Arbeit von Schnell[2] ist gezeigt worden, daß bei der Interpola im Komplexen die Aufspaltung der Funktion in Real- und Imaginärteil Umweg ist. Die Verwendung der bekannten Interpolationsformeln, wie Besche, Stirlingsche, Everettsche Formel, mit komplexem Argument korgleichfalls kaum in Frage, da die Stützwerte bei hochgradiger Interpola im allgemeinen zu weit vom interessierenden Bereich abliegen, was eine günstige Restgliedabschätzung zur Folge hat.

Als naheliegende Stützstellenanordnung erscheint im Komplexen das remäßige Polygon. Dabei gelangt man zu besonders vorteilhaften Formeln, wie man nicht, wie bei der üblichen Lagrangeschen Interpolation, allein die Futionswerte in den n Eckpunkten des Polygons heranzieht, sondern nach auf Hermite [3] zurückgehenden Erweiterung der Interpolationsformeln anoch die Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung benützt. Man kom auf diese Weise schon mit wenig Stützstellen zu Interpolationsformeln he Grades, wie sie für unsere Zwecke benötigt werden. Wir setzen für das Folge voraus, daß in den Polygoneckpunkten die Funktionswerte und die q en Ableitungen (in allen Punkten bis zur gleichen Ordnung¹)) bekannt sind. Polygoneckpunkte bilden dann die Gitterpunkten, für deren Argumente Funktionswerte nebst Ableitungen zu tabellieren sind.

Es wird sich zeigen, daß man sich dabei unter Verwendung eines kar schen Koordinatensystems im allgemeinen auf das Quadrat als beson zweckmäßigen Sonderfall des regelmäßigen Polygons beschränken kann.

Für die praktische Durchführung der Interpolation müssen die Interptionskoeffizienten in einer Hilfstafel vorliegen. Im Falle des Quadrats abrauchen von den n(q+1) benötigten Koeffizienten nur q-1 in einem Quader Seitenlänge 1 mit einer bestimmten Maschenweite (zum Beispiel 1) vertafelt zu werden. Den gleichen Vorteil kann man bei anderen Polyge (zum Beispiel Sechseck) nur unter Verwendung von Polarkoordinaten erreic Im allgemeinen ist aber das Arbeiten mit kartesischen Koordinaten bequer

Die Formeln werden zunächst alle so aufgestellt, daß der Polygonmi punkt als Stützstelle unberücksichtigt bleibt, da dies den häufigeren Fall Stützstellenanordnung darstellt. In dem ergänzend behandelten Fall mit rücksichtigung des Mittelpunktes müssen dann außer den q+1 Koeffizier der Eckpunkte noch die Koeffizienten für den Mittelpunkt bereitgestellt den; doch braucht dies nur in einem Teile des Quadrats zu geschehen.

 $^{^{1})}$ Der allgemeinere Fall, daß q_{1} Ableitungen in $z_{1},\ q_{2}$ in z_{2} usw. berücksichtigt werden, hier nicht betrachtet. Weiter bleibt die Verallgemeinerung, daß Ableitungen von beliebigem Uherangezogen werden, einer besonderen Arbeit vorbehalten.

Den Vorteil der Kenntnis nur einer kleinen Zahl von Interpolationskoeffiten kann man bei regelmäßigen Polygonen auch dadurch erreichen, daß n zum Beispiel auf der Mitte jeder Polygonseite eine weitere Stützstelle hinimmt und mit der gewöhnlichen Lagrange-Formel arbeitet. Es erscheint r im allgemeinen wesentlich einfacher, an den Eckpunkten die Ableitungen r speziellen Funktion mit heranzuziehen, da diese oft durch Rekursionsneln oder Differentialgleichungen gebildet werden können. Schließlich ist 1 der Aufbau der Interpolationskoeffizienten nach Lagrange-Hermite onders einfach, was für die Berechnung dieser Koeffizieuten eine nicht unentliche Rolle spielt.

vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Aufbau der Interpolationsfizienten und ihrem Zusammenhang untereinander. Bezüglich der praknen Durchführung sei auf [4] verwiesen.

2. Lagrange-Hermitesche Interpolation

Vir setzen voraus, daß an den durchweg als verschieden angenommenen zstellen

$$z_1, z_2, \dots, z_n \tag{1}$$

komplexen Veränderlichen z=x=i y die Funktionswerte und die q ersten ritungen der zu interpolierenden analytischen Funktion g(z) gegeben sind:

$$g_1, g_2, \ldots, g_n; g'_1, g'_2, \ldots, g'_n; \ldots; g'_1, \ldots, g'_n$$
 (2)

lit liegen n (q-1) Angaben vor, und wir suchen ein Polynom $P_{\gamma}(z)$ vom

$$\gamma = n (q+1) - 1, \tag{3}$$

nes an den Stützstellen die vorgegebenen Funktionswerte und Ableitungen nmt.

vir setzen

ile y mit

$$P_{\gamma}(z) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{p=0}^{q} L_{\mu,p}^{n,q}(z) g_{\mu}^{(p)}$$
(4)

lamit

$$g(z) = P_{y}(z) + R_{y+1}(z) \tag{5}$$

nlem Restglied $R_{z-1}(z)$. Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir im anden bei den Interpolationskoeffizienten $L^{n,\;q}_{\mu,\;p}(z)$ die oberen Indizes $n,\;q$ er fort, da Verwechslungen kaum zu befürchten sind, schreiben also ein- $[L_{\mu,p}(z)]$. Wir führen folgende Vektoren ein¹):

Die geschweifte Klammer wird zur bequemeren Schreibweise einer einspaltigen Matrix 11det.

$$g = \{g_1, g_2, \dots, g_n; g'_1, \dots, g'_n; \dots; g_1^{(q)}, \dots, g_{n_i}^{(q)}\},\$$

$$3 = \{1, z, z^2, \dots, z^{\gamma}\},\$$

$$3_{\mu} = \{1, z_{\mu}, z_{\mu}^2, \dots, z_{\mu}^{\gamma}\}.$$

Weiter benützen wir die [n (q + 1)]-reihige Matrix

$$\mathfrak{B}_{n,q} = \left\{\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n, \frac{d\mathfrak{z}_1}{dz_1}, \ldots, \frac{d\mathfrak{z}_n}{dz_n}, \ldots, \frac{d^q\mathfrak{z}_1}{dz_1^q}, \ldots, \frac{d^q\mathfrak{z}_n}{dz_n^q}\right\},\,$$

deren Determinante eine Verallgemeinerung der bekannten Vandermondeschen Determinante det \mathfrak{B}_n darstellt [5] und sich durch diese wie folgt ausdrücken läßt¹):

$$\det \mathfrak{B}_{n,q} = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \cdot \frac{n(n-1)}{2} (1! \ 2! \dots q!)^n [\det \mathfrak{B}_n]^{(q+1)^2}$$

mit

$$\det \mathfrak{B}_n = \prod_{\mu>\nu}^{1,\,n} (z_\mu - z_\nu).$$

Sind also, wie vorausgesetzt, die z_v voneinander verschieden, so muß nidet \mathfrak{B}_n auch det $\mathfrak{B}_{n,q}$ von Null verschieden sein.

Setzen wir daher für das Näherungspolynom an:

$$P_{\gamma}(z) = \mathfrak{z}' \ \mathfrak{a} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}, \tag{1}$$

so erhalten wir zur Bestimmung der $\gamma-1$ Koeffizienten a_r das Gleichungssystem:

$$\mathfrak{B}_{n,q} \mathfrak{a} = \mathfrak{g},$$

welches eine eindeutige Lösung besitzt.

In Erweiterung der Darstellung der Lagrangeschen Interpolation [6] lät sich $P_{\nu}(z)$ in der Form schreiben:

$$P_{\gamma}(z) = -\detegin{pmatrix} \mathfrak{B}_{n,q} & \mathfrak{g} \ \mathfrak{z}^i & 0 \end{pmatrix} : \det \mathfrak{B}_{n,q} \,,$$

während das Restglied lautet:

$$R_{\gamma+1}(z) = \det \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{n,q} & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{Z}' & g \end{pmatrix} : \det \mathfrak{B}_{n,q}.$$
 (13)

¹) Auf die Literaturstelle [5] wurde ich von Herrn Prof. Dr. U. Wegner in dankensweit Weise hingewiesen. Dort wird ein rekurrentes Verfahren zur Berechnung der verallgemeiner Vandermondeschen Determinante angegeben, die sich von (7) nur durch andere Zeilenanordnist und unwesentliche Faktoren unterscheidet. Der allgemeine explizite Ausdruck findet sich of nicht. Das Ergebnis (8) wurde von mir auf andere Weise gefunden, indem eine gewöhnliche Vane mondesche Determinante von der Ordnung n (q+1) differenziert wird. Auf diese Weise läßt: auch der allgemeine Fall, vgl. Fußnote S. 52, mit q_{μ} Ableitungen in z_{μ} leicht erledigen.

Zur Durchführung der Interpolation werden die $n\left(q+1\right)$ Polynome $L_{\mu,\,p}(z)$ n Grade γ

$$L_{\mu,\,p}(z) = \mathfrak{z}'\,\mathfrak{c}_{\mu,\,p} \tag{14}$$

$$\mathbf{c}_{\mu,p} = \left\{ (c_{\mu,p})_0, \ (c_{\mu,p})_1, \ \dots, \ (c_{\mu,p})_{\gamma} \right\} \tag{15}$$

iötigt. Zur Bestimmung der Koeffizienten $(c_{\mu,p})_*$ sind n (q+1) Gleichungen orderlich, die mit dem Vektor

$$e_{\cdot} = \left\{0, 0, \dots, \frac{1}{p \cdot \text{te Zeile}}, 0, \dots, 0\right\}$$
 (16)

gendermaßen lauten:

$$\mathfrak{B}_{n,q} \, \mathfrak{c}_{\mu,\,p} = \mathfrak{e}_{n\,p+\mu}. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n; \quad p = 0, 1, \ldots, q) \quad (17)$$

Bestimmung der Koeffizienten ist unter den gemachten Voraussetzungen leutig. Fassen wir die n/(q-1) Vektoren $\mathfrak{c}_{\mu,p}$ zur $(\gamma-1)$ -reihigen quadratien Matrix

$$\mathfrak{C}_{n,q} = (\mathfrak{c}_{1,0}, \mathfrak{c}_{2,0}, \dots, \mathfrak{c}_{n,0}, \dots, \mathfrak{c}_{1,q}, \dots, \mathfrak{c}_{n,q})$$
(18)

ammen, so folgt aus (17):

$$\mathfrak{B}_{n,q}\mathfrak{C}_{n,q}=\mathfrak{E}. \tag{19}$$

Matrix der Koeffizienten ist also die Kehrmatrix¹) zur verallgemeinerten idermondeschen Matrix (7) (vgl. auch [7]).

Da sich die Vandermondesche Determinante (9) nicht ändert, wenn z durch z^* ersetzt wird, so ändert sich auch det $\mathfrak{B}_{n,q}$ nicht. In den Spalten der trix $\mathfrak{C}_{n,q}$, deren ν -te Zeile die $(\nu-1)$ -te Ableitung von $L_{\mu,p}(z)$, dividiert ch $(\nu-1)$!, enthält, tritt dieser Ausdruck dann an der Stelle $z=z^*$ ant in z=0 auf.

Für die zu interpolierende Funktion g(z) müssen wir voraussetzen, daß g(z) innern und auf der Berandung des kleinsten konvexen Polygons, das durch Punkte z, z_1, z_2, \ldots, z_n bestimmt wird, regulär ist. Allerdings muß für die stische Durchführung zusätzlich gefordert werden, daß die nächste Sinzität noch genügend weit entfernt liegt, um eine brauchbare Restgliedhätzung zu erhalten.

Von dem Restglied, das in allgemeiner Form wie folgt lautet:

$$I_{1}(z) = [(z - z_{1}) \dots (z - z_{n})]^{q+1} \frac{1}{2 \pi i} \oint_{C} \frac{g(\zeta)}{[(\zeta - z_{1}) \dots (\zeta - z_{n})]^{q+1}} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z}, (20)$$

⁾ Einen Spezialfall dieser Beziehung mit einer etwas abgeänderten verallgemeinerten Vanderleschen Determinante findet man bei Kowalewski [7]. Die Elemente der Kehrmatrix stellen die Koeffizienten der Partialbruchzerlegungen gewisser leicht angebbarer rationaler Funkn dar, worauf schon in [5] hingewiesen wird.

wobei C den Rand des oben erwähnten Polygons darstellt, interessieren uns in diesem Zusammenhange hauptsächlich Abschätzungen. Dazu wird die Formel (20) unter Anwendung bekannter Beziehungen (vgl. [6], S. 16, Darstellung des Restgliedes nach Hermite, Darbouxscher Mittelwertsatz usw.) umgeformt. Hierbei sei auch auf die Arbeit von P. Montel [8] verwiesen.

3. Einheitspolygon in der komplexen Ebene

Wir legen als Stützstellenanordnung ein regelmäßiges Polygon von n Ecken und einer Seitenlänge 1 zugrunde, im folgenden kurz Einheitspolygon genannt, und wählen ein z-Koordinatensystem mit dem Nullpunkt im Polygonmittelpunkt. Die Numerierung der Eckpunkte z_{μ} sei so durchgeführt, daß

$$z_{1} = \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{-i\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)}}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$
(21)

und daß

$$z_{\mu} = z_1 e^{i \frac{2\pi}{n} (\mu + 1)}, \qquad (22)$$

so daß

$$z_2 - z_1 = 1 \tag{23}$$

wird (Figur 1). Die Wahl dieses Polygons bedeutet keine Einschränkung, da

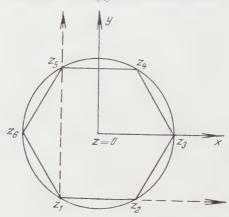


Fig. 1 Lage des Einheitspolygons.

jedes regelmäßige Polygon sich auf das gewünschte durch eine Lineartrans formation zurückführen läßt. Laut Voraussetzung soll sich die zu interpolie rende Funktion g(z) in und auf dem Rande des Polygons regulär verhalten.

Die Vandermondesche Determinante det \mathfrak{V}_n hat den Wert:

$$\det \mathfrak{B}_n = \left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n(1-n)/2} \sqrt{n^n} \, e^{i\frac{\pi}{2} \, (n-1) \, (n-2)}.$$

Bei der Quadratwurzel ist immer das positive Zeichen zu nehmen. Neben der Veränderlichen z werden wir noch die Veränderliche

$$w = z - z_1 \tag{24}$$

benützen, deren Achsensystem in Figur 1 gestrichelt eingetragen ist. In ihr sind die Koordinaten der laufenden Eckpunkte des Polygons dann:

$$w_{\mu} = \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}(\mu-1)} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} \quad \text{mit} \quad \mu = 1, 2, \dots, n.$$
 (25)

Die Veränderliche z bzw. w beschränke sich auf das Innere und den Rand des Einheitspolygons.

Das Einheitspolygon stellt die für die komplexe Ebene natürliche Verallgemeinerung gleichabständiger Stützstellen auf der reellen Achse dar.

1. Die Lagrange-Hermiteschen Koeffizienten für das Einheitspolygon

Setzt man die Interpolationsformel (5) für das Einheitspolygon an, so muß ler zu berechnende Wert unverändert bleiben, wenn man eine Lineartransfornation von z durchführt. Macht man insbesondere die Drehung

$$z^{(\mu)} = z e^{i\frac{2\pi}{n}(1-\mu)}$$
 für $\mu = 1, 2, 3, ..., n,$ (26)

bei der der Punkt $z=z_g$ im Uhrzeigersinn in den Punkt z_1 übergeführt wird vgl. Figur 1), so zeigt sich, daß von den n (q+1) benötigten Koeffizienten nur q+1 bereitzustellen sind. Denn es gilt nach Einsetzung von (26) in (5) lie Beziehung:

$$L_{\mu,p}(z) = L_{1,\mu} z^{(\mu)} e^{i\frac{2\pi}{n} - \mu + 1i}$$
. $(\mu = 1, 2, ..., n)$ (27)

für q>0 erhält man für die gewöhnlichen Lagrange-Koeffizienten, die wir alt $L_u(z)$ bezeichnen, den Zusammenhang:

$$L_{\mu}(z) = L_{1}[z^{(\mu)}].$$

Für jeden p-Wert wird also nur die Kenntnis eines Koeffizienten, nämlich p_1, p_2 , im Einheitspolygon an n Argumentstellen benötigt. Andererseits würde sauch genügen, jeden Koeffizienten in dem n-ten Teil des Polygons zu kennen.

Interpoliert man im Reellen mit äquidistanten Stützstellen, so benötigt mar wenn n gerade ist, (q+1) n/2, bei ungeradem n dagegen (q+1) [(n+1)/2] Koeffizienten. Hierauf ist für die gewöhnlichen Lagrange-Koeffizienten zur Beispiel in [9], S. XVII, hingewiesen. Im Einheitspolygon werden die Verhältnisse also besonders einfach.

Übrigens erhält man durch Differenzieren von (27) für die k-te Ableitung

$$L_{\mu,p}^{(k)}(z) = L_{1,p}^{(k)}[z^{(\mu)}] e^{i\frac{2\pi}{n}(\mu-1)(p-k)},$$

womit auch die Ableitungen auf diejenigen mit dem Index $\mu = 1$ zurückge führt sind,

Die Interpolationsformel (5) lautet unter Berücksichtigung von (27):

$$g(z) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{p=0}^{q} L_{1, p}[z^{(\mu)}] e^{i\frac{2\pi}{n} p(\mu-1)} g_{\mu}^{(p)} + R_{\gamma+1}(z).$$
 (5:

wobei $z^{(\mu)}$ nach (26) zu bilden ist.

Führen wir an Stelle von z die Veränderliche w nach (24) ein und bezeichner wir die Lagrange-Hermiteschen Koeffizienten als Funktionen von w mit $M_{g,p}(z)$ und die zu interpolierende Funktion mit G(w), so geht (5a) über in

$$G(w) = \sum_{n=1}^{n} \sum_{r=0}^{q} M_{1, p}[w^{(\mu)}] e^{i\frac{2\pi}{n}(\mu-1)} G_{\mu}^{(p)} + R_{p+1}^{*}(w)$$
 (5)

mit

$$w^{(\mu)} = w e^{i\frac{2\pi}{n}(1-\mu)} + w_{n-\mu+2}$$
 für $\mu = 2, 3, ..., n.$ (2)

Für die praktische Durchführung der Interpolation wird im allgemeinen d Veränderliche w bevorzugt (vgl. [1]).

Aus (5a) folgt die für Kontrollen wichtige Beziehung

$$\frac{z^k}{k!} = \sum_{\mu=1}^n \sum_{p=0}^k L_{1p}[z^{(\mu)}] \, e^{i \frac{2\pi}{n} \cdot p \, (\mu-1)} \, \frac{z_{\mu}^{k-p}}{(k-\bar{p})!} \, ,$$

die für die gewöhnlichen Lagrange-Koeffizienten mit $k \geq 0$ übergeht in

$$1 = \sum_{\mu=1}^{n} L_{1}[z^{(\mu)}].$$

Da die Lagrange-Hermiteschen Koeffizienten $L_{\mu,\,\rho}(z)$ an allen Stützstellaußer in $z-z_\mu$ eine (q+1)-fache Nullstelle besitzen müssen, läßt sich ewesentlicher Bestandteil durch die gewöhnlichen Lagrange-Koeffizienten au

¹⁾ Unter $L_{\mu,\,\dot{p}}^{(k)}$ ist jedesmal die Ableitung nach dem Argument zu verstehen.

drücken. Es gilt die Beziehung:

$$L_{\mu, p}(z) = [L_{\mu}(z)^{q+1}] l_{\mu, p}(z).$$
(29)

Hierbei stellt l_+,z_- ein Polynom q-ten Grades dar. Von den n (q=1) Gleichungen 17 sind durch $L_+z_-^{-1}$ bereits n=1 (q=1) erfüllt. Die restlichen Gleichungen

$$[L_{\mu,p}^{(k)}(z)]_{z=z_{\mu}} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = p \\ 0 & \text{für } k \neq p \end{cases} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, q$$
 (30)

dienen zur Bestimmung der q-1 Konstanten des Polynoms $l_{\mu,p}(z)$. Dieses Polynom muß daher noch durch $|z-z_{\mu}|^p p!$ teilbar sein, woraus der für p-q besonders einfache Aufbau der Koeffizienten folgt.

Die Beziehung |29| gilt für jede Stützstellenanordnung, Beim Einheits polygon wird sie infolge (27) nur für $\mu = 1$ benötigt.

Eine Restghedabschatzung ist bei der komplexen Interpolation und insbesondere bei der hier benützten hochgradigen von noch größerer Bedeutung als im Reellen, da hier die Genaugkeit eines Zwischenwertes nur durch eine sorgfältige Restgliedabschätzung garantiert werden kann.

Bedeutet $K_{n(q+1)}$ eine obere Schranke für den Betrag der $[n\ (q+1)]$ -ten Ableitung der Funktion Japauf dem Rande des Polygons, so läßt sich folgende Abschätzung des Restgliedes angeben:

$$|R_{\gamma-1}(z)| \le \left| \frac{\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n - 1}{\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^n} \right|^{q-1} \frac{K_{n(q+1)}}{n(q+1)!}.$$
 (31)

Die Hauptautgabe bei der praktischen fiehlerabschätzung ist die Abschätzung ler [n,q-1]-ten Ableitung auf dem Rande. Für eine Orientierung genügt esoft, die Abschätzungen in den Eckpunkten zu kennen.

5. Mitnahme des Polygonmittelpunktes

Nimmt man den Mittelpunkt des Polygons als weitere Stützstelle hinzu und etzt dort wieder den Funktionswert ζ_0^{\prime} als bekannt voraus, so erhält man an Stelle von (5) folgende Interpolationsformel:

$$|\zeta|z| = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{p=0}^{q} N_{\mu,p}(z) g_{\mu}^{(p)} + \sum_{p=0}^{q} N_{0,p}(z) g_{0}^{(p)} + R_{\gamma^{*}+1}(z),$$
 (5c)

vobei $\gamma^* = (n+1)(q+1) - 1$ den Grad der Interpolationskoeffizienten dartellt¹). Führen wir wieder die Transformation (26) durch, so erhalten wir für

¹⁾ Wir lassen auch hier die beiden Indizes n+1 und q weg und bezeichnen die Koeffizienten nit $N\mu, p(z)$, weil keine Verwechslungen zu befürchten sind.

die Polynome $N_{\mu,p}(z)$ die zu (27) entsprechende Beziehung, wobei also für jeden p-Wert ein Polynom benötigt wird. Außerdem gilt:

$$N_{1,\,p}(z) = \left(\begin{smallmatrix} z \\ z_1 \end{smallmatrix} \right)^{q+1} [L_1(z)]^{q+1} \, l_{1,p}^*(z) = [N_1(z)]^{q+1} \, l_{1,p}^*(z).$$

Dabei sind auch die Polynome $l_{1,p}^*(z)$ wie $l_{1,p}(z)$ vom Grade q, und $N_1(z)$ ist de gewöhnliche Lagrange-Koeffizient.

Für die beim Mittelpunkt auftretenden Polynome gilt:

$$N_{0, p}(z) = N_{0, p}[z^{(\mu)}] e^{i\frac{2\pi}{n}p(\mu-1)}$$
 für $\mu = 2, 3, ..., n$.

Diese Koeffizienten brauchen also nur in einem Dreieck (1/n des Polygonsbekannt zu sein. Unter Heranziehung des gewöhnlichen Lagrange-Koeffizien ten $N_0(z)$ kann der Koeffizient wie folgt ausgedrückt werden:

$$N_{\mathbf{0},\,p}(z) = [N_{\mathbf{0}}(z)]^{q+1} \ \frac{z^p}{p\,!} \quad \text{mit} \quad N_{\mathbf{0}}(z) = e^{i\pi(n/2)} \left(2\,\sin\,\frac{\pi}{n}\right)^n \, z^n + 1.$$

Bei Vorliegen einer Potenztafel im Komplexen ist dieser Koeffizient einfac zu bilden.

Bei Mitnahme des Mittelpunktes empfiehlt es sich, die Koordinate z auc für die praktische Rechnung beizubehalten.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß auch die Formeln, bei denen da Polygon um π/n gedreht ist, sowie der Fall, daß die Stützstellen mit Funktionswerten und Ableitungen auf der Mitte der Polygonseite liegen, leicht auf der hier beschriebenen Wege hergeleitet werden können.

Für das Restglied gilt mit entsprechenden Bezeichnungen wie bei (31) di Abschätzung:

$$|R_{r^*-1}| \le \left[\frac{\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^n + 1}{\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n+1}} \right]^{q+1} \frac{K^*_{(n+1)(q+1)}}{[(n+1)(q+1)]!}.$$

6. Das Quadrat als Einheitspolygon (ohne Mittelpunkt)

Für die praktische Durchführung der Interpolation erweist sich die quadratische Stützstellenanordnung als besonders vorteilhaft. Hier hat man die Koefizienten $L_{1,p}(z)$ für $p=0,1,\ldots,q$ zu z-Werten eines quadratischen Netzes in Einheitsquadrat, also einem Quadrat mit der Seitenlänge 1, zu vertafeln Wählt man als Maschenweite des Netzes zum Beispiel 1/100, so sind für jede der q+1 Interpolationskoeffizienten $L_{1,p}(z)$ 10000 Werte anzugeben. (Durch Spiegelung an der Diagonale von z_1 nach z_3 könnte diese Zahl noch auf etw die Hälfte reduziert werden, vgl. hierzu [4].) Ist z dann ein Tafelargument, s

sind beim Quadrat auch die Werte $z^{(\mu)}$ nach (26) für $\mu = 2$, 3, 4 wieder Tafelargumente, die zu z in ganz einfacher Beziehung stehen, nämlich:

$$z^{(1)} = x + i y$$
, $z^{(2)} = y - i x$, $z^{(3)} = -x - i y$, $z^{(4)} = -y + i x$.

Damit können die Koeffizienten $L_{1,p}$ für alle vier Argumentwerte $z^{(p)}$ bequem aus der Tafel abgelesen werden. Die Berechnung der $L_{p,p}(z)$ erfordert nach (27)

$$L_{\mu,p}(z) = L_{1,p}[z^{(\mu)}] i^{(\mu-1)p}$$
 für $\mu = 2, 3, 4$ (27a)

dann nur noch die Multiplikation mit Potenzen von i.

Der Übergang auf die für die Vertafelung bequemere Veränderliche w bereitet keine Schwierigkeit.

Für q = 0, 1 und 2 ist die Vertafelung der Koeffizienten $L_{1,p}$ in der Veränderlichen a zur Zeit im Gange, und zwar mit einer Maschenweite von 1/100, die sich aus Restgliedabschätzungen für die meisten Zwecke als die günstigste ergab [4].

Will man feiner als mit der in der Interpolationstafel vorgegebenen Maschenweite (zum Beispiel 1/100) unterteilen, so kann man entweder zunächst die vier umliegenden in der Tafel enthaltenen Eckpunkte in der angegebenen Weise berechnen und dann mit einer Interpolationsformel niederen Grades nachinterpolieren, deren Genauigkeit dann stets ausreichen wird; oder aber die Interpolation wird nach anderen Gesichtspunkten durchgeführt, worauf lteils in Abschnitt 7, teils in einer späteren Arbeit eingegangen wird.

Zur Berechnung der Funktionswerte in der Quadratmitte erhält man für q = 0, 1 und 2 die folgenden Formeln:

$$\frac{1}{3}(0) = \frac{1}{4} \left[g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \right] + R_4,$$

$$\frac{1}{3}(0) = \frac{1}{4} \left[g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \right] + \frac{1+i}{32} \left[g_1' + i g_2' - g_3' - i g_4' \right] + R_8,$$

$$\frac{1}{3}(0) = \frac{1}{4} \left[g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \right] + \frac{11(1+i)}{256} \left[g_1' + i g_2' - g_3' - i g_4' \right] + \frac{1}{256} \left[g_1'' + g_2'' - g_3'' - g_3'' - g_4'' \right] - R_{12}.$$
(32)

Dabei sind die Funktionswerte und Ableitungen an den Stellen

ru nehmen.

Aus (31) erhält man hierbei für R_{12} die Abschätzung

$$|R_{12}| \le 0.7 \cdot 10^{-10} K_{12}.$$

Dies bedeutet, daß zum Beispiel die Zylinderfunktion $J_0(\zeta)$ für $\zeta=5,5+1,5$ nach (32) aus den Werten für

$$\zeta_1 = 5 + i$$
, $\zeta_2 = 6 + i$, $\zeta_3 = 6 + 2i$, $\zeta_4 = 5 + 2i$

auf neun Dezimalen genau berechnet werden kann, wenn die Stützwerte sowi die ersten und zweiten Ableitungen auf neun Dezimalen genau bekannt sinc

Vergleicht man bei quadratischer Stützstellenanordnung die Interpolatio nach Lagrange-Hermite unter Benützung der ersten und zweiten Ableitungen mit der Interpolation nach der gewöhnlichen Lagrange-Formel, so wir letztere im Mittel bei gleicher Genauigkeit etwa 1/100 der Maschenweite er fordern, angenähert gleiche Beträge für die im Restglied auftretenden Abletungen vorausgesetzt. Man spart also durch die Verwendung der Lagrange Hermiteschen Formel in einem einzigen Quadrat die Angabe von etwa 1000 Funktionswerten bei einem Aufwand von 12 komplexen Multiplikationen zu Berechnung eines Zwischenwertes, der in Anbetracht der großen Ersparnis at Zahlenmaterial wohl vertretbar ist.

Auf besondere Eigenschaften der Koeffizienten $L_{1,p}(z)$ wird in [4] einge gangen, wo auch besondere Kontrollformeln aufgeführt sind.

7. Eine Umschreibung der Lagrange-Hermiteschen Formel

Zu einer anderen Vorgehensweise bei der Auswertung der Lagrange-Hermitschen Interpolationsformel – hierbei erweist es sich als zweckmäßig mit de Variablen w nach (24) zu arbeiten – gelangt man, wenn man bei der Formi (5b) aus dem Koeffizienten $M_{1,p}(w)$ den von p unabhängigen Bestandto $[M_1(w)]^{q+1}$ gemäß der Beziehung (29) herauszieht:

$$M_{1, p}(w) = [M_1(w)]^{q+1} \lambda_{1, p}(w),$$
 (29)

worin $\lambda_{1,p}(w)$ wie das entsprechende $l_{1,p}(z)$ ein Polynom q-ten Grades ist:

$$G(w) = \sum_{\mu=1}^{n} \left[M_1[w^{(\mu)}] \right]^{q+1} \sum_{p=0}^{q} \lambda_{1,p}[w^{(\mu)}] e^{ip^{-2\pi} \frac{2\pi}{n} (\mu-1)} G_{\mu}^{(p)} + R_{\nu+1}^*(w).$$
 (5b)

Die Koeffizienten von $\lambda_{1,p}(\alpha)$ ergeben sich aus der für die Veränderliche umgeschriebenen Gleichung (30) und können für ein bestimmtes n und q erg für allemal berechnet werden. Wir setzen

$$\lambda_{1,\,\nu}(w) = \sum_{\nu \to p}^{q} a_{\nu,\,p} \, w^{\nu} \quad \text{mit} \quad a_{p,\,p} = \frac{1}{p\,!} \qquad (a_{\nu,\,p} = 0 \, \text{für } \nu < p) \quad (3)$$

und fassen die $a_{v,p}$ in einer (q+1)-reihigen quadratischen Matrix zusamme

$$\mathfrak{A}_{n,q} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_{10} & \frac{1}{1!} & 0 & \dots & 0 \\
a_{20} & a_{21} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{q0} & a_{q1} & a_{q2} & \dots & \frac{1}{q!}
\end{pmatrix};$$
(34)

sum Beispiel erhalten wir für das Quadrat und q=2:

$$\mathfrak{N}_{42} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & i_1 & 1 & 0 \\ -21 & i & \frac{9}{2} & (1-i) & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

)rdnet man die zweite Summe in $(5\,\mathrm{b}^*)$ um nach Potenzen von a bzw. $\omega^{(\mu)}$, so rhalten wir:

$$G(w) = \sum_{\mu=1}^{n} \left[M_1[w^{(\mu)}] \right]^{q+1} \sum_{\nu=0}^{q} d_{\mu,\nu}[w^{(\mu)}]^{\nu} + R^*_{\nu+1}(w). \tag{5b**}$$

Die Koeffizienten $d_{\mu,\nu}$ ergeben sich aus:

$$\begin{pmatrix} d_{\mu 0} \\ d_{\mu 1} \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n,q} \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_{n,q} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\mu 0} & G_{\mu}^{(0)} \\ \varepsilon_{\mu 1} & G_{\mu}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{\mu q} & G_{\mu}^{q} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{\mu,\nu} = e^{i\frac{2\pi}{n}\nu(\mu-1)} \quad (35)$$

n Falle des Quadrats gehen die Faktoren $\ell_{\mu,\nu}$ wieder in Potenzen von i über. Die Dreiecksform der Matrix $\mathfrak{A}_{n,q}$ vereinfacht die Ausrechnung der Koeffienten $d_{\mu,\nu}$ (bei Verwendung der Veränderlichen z statt w hätte man eine volle katrix erhalten). Insbesondere gilt:

$$d_{\mu,\,0} = G_{\mu}^{(0)} = G_{\mu}.$$

Die Koeffizienten $d_{\mu,\,\nu}$ enthalten die Funktionswerte und die q ersten Abitungen. Man hat also für eine zu interpolierende spezielle Funktion G(w) den Eckpunkten des Einheitspolygons diese Koeffizienten bereitzustellen.

Will man aus diesen Werten $d_{\mu,r}$ umgekehrt die Ableitungen $G_{\mu}^{(p)}$ selbst wiede errechnen, so kann dies infolge der Dreiccksgestalt der Matrix $\mathfrak{A}_{n,q}$ leicht durc Aufrechnung des gestaffelten Gleichungssystems erfolgen.

Liegt die spezielle Funktion G(w) in dieser Weise vertafelt vor, so wird de Interpolation nach (5b**) durchgeführt. Dabei ist es zweckmäßig, die zweiß Summe bei Nichtvorhandensein einer Potenztafel mit dem Horner-Schema au zuwerten. Als einziger Koeffizient müßte dann noch $[M_1(w)]^{q+1}$ im Einheits quadrat vertafelt vorliegen (bei der früher gebrauchten Vorgehensweise mußte q+1 Koeffizienten vertafelt werden). Da aber dieser Koeffizient auch verhältnismäßig einfach berechnet werden kann, läßt sich diese Art der Interpolation mit erträglichem Aufwand auch für eine beliebige Argumentstelle durchführe

Die Anwendung der Formel (5b**) erfordert, wenn die $d_{\mu,\nu}$ berechnet volliegen und $[M_1(w)]^{q+1}$ vertafelt ist, genau so viele komplexe Multiplikation (a. wie (5a) bzw. (5b).

Eine Umschreibung der Formeln mit Mittelpunkt kann entsprechend vor genommen werden.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. N. LOWAN und H. E. SALZER, Coefficients for Interpolation within a Squa Grid in the Complex Plane, J. Math. Phys. 23, 156-166 (1944).

[2] W. Schnell, Interpolation im Komplexen, Z. angew. Math. Mech. 30, 21 bis 275 (1950), und Diplomarbeit Technische Hochschule Darmstadt (1954).
 3. Ch. Hermite, Sur la formule d'interpolation de Lagrange. J. reine angew. Math.

- 81, 64–69 (1878) Œuvres, Bd. 3 (Gauthier-Villars, Paris 1912), S. 432-44.
 [4] A. Walther, H. Unger und B. Ashenhurst, Tables for Lagrange Herm.
- [4] A. Walther, H. Unger und B. Ashenhurst, Tables for Lagrange Herm, Complex Interpolation, Harvard University Computation Laboratory (in Volume Dereitung).
- [5] J. Wellstein, Vandermondesche Determinanten, Partialbruchzerlegungen, Aterpolationsaufgabe von Lagrange-Hermite, J. reine angew. Math. 166, 235-2 (1931).
- [6] N. E. NÖRLUND, Vorlesungen über Differenzenrechnung (Springer-Verlagen Berlin 1924).
- [7] G. Kowalewski, Interpolation und genäherte Quadratur (B. G. Teubne Leipzig 1932).
- [8] P. Montel, Sur quelques propriétés des différences divisées, J. Math. pui appl. [9] 16, 219-231 (1937).
- O. A. N. Lowan (Mathematical Tables Project, National Bureau of Standard Tables of Lagrangian Interpolation Coefficients (New York, Columbia University Press), 1. Aufl. 1944, 2. Aufl. 1948.
- [10] A. Selow, Zur Berechnung und Anwendung der Zylinderfunktionen vom Ind 1 3 mit komplexem Argument, Dissertation Technische Hochschule Darmsta (1949).

Summary

Increased attention has been recently devoted to the interpolation of analytic function g(z) in the complex plane. Only if the increment in a given

where

cable is sufficiently small, g(z) may be approximated by a quadratic or cubic polynomial. To get an interpolation polynomial P(z) of higher degree we employ the extension of the Lagrange formula given by Hermite, based on the values of the function and some of its derivatives:

$$P(z) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{p=0}^{q} L_{\mu,p}(z) g^{(p)}(z_{\mu}).$$

Choosing the points ε_{μ} in the corners of a regular polygon the relation for the coefficients $L_{\mu,p}$ may be found as follows:

 $L_{\mu,p}(z) = e^{i(2\pi/n) p(\mu-1)} L_{1,p}[z^{(\mu)}],$ $z^{(\mu)} = z e^{i(2\pi/n) (1-\mu)},$

It is convenient and advantageous to choose a square grid. Employing e.g. in interpolation polynomial of the degree 11, it is unnecessary to tabulate the welve coefficients $L_{\mu,p}(z)$. You need only three, namely $L_{1,0}$, $L_{1,1}$ and $L_{1,2}$. The orner values together with the first and second derivatives of the special function (z) must be known. It should be noted, that in many cases the derivatives could e easily computed (i.e. by the differential equation).

Eingegangen: 20. 4. 1951.)

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

Über die Instabilität von Methoden zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

Von Heinz Rutishauser, Zürich1)

Trotz der bemerkenswerten Publikation von J. Todd?), deren wesentliche unkte weiter unten wiedergegeben werden, hat der Verfasser seither öfters Verhren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen beobachtet, die, sich zwar mit bestechend kleinem Abbrechfehler behaftet, doch die große efahr der numerischen Instabilität in sich bergen. Ich will vorwegnehmen, daß ist den bewährten Verfahren von Runge-Kutta und Adams (Extrapolationserfahren), sofern sie richtig angewendet werden, diese Gefahr kaum besteht.

Es liegt in der Natur der Sache, daß man eine Differentialgleichung, wenn an sie numerisch lösen will, durch eine Differenzengleichung approximiert und ese löst. Um dabei die Schrittlänge nicht allzuklein wählen zu müssen, bevorgt man solche Differenzengleichungen, die die Differentialgleichung möglichst approximieren, dafür dann aber von höherer Ordnung sind als die ursprünghe Differentialgleichung. Gerade darin liegt aber eine Gefahr, denn damit hat e Differenzengleichung auch eine größere Lösungsmannigfaltigkeit, und es ist t möglich, daß die numerische Integration gerade eine der «eingeschleppten»

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ J. Todd, Solution of Differential Equations by Recurrence Relations, MTAC 4, 39-14 (1950).

Lösungen liefert, die nur am Anfang etwas mit der gesuchten Lösung der Dif rentialgleichung zu tun hat. In der erwähnten Arbeit von J. Todd sind mehre

solche Beispiele angeführt.

Besonders aufschlußreich ist die Betrachtung der zugehörigen Variation gleichung: Es ist sehr gut möglich, daß die Differentialvariationsgleichung statist, das heißt nur abklingende Lösungen enthält, währenddem die Differenze variationsgleichung instabil ist, indem sie dank der erweiterten Lösungsmann faltigkeit außer den abklingenden Lösungen auch noch solche besitzt, die exprentiell ansteigen. Eine einmal vorhandene Abweichung von der richtigen Lösun wie klein sie auch sein mag – und solche Abweichungen sind wegen der Aufrudungsfehler unvermeidlich –, wächst deshalb stark an und kann schließlich gefundene Lösung beträchtlich verfälschen. Dabei ist diese Instabilität – es hier nochmals betont – nur durch ein unzweckmäßiges Integrationsverfahren vursacht.

Im folgenden werden einige gebräuchliche Verfahren nach diesem Gesichtspur untersucht und einfache Kriterien für die Stabilität solcher Verfahren angegebe Im übrigen aber befaßt sich diese Arbeit nicht mit Fehlerabschätzungen.

Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = f(x, y) .$$

Variationsgleichung:

$$\eta' = \frac{\partial f}{\partial v} \eta$$
.

a) Integration mittels der Simpsonschen Regel¹)

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3} (y'_{k+1} + 4 y'_k + y'_{k-1})^2).$$

Diese Beziehung liefert zusammen mit der Differentialgleichung zwei Glechungen für die unbekannten Größen y_{k+1} und y'_{k+1} , die man meist durch Iteition löst. Ist die Differentialgleichung linear oder quadratisch in y, so kann mit die Iteration umgehen. Wir nehmen aber an, daß man in jedem Fall erst dauzum nächsten Integrationsschritt übergeht, wenn die Beziehung (1) erfüllt ist

Die Differenzenvariationsgleichung zu (1) ist offenbar

$$\eta_{k+1}\!\!\left(1-\frac{h}{3}\,f_{y,\,k+1}\right)-\frac{4\,h}{3}\,f_{y,\,k}\,\,\eta_{k}-\left(1+\frac{h}{3}\,f_{y,\,k-1}\right)\,\eta_{k-1}=\,0\,\,.$$

Nimmt man f_y als konstant an und macht für die Lösung dieser Gleichung a Ansatz $\eta_k = \lambda^k$, so erhält man für λ eine quadratische Gleichung mit den I sungen:

$$\lambda_1 = 1 + h f_y + \frac{h^2}{2} f_y^2 + \cdots \sim e^{hf_y}, \ \lambda_2 = -1 + \frac{h}{3} f_y - \frac{h^2}{18} f_y^2 + \cdots \sim -e^{-hf_z}$$

Dabei erkennt man leicht, daß von den beiden Fundamentallösungen $\eta_{1,k}=$ und $\eta_{2,k}=\lambda_2^k$ der Differenzenvariationsgleichung die erste die Lösung der I

¹) Die Erscheinung wurde an diesem Beispiel auch von Herrn G. Dahlquist, Stockhobeobachtet und richtig gedeutet (Vortrag an der GaMM.-Tagung 1951 in Freiburg i. Br.). Vergler auch: Z. angew. Math. Mech. 31, 239 (1951).

 $^{^2)}$ Dabei bedeutet h die Länge des Integrationsschrittes, und es steht y_k als Abkürzung $y(k\;h).$

ferentialvariationsgleichung approximiert, währenddem die zweite durch das

numerische Verfahren eingeschleppt wurde.

Insbesondere stellt $\lambda_2^8 \sim (-1)^k e^{-kh/y/3}$ für $f_y < 0$, also gerade wenn die Differentialgleichung stabil ist, eine langsam exponentiell anwachsende Oszillation dar. Dies bewirkt, daß eine kleine Störung der numerischen Lösung – durch einen Auftrundungsfehler oder einen Abbrechfehler verursacht – im weiteren Verlauf der Integration verstärkt wird und schließlich vollständig überhand nimmt. Die Erscheinung ist bei Collatz¹ als Aufrauhungserscheinung bezeichnet; es werden dort Mittel zur Behebung des Übelstandes angegeben. Dagegen ist die dort gegebene Erklärung nicht vollständig; das Phänomen tritt nur für $f_y < 0$ auf, für $f_y \ge 0$ st nichts zu befürchten, was insbesondere im Hinblick auf die gewöhnliche Simpsonsche Integrationsregel $(f_y \equiv 0)$ sehr wichtig ist.

b) Integration nach Runge-Kutta und ähnlichen Verfahren

Da diese Verfahren y_{k+1} aus y_k nach einer eindeutigen Vorschrift und ohne Verwendung der vorhergehenden Werte y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots berechnen, bleibt die Ordnung beim Übergang von der Differentialgleichung zur Differenzengleichung unzerändert, es werden also keine fremden Lösungen eingeschleppt, und es ist keine instabilität zu befürchten.

Dieselbe Eigenschaft hat eine von W. E. Milne angegebene Methode²).

c) Integration nach Adams

Wir betrachten eine Vierpunkteformel:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (9 y'_{k+1} + 19 y'_k - 5 y'_{k-1} + y'_{k-2}) + h^5 \dots$$
 (2)

Dies liefert wieder zusammen mit der Differentialgleichung zwei Gleichungen für lie Unbekannten y_{k+1} und y'_{k+1} , die man meist durch Iteration löst.

Die zu (2) gehörige Differenzenvariationsgleichung wird

$$1 - \frac{3h}{8} f_{y,k+1} \eta_{k+1} - \left(1 + \frac{19h}{24} f_{y,k}\right) \eta_k + \frac{5h}{24} f_{y,k-1} \eta_{k-1} - \frac{h}{24} f_{y,k-2} \eta_{k-2} = 0.$$

Betrachtet man wieder f_y als konstant, so liefert der Ansatz $\eta_k = \lambda^k$ eine Gleichung ritter Ordnung für λ . Eine Lösung λ_1 derselben liegt sehr nahe bei $e^{h i_y}$, demnach ntspricht $\eta_{1,k} = \lambda_1^k$ der Lösung der Differentialvariationsgleichung, währenddem $\frac{k}{2}$ und λ_3^k eingeschleppte Lösungen sind.

Nun reduziert sich aber die Gleichung für λ auf $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$, wenn h gegen strebt, so daß für hinreichend kleines h jedenfalls λ_2 und λ_3 klein sind, nämlich $-\pm \sqrt{-h} \, f_y/24$. Die eingeschleppten Lösungen $\eta_{2,k} = \lambda_2^k$ und $\eta_{3,k} = \lambda_3^k$ klingen lso rasch ab. Das Verfahren von Adams ist somit für hinreichend kleines h stabil.

d) Varianten von c

Um die Genauigkeit des Adamschen Verfahrens zu steigern, werden an Stelle on (2) auch andere Ausdrücke für den Korrektor verwendet. Solange es sich

¹⁾ L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (Springer, Berlin, Göttingen and Heidelberg 1951). Vgl. Abschnitt 4. 4. V., Seite 51.

²) W. E. Milne, A Note on the Numerical Integration of Differential Equations, J. Res. nat. ureau Standards 43, 537-542 (1949).

dabei um die entsprechenden Fünf- oder Sechspunkteformeln handelt, ist nicht dagegen einzuwenden, aber es ist Vorsicht am Platz, wenn y_{k+1} nicht wie bei (2 aus y_k und den Ableitungen, sondern etwa aus y_{k-1} oder y_{k-3} und den Ableitungen berechnet wird, wie zum Beispiel bei

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{2h}{4.5} (7 \ y'_{k+1} + 32 \ y'_{k} + 12 \ y'_{k-1} + 32 \ y'_{k-2} + 7 \ y'_{k-3}) + h^7 \dots$$

Tatsächlich hat die zugehörige Differenzenvariationsgleichung eine Lösung

$$\eta_k = \lambda^k \quad \text{mit} \quad \lambda = -\left(1 - \frac{19\,h}{45}\,f_y + \cdots\right),$$

so daß das Verfahren für $f_y < 0$ instabil ist.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y')$$

Soweit diese durch Aufspaltung in ein System von zwei Gleichungen erste Ordnung gelöst werden, gilt das bisher Gesagte. Insbesondere muß bei numerische Integration von gedämpften Schwingungen vor den Verfahren a und d gewarn werden.

Es gibt aber auch Verfahren, welche eine Gleichung zweiter Ordnung ohn Verwandlung in ein System auflösen:

e) Das Verfahren der zentralen Differenzen¹)

Die Formeln, die diesem Verfahren zugrunde liegen, sind (speziell für zweit Ordnung):

$$y_{k+1} = 2 y_k - y_{k-1} + \frac{h^2}{12} (y_{k+1}'' + 10 y_k'' + y_{k-1}''),$$
 (4)

$$y'_{k+1} = y'_{k-1} + \frac{h}{3} (y''_{k+1} + 4 y''_{k} + y''_{k-1}).$$
 (5)

Sie liefern zusammen mit der Differentialgleichung drei Gleichungen für die Unbekannten y_{k+1} , y_{k+1}' und y_{k+1}'' . Die zu (4) und (5) gehörigen zwei simultane Differenzenvariationsgleichungen werden unter der Annahme von konstantem f und $f_{y'}$ mit dem Ansatz $\eta_k = p \ \lambda^k$, $\eta_k' = q \ \lambda^k$ gelöst; man erhält wegen

$$\eta''_{k+1} = f_y \, \eta_{k+1} + f_{y'} \, \eta'_{k+1}$$

mit den Abkürzungen a für $h^2 f_y/12$ und b für $h f_{y'}/3$ die Gleichungen

$$p[(\lambda^{2} - 2 \lambda + 1) - a (\lambda^{2} + 10 \lambda + 1)] - q \frac{h}{4} b (\lambda^{2} + 10 \lambda + 1) = 0 \text{ [aus (4)]}$$

$$q[(\lambda^{2} - 1) - b (\lambda^{2} + 4 \lambda + 1)] - p \frac{4}{h} a (\lambda^{2} + 4 \lambda + 1) = 0 \text{ [aus (5)]}.$$

Diese können mit $(p, q) \neq (0, 0)$ nur dann simultan bestehen, wenn die Deter minante dieses Gleichungssystems für p und q verschwindet; man erhält nach

¹⁾ Vergleiche L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, S. 80.

einiger Rechnung:

$$(\lambda - 1) \left[(\lambda^2 - 1) (\lambda - 1) - a (\lambda + 1) (\lambda^2 + 10 \lambda + 1) - b (\lambda - 1) (\lambda^2 + 4 \lambda + 1) \right] = 0.$$

Die vier Lösungen dieser Gleichungen sind

$$\begin{array}{l} \lambda_1=1+\alpha_1\,h+\cdots \\ \lambda_2=1+\alpha_2\,h+\cdots \end{array} \right\} \ \text{wobei} \ \alpha_1 \ \text{und} \ \alpha_2 \ \text{die L\"osungen der Gleichung} \\ \lambda_3=1 \ , \\ \lambda_4=-\left(1-\frac{h}{3}\,f_{y'}+\cdots\right). \end{array}$$

Offenbar sind λ_1^k und λ_2^k die regulären Lösungen der Differenzenvariationsgleichung; sie entsprechen zwei Fundamentallösungen der Differentialvariationsgleichung, dagegen sind λ_3 und λ_4 eingeschleppt. Solange $f_{v'} \geq 0$ ist, ist nichts zu befürchten, insbesondere kann man das Verfahren für eine y'-freie Gleichung sehr impfehlen, aber für $f_{y'} < 0$ (gedämpfte Schwingungen) wächst

$$\eta_{4,k} = \lambda_4^k \sim (-1)^k e^{-(kh/3)f_{y'}}$$

in, und auch λ_3 kann noch gefährlich werden, weil auch $\lambda_{3,k}\equiv 1$ relativ zu einer gegen Null konvergierenden Funktion schließlich sehr groß wird.

Der Verfasser hat das Beispiel $y'' + y' + 1 \cdot 25 y = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y_0 = 0$, $y_0' = 1$ (exakte Lösung: $e^{-x/2} \sin x$) auf der programmgesteuerten Rechenmaschine ler ETH. durchgerechnet.

Es folgen einige Ausschnitte aus der so erhaltenen Funktionstabelle (es wurde mit = 0.1 gerechnet):

x	y	y '
4,8	_ 0,0903699	0,0531227
4,9	- 0,0847792	0,0584842
5,0	- 0,0787132	0,0626410
5,1	- 0,0722891	0,0656573
5,2	- 0,0656173	0,0676070

In dieser Region ist noch nichts Auffälliges zu bemerken, die y-Werte weichen ungefähr im eine Einheit der letzten Stelle von den wahren Werten ab, und nur Differenzenbildung ei den y'-Werten enthüllt eine gewisse Unregelmäßigkeit. Bei t=17 dagegen zeigt sich er Einfluß von λ_4^k bei den y'-Werten schon stark und auch bei den Differenzen der y-Verte:

x	У	y'	
17,0	0,000 195 74	0,000 050 17	
17,1	0,000 190 61	0,000 052 53	
17,2	0,000 183 66	0,000 086 20	
17,3	0,000 175 24	0,000 082 39	
17,4	0,000 165 48	0,000 112 35	
17,5	0,000 154 75	0,000 102 58	

Das wesentlich schwächere Oszillieren der y-Werte folgt auch aus den Gleichungen (6) für $\lambda = \lambda_4$ erhält man nämlich aus der ersten dieser Gleichungen

$$\frac{p}{q} \sim \frac{h}{4} \ b \ \frac{-8}{4} = -\frac{h^2}{6} \ f_{y'} , \text{ hier also } p \sim \frac{q}{600}.$$

Der weitere Verlauf der numerischen Integration bedarf keines Kommentars:

x	У	y'	
22,8	-0,00000815	0,00005320	
22,9	-0,00000864	-0,00006078	
23,0	-0,00000862	0,00005968	
23,1	-0,00000887	-0,00006247	
23,2	-0,00000861	0,00006601	
23,3	-0,00000868	-0,00006486	
29,5	-0,00000140	-0,00053037	
29,6	0,00000041	0,000 54889	
29,7	-0,00000144	-0,000 566 93	
29,8	0,00000050	0,000 586 82	
29,9	-0,00000148	-0,00060603	
30,0	0,00000060	0,00062735	

Der Verfasser ist sich wohl bewußt, daß die Annahme von konstantem f_y um $f_{y'}$ in den obigen Betrachtungen die Allgemeinheit wesentlich einschränkt. In dessen zeigen die Ergebnisse, daß es anscheinend nur auf das Vorzeichen diese Größen ankommt, und dieses ist in der Tat in sehr vielen Fällen unveränderlich Die Aussagen sind deshalb qualitativ fast allgemeingültig. Nur wenn zum Bespiel bei Methode a f_y im Verlauf der Integration sein Vorzeichen von Zeit zu Zeit ändert, tritt ein besonderer Fall ein, indem die auftretenden Oszillatione abwechselnd anschwellen und wieder abklingen.

Allgemeine Betrachtungen

Die Betrachtung der Beispiele legt die Vermutung nahe, daß Instabilitä genau bei solchen Integrationsverfahren auftreten kann, welche y_{k+1} durch Integration von y' über mehrere Intervalle hinweg bilden (zwei Intervalle bei Vefahren a, ein Intervall bei b und c, 4 Intervalle bei d, 2 Intervalle bei e). Die trifft jedoch nicht genau zu, und wir wollen deshalb eine allgemeine Integration methode einer Prüfung unterziehen:

Fast alle bekannten Verfahren benützen Beziehungen, welche in der allgemeinen Formel enthalten sind:

$$\begin{vmatrix} y_{k+1} = \sum_{-m}^{0} a_{0j}^{(0)} y_{k+j} + h \sum_{-m}^{1} a_{1j}^{(0)} y_{k+j}' + \dots + h^{N} \sum_{-m}^{1} a_{1j}^{(0)} y_{k+j}^{(N)}, \\ y_{k+1}' = \sum_{-m}^{0} a_{1j}^{(1)} y_{k+j}' + h \sum_{-m}^{1} a_{2j}^{(1)} y_{k+j}'' + \dots + h^{N-1} \sum_{-m}^{1} a_{Nj}^{(1)} y_{k+j}^{(N)}, \\ \vdots \\ y_{k+1}^{n-1} = \sum_{-m}^{0} a_{n-1,j}^{(n-1)} y_{k+j}^{(n-1)} + h \sum_{-m}^{1} a_{nj}^{(n-1)} y_{k+j}^{(n)} + \dots + h^{N-n+1} \sum_{-m}^{1} a_{Nj}^{(n-1)} y_{k+j}^{(N)}. \end{vmatrix}$$

$$(7)$$

Dazu kommen Differentialgleichungen

welche zusammen mit den Gleichungen (7) N+1 Gleichungen für die N+1 Unzekannten $y_{k+1}, y_{k+1}', \dots, y_{k+1}^{(N)}$ bilden. Im allgemeinen ist N=n, doch benützt W. E. MILNE in der erwähnten Methode¹) höhere Ableitungen, als in der Differentialgleichung auftreten. Er differenziert diese deshalb mehrmals, um die nötige Anzahl von Beziehungen zu erhalten. Man kann also die Gleichungen $\overline{\gamma}_{n+1}$... bis F_N durch Differenzieren der Ausgangsgleichung F_n erhalten.

Wenn man in den Gleichungen (7) noch alles auf eine Seite bringt, so lauten die Variationsgleichungen für das ganze System (7) und (8) offenbar (mit $a_{i,1}^{(r)} = -1$):

$$\sum_{\mu=i}^{N} \sum_{j=-m}^{1} a_{\mu j}^{(i)} h^{\mu-i} \eta_{k+j}^{(\mu)} = 0 , \qquad (i = 0, 1, ..., n-1)$$

$$\int_{0}^{t} \frac{\partial^{i} F_{i}}{\partial y^{(\mu)}} \, \eta_{1}^{(\mu)} \qquad \qquad = 0 \,. \qquad \qquad (i = n, \, n+1, \, ..., \, N)$$

: Iacht man hiefür den Ansatz $\eta_j^{(\mu)} = p_\mu \lambda^j$, so erhält man beim Einsetzen ein system von N+1 simultanen Gleichungen für die p_μ , die nur erfüllt sein können, wenn die Determinante des Systems verschwindet:

$$\sum_{\mu=i}^{N} \left(\sum_{j=-m}^{1} a_{\mu j}^{(i)} \lambda^{j} \right) h^{\mu-i} p_{\mu} = 0, \qquad (i = 0, 1, ..., n_{-1})$$

$$\sum_{0}^{i} \frac{\partial F_{i}}{\partial \gamma^{(\mu)}} p_{\mu} \qquad = 0. \qquad (i = n, n+1, ..., N)$$

)efiniert man noch mit den in den Formeln (7) auftretenden Koeffizienten $a_{\mu j}^{(i)}$ die funktionen

$$A_{i\mu}(\lambda) = \sum_{j=-m}^{1} a_{\mu j}^{(i)} \lambda^{j+m},$$

¹⁾ Fußnote 2 auf Seite 67.

wobei $A_{i\mu} \equiv 0$ für $\mu < i$, so lautet die charakteristische Determinante wie folg

Wenn das Verfahren ein Polynom i-ten Grades, das die Lösung einer Differeitialgleichung ist, samt seinen Ableitungen exakt wiedergeben soll, und dies daman fordern, so müssen die Bedingungen

$$y_j^{(i)} \equiv 1$$
, $y_j^{(i+1)} \equiv y_j^{(i+2)} \equiv y_j^{(i+3)} \equiv \ldots \equiv y_j^{(N)} \equiv 0$

verträglich sein. Daraus folgt aber durch Einsetzen in die *i*-te der Gleichunge (7): $\sum a_{ij}^{(i)}=0$, somit $A_{ii}(1)=0$.

Die Gleichung $D(\lambda)=0$, die über die Stabilität des Verfahrens entscheide muß nun n Lösungen in der Nähe von $\lambda=1$ haben, entsprechend den n unabhärgigen Lösungen der Variationsgleichung. In der Tat findet man für h=0, wich $D(\lambda)$ bis auf einen Faktor auf $A_{00} \cdot A_{11} \cdots A_{n-1, n-1}$ reduziert, daß $\lambda=1$ wege

 $A_{ii}(1) = 0$ eine *n*-fache Nullstelle von $D(\lambda)$ ist.

Alle andern Nullstellen von $D(\lambda)$ entsprechen damit eingeschleppten Lösunge der Differenzengleichung und müssen, damit das Verfahren stabil ist, für hir reichend kleines h im Innern oder höchstens auf dem Rand des Einheitskreiseliegen. Dies ist sicher dann der Fall, wenn für h=0 alle Nullstellen von $D(\lambda)$ in Innern des Einheitskreises liegen, und sicher nicht, wenn einzelne außerhallsind. Somit

Hinreichende Bedingung für Stabilität des Verfahrens (7) für genügend kleines Sämtliche Funktionen

$$A_{ii}(\lambda) = \sum_{-m}^{1} a_{ij}^{(i)} \lambda^{j+m}$$

besitzen außer der trivialen einfachen Nullstelle $\lambda=1$ nur noch solche Nullstelle mit $|\lambda|<1$.

Notwendige Bedingung: Keine der Funktionen $A_{ii}(\lambda)$ besitzt eine Nullstellaußerhalb des Einheitskreises¹).

Die übrigen Funktionen $A_{i\mu}(\lambda)$ können die Stabilität nur beeinflussen, wen zwar die notwendige, aber nicht die hinreichende Bedingung erfüllt ist.

¹⁾ J. Todd hat Verfahren betrachtet, welche nicht einmal die notwendige Bedingung erfülle Die erhaltene Lösung wird dann schon nach wenigen Schritten völlig unbrauchbar.

Anwendungen

Für die Formel (1) ergibt sich (es ist N = n = 1, m = 1):

$$A_{00} = -\lambda^2 + 1$$
 , $A_{01} = \frac{1}{3} (\lambda^2 + 4 \lambda + 1)$. $F_1 = y' - f(x, y)$.

Somit

$$D(\lambda) = egin{bmatrix} 1 - \lambda^2 & rac{h}{3} \left(\lambda^2 + 4 \lambda + 1
ight) \\ -f_y & 1 \end{bmatrix}.$$

Daß A_{00} zwei Nullstellen mit $\lambda \mid = 1$ hat, mahnt schon zur Vorsicht, aber außerlem liest man sofort ab, daß $D(\lambda)$ für $f_y < 0$ und $\lambda = -1$ positiv ist, für $\lambda = -\infty$ lagegen negativ. Somit liegt eine Nullstelle links von -1; das Verfahren ist nstabil.

Für die Formel 5.42 im erwähnten Buche von Collatz (S. 81) ist (N = n = 4, n = 1)

$$\begin{split} F_4 &= y^{\text{IV}} - f(x, y, y', y'', y''') \\ A_{00} &= A_{22} = -(\lambda - 1)^2 \,, \\ A_{11} &= A_{33} = -\lambda^2 + 1 \,, \\ A_{12} &= 2\lambda \,, \\ A_{34} &= \frac{1}{3} \left(\lambda^2 + 4 \,\lambda + 1\right) \,. \end{split}$$

.lle andern $A_{i\mu}$ kommen nur mit mindestens h^2 in der Determinante vor. Somit t bis auf Glieder mit h^2 :

ür $\lambda = -\infty$ ist *D positiv*, für $\lambda = -1 - \varepsilon$ hat *D* das Vorzeichen von

elches für $f_{i'''} < 0$ und hinreichend kleines ε negativ ist. Also ist dieses Verfahren stabil für $f_{v'''} < 0$.

Anderseits ist es leicht, Verfahren anzugeben, die immer stabil sind. Man aucht nur die Formeln (7) so zu gestalten, daß jede Zeile mit

$$y_{k+1}^{(i)} = y_k^{(i)} + h \sum_{-m}^{1} a_{i+1,j}^{(i)} y_{j+k}^{(i+1)} + h^2 \dots$$
 $(i = 0, 1, ..., n-1)$

ginnt. Damit ist $A_{ii}(\lambda) = -\lambda^{m+1} + \lambda^m$ und hat somit nur die triviale Nullstelle l=1 auf dem Rande des Einheitskreises.

The author gives some examples and a criterion for stability of integrati methods. This criterion is then applied to some well-known integration formula

(Eingegangen: 25, 9, 1951.)

Varia - Miscellaneous - Divers

8. Internationaler Kongreß für theoretische und angewandte Mechan

Der Kongreß wird vom 20. bis 28. August 1952 an der Universität Istantik stattfinden und die Sektionen

I. Elasticity, Plasticity, Rheology,

II. Fluid Mechanics (Aerodynamics, Hydrodynamics),

III. Mechanics of Solids (Ballistics, Vibrations, Friction, Lubrication),

IV. Statistical Mechanics, Thermodynamics, Heat-Transfer,

V. Mathematics of Physics and Mechanics, Methods of Computation umfassen. Interessenten erhalten Auskunft (insbesondere auch über die vorssehenen Reiseerleichterungen) durch: The Eighth International Congress Theoretical and Applied Mechanics, P. O. Box 245, Istanbul, Turkey.

H. FAVRE und H. ZIEGLE

4. Kongreß der IVBH, 1952

Die Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau führt ihr 4. Kongreß vom 24. August bis 1. September 1952 in Cambridge und Lond, durch. Es werden sechs Arbeitssitzungen durchgeführt, die den folgenden Them gewidmet sind:

A. Allgemeine Fragen.

I. Bemessungsgrundlagen und Sicherheit.

II. Entwicklung der Berechnungsmethoden.

B. Stahlbau.

I. Grundlagen.

II. Praktische Anwendungen.

C. Massivbau.

I. Grundlagen und Eigenschaften des Betons.

II. Aktuelle Probleme des Betons und des Eisenbetons; vorgespannter Betc Teilnahme am Kongreß setzt die Mitgliedschaft der IVBH. voraus (Jahrebeitrag Fr. 10.— für Einzelmitglieder); Anmeldungen sind zu richten an die Sekretariat der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochb (IVBH. 1952), ETH., Zürich.

Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques

Response of Physical Systems. By John D. Trimmer (John Wiley & Sons, Tew York 1950). 268 pp., 93 figs.; \$5.—.

Das Buch beginnt mit einer sehr allgemein gehaltenen Diskussion der folgenen Art. Ein beliebiges System sei irgendeiner Einwirkung (forcing) ausgesetzt nd erzeuge eine bestimmte Wirkung (response). Als Beispiel zitiert der Vertsser die Familie Jones, die von einer Stadt nach einer anderen umzieht (forcing) nd durch diese Einwirkung ihre Sprachgewohnheiten ändert (response). Ein bleh allgemeines Schema, in das selbst die Änderungen der Sprachgewohnheiten er Familie Jones hineinpassen, läßt sich ohne Zweifel aufstellen, doch erscheint fraglich, ob dadurch unsere Erkenntnis in irgendeiner Form erweitert wird. uch der Verfasser muß nach dieser sehr allgemeinen Einführung zu «üblichen», ohldefinierten Systemen übergehen. In der Folge werden eine Reihe verhältnistäßig einfacher Anordnungen aus verschiedenen Gebieten der Physik auf ihr erhalten untersucht, falls wir eine Wirkung auf ein solches System ausüben. die sich gleichbleibenden Methoden der mathematischen Behandlung bilden die zganische Verbindung zwischen den einzelnen diskutierten Gebieten.

Mit einem kurzen Abschnitt über nichtlineare Systeme und über die Verwenung der Laplace-Transformation zur Behandlung linearer Anordnungen schließt as Buch.

E. Baldinger

Vorlesungen über höhere Mathematik. Bd. 2. Von A. Duschek (Springererlag, Wien 1950). 386 S.; sFr. 33.90.

In diesem zweiten Band der Vorlesungen Duscheks sind die unendlichen eihen, Funktionen mehrerer Veränderlichen, einige fundamentale Ergebnisse er Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlertheorie und zusgleichsrechnung sowie die lineare Algebra und Tensorfelder dargestellt. Die orlesungen sind im wesentlichen für solche Zuhörer bestimmt, die Mathematik cht als Selbstzweck betreiben, wie Ingenieure, Physiker, Chemiker und andere, us diesem Grunde werden die Resultate vor der Darstellung der exakten Beweise ierst nach Möglichkeit anschaulich begründet. Aufgaben samt Lösungen eruben es dem Leser, sich am dargestellten Stoff zu üben.

Die Darstellung des Stoffes ist sauber und klar, seine Auswahl für solche Vorsungen von allgemein orientierendem Charakter zweckmäßig. Auch Ergebnisser modernen mathematischen Forschung wurden geschickt verarbeitet. Aus len diesen Gründen dürfen diese Vorlesungen bestens empfohlen werden.

W. Saxer

Praktische Funktionenlehre, Bd. 1: Elementare und elementare transzennte Funktionen. Von F. Tölke (Springer-Verlag, Berlin 1950). 440 S., 178 Abb.; M 39.—.

Der erste Teil des Bandes befaßt sich mit den sogenannten elementaren Funkonen; es werden Differentialgleichungen, denen diese Funktionen genügen, und
udere vielgebrauchte Beziehungen zusammengestellt. Ferner enthält dieser Abhnitt eine reiche Auswahl an unbestimmten Integralen von trigonometrischen,
prerbolischen, zyklometrischen und Wurzelausdrücken, welche dem Praktiker
hr willkommen sein dürften. Den Abschluß des ersten Teils bilden Tabellen
er elementaren Funktionen.

Z

Im zweiten Teil wird gezeigt, wie man unter Herbeiziehung von Fouri-Reihen ausgewählte Aufgaben der Technik löst. Soweit bei diesen Aufgaben ne Funktionen auftreten, werden sie eingehend behandelt und tabelliert. Insbesidere werden Thetafunktionen und ihre Integrale durch Betrachtung von Wärrleitungsaufgaben und die Kugelfunktionen an Hand von Aufgaben über belast Membrane eingeführt. Ferner werden Platten- und Balkenprobleme behand.

Neuartig an diesem Werk ist vor allem die durch Vereinigung von Theo: Beispielen und Funktionstafeln erreichte Anschaulichkeit. H. Rutishau

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von L. Viero und G. Lochs (Universitätsverlag Wagner, Innsbruck 1951). 415 S., 159 Ab sFr. 28,-,

Das Buch vermittelt, unter Beschränkung auf das Wesentliche, eine Einfirung in die Differentialrechnung der Funktionen mit einer und mehreren Varblen und in die Integralrechnung der Funktionen mit einer Variablen, umfaßt a den Stoff, der normalerweise in den beiden ersten Semestern geboten wird. Ein schaltet ist noch ein Kapitel über Vektorrechnung. Einige Übungsaufgahdienen der Festigung des Wissens. Bemerkenswert ist die Sorgfalt, mit der no Begriffe eingeführt werden und die Beispiele durchgerechnet sind. Eine gewißerte der Darstellung erleichtert dem Studierenden – an den sich das Buch, sehr empfehlenswerte Hilfe, wendet – das Erarbeiten des Stoffes.

E. Roth-Desmert

Der Kreisel; seine Theorie und seine Anwendungen. Von R. GRAMEL (Springer-Verlag, Berlin 1950). 1. Band: Die Theorie des Kreisels, 281 137 Abb.; 2. Band: Die Anwendungen des Kreisels, 268 S., 133 Abb.; DM 3 pro Band.

In der umfangreichen Literatur auf dem Gebiete der Mechanik ist der Kreisel (und mit ihm die höhere Kinetik des starren Körpers überhaupt) von jeher nur nur wenigen Werken vertreten gewesen. Um die Jahrhundertwende schuler F. Klein und A. Sommerfeld mit ihrer Theorie des Kreisels das heute nd anerkannte, aber sehr abstrakt gehaltene Hauptwerk. Im Jahre 1920 stellte ihr R. Grammel mit seinem Kreisel ein Buch zur Seite, das sich mit seiner betom anschaulichen Haltung und seiner Darstellung der wichtigsten technischen Arwendungen an den Ingenieur richtete. Dieses Werk, das großer Nachfrage beginnete und schon seit Mitte der dreißiger Jahre vergriffen ist, liegt nun in ein zweibändigen, stark umgearbeiteten und modernisierten Neuauflage vor.

In der neuen Gliederung umfaßt der erste Band im wesentlichen die Theorider zweite die technischen Anwendungen des Kreisels. Im theoretischen Balwird nach einer ausführlichen Grundlegung aus didaktischen Gründen erst einsymmetrische und dann der unsymmetrische Kreisel behandelt. Ein weite Kapitel befaßt sich mit allgemeineren Problemen und enthält insbesondere einsehr wertvolle grundsätzliche Untersuchung gyroskopischer Systeme. Ein Anhalist der Darstellung der Bewegung durch elliptische Funktionen gewidmet. Litzweite Band gibt eine reichhaltige Übersicht der technischen Probleme und Alwendungen. Er behandelt die (meist unbeabsichtigten) Kreiselwirkungen Radsätzen, wie sie insbesondere im Fahrzeug- und Flugzeugbau vorkommet sodann die Kreiselgeräte (Kreiselkompasse, künstliche Horizonte, Wende- und Lagekreisel) und schließlich die unmittelbaren gyroskopischen Stabilisatoren.

Klar, anschaulich und doch kompromißlos streng geschrieben, im Theore schen bis zu den bekannten Lösungen führend und ebenso gründlich in é

ehandlung der technischen Probleme, dürfte dieses Werk auf längere Zeit das ehrbuch vom Kreisel werden. H. Ziegler

Methoden der praktischen Analysis. Von F. A. Willers (Walter de ruyter & Co., Berlin 1950) 410 S., DM. 24.-.

Das vorliegende Buch stellt eine verbesserte und erweiterte Auflage des 028 zum erstenmal erschienenen Werkes dar. Neu sind die Abschnitte über die tegration von Integralgleichungen zweiter Art, über die Auswertung uneigent-:her Integrale sowie über die iterative Lösung linearer Gleichungssysteme. arüber hinaus wurde das ganze Kapitel VI mehr den heutigen Bedürfnissen anpaßt. Im ersten Kapitel wird auf die Grundlagen und Hilfsmittel des Zahlenchnens eingegangen, wobei auch die Nomographie zu Worte kommt. Mit besonrer Sorgfalt werden im zweiten Kapitel die Interpolation und die damit zusamenhängende numerische Integration und Differentiation behandelt. Sodann gen Betrachtungen über graphische Integration unter Einschluß mechanischer lfsmittel. Kapitel IV ist der Ausgleichsrechnung (Methode der kleinsten Quaate) und der harmonischen Analyse gewidmet, Kapitel V den höheren Gleiungen und linearen Gleichungssystemen. In Kapitel VI schließlich sind die rfahren zur genäherten Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen besondere die Methoden von Runge-Kutta und Adams - dargestellt, wobei ch partielle Differentialgleichungen und Eigenwertproblenie gestreift werden.

Anwendungen der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. in F. Oberhettinger und W. Magnus (Springer-Verlag, Berlin 1949). 126 S., Abb., DM. 15.60.

Der Akzent liegt auf Anwendung. Auch auf eine kurze Einführung in die eorie konnten die Verfasser dank der vorhandenen ausgezeichneten Lehrbucher zichten. Das erste Kapitel bringt deshalb lediglich eine knappe Zusammenllung der Definitionen und Formeln elliptischer Funktionen nach JAKOBI und EIERSTRASS, der Thetafunktionen und der elliptischen Integrale. Das zweite :pitel behandelt die konformen Abbildungen, die den elliptischen Funktionen gänglich sind, vor allem polygonaler Gebiete, und die Berechnung der zugehöri-11 Greenschen Funktion. Die Anwendungen auf elektrostatische Probleme Kapitel) betreffen vor allem die Kapazität zweidimensionaler Kondensatoren 1 das Feld von linearen und quadratischen Drahtgittern. Die aerodynamischen ispiele (4. Kapitel) handeln von der Bewegung von Wirbelsystemen und vom agflügel im Windkanal, während das letzte Kapitel Beispiele vermischten Intes bringt, von denen die Tschebyscheffsche Approximation in einem für die eorie der elektrischen Filter wichtigen Fall besonders zu erwähnen ist.

Die verschiedenen Fragen sind sehr sorgfältig behandelt und bis zum formel-Bigen Schlußresultat durchgeführt. So enthält das Buch eine Menge von Anungen wie durchgerechneter Beispiele. A. Pfluger

Vorstufe zur theoretischen Physik. Von R. Becker (Springer-Verlag, rlin 1950), 172 S., 94 Abb.; DM 7.50.

Die erste Bekanntschaft mit einem neuen Buch vollzieht sich meist in der ise, daß man sich das Inhaltsverzeichnis ansieht. Im vorliegenden Fall erlebt n dabei gleich eine Überraschung. Die vier Hauptabschnitte des Buches tragen die Überschriften: Aus der Mechanik; Schwingungen und Wellen; Aus der Wär lehre; Mathematische Erinnerungen und Beispiele. Wo, wird sich der Le fragen, bleiben die Elektrizitätslehre, die Optik, die Atomphysik usw.? Was das Buch, in dem einige willkürlich herausgegriffene spezielle Probleme der chanik und der Wärmelehre ausführlich besprochen und durchgerechnet sit Offensichtlich will es kein vollständiges Lehrbuch der theoretischen Physik s von denen es viele gibt; der Verfasser verfolgt vielmehr ein anderes Ziel. Es g ihm darum, bei jungen Physikstudenten Sinn und Verständnis für die mat matische Formulierung physikalischer Tatbestände und Gesetze zu wecken. Notwendigkeit eines Buches, welches diesem Zwecke dient, ergibt sich aus Tatsache, daß einerseits in mathematischen Vorlesungen und Übungen oft wenig Gelegenheit geboten wird, konkrete physikalische Probleme zu diskutien während andererseits in den Vorlesungen über Experimentalphysik ihre stre mathematische Behandlung zu kurz kommt. Über diese je nach Hochschule m oder weniger große Kluft schlägt das Buch eine Brücke; und dies geschieht Erfolg.

Die behandelten Beispiele sind gut gewählt. Der Text ist klar und äuße lebendig abgefaßt, und der Leser wird in anregender Art persönlich angesprochund zu Mitarbeit und Nachdenken aufgefordert. Jeder Student, der den daz botenen Stoff gründlich durcharbeitet, wird großen Nutzen daraus ziehen sich den Zugang zur reinen theoretischen Physik erheblich erleichtern. G. Bis

Die Welt der Vektoren. Von F. OLLENDORFF (Springer-Verlag, Wien 1944 470 S., 68 Abb.; sFr. 39.-.

Wie der Verfasser im Untertitel anführt, umfaßt das vorliegende Werk einführung in die Theorie und Anwendung der Vektoren, Tensoren und Opertoren. Es ist die Frucht der Erkenntnis, daß für das Studium der exakten Nauwissenschaften, insbesondere aber der theoretischen Physik, die bisher üblibasis der Vektorlehre zu schmal geworden ist. Inhaltsmäßig nimmt das Weine Mittelstellung ein zwischen einem Lehrbuch der reinen Mathematik weinem Lehrbuch der theoretischen Physik.

Die einzelnen Kapitel befassen sich mit folgenden Gegenständen: Darstellider elementaren Vektorrechnung im dreidimensionalen Raum; Vektoranaliüber der euklidischen Gruppe; Vektoralgebra im affinen Raum von n Dinssionen; Tensoralgebra und Tensoranalysis über der affinen Gruppe; Darstellider Grundlagen der Riemannschen Geometrie; Einführung in die spezielle Ritivitätstheorie; der Hilbertsche Raum und die Theorie der Operatoren (Inquadratische komplexgliedrige Matrizen). In die einzelnen Kapitel sind zureiche längere und kürzere Abschnitte über Anwendungen des Vektortensorkalküls in der theoretischen Physik, speziell der Elektrodynamik und Elastizitätstheorie, eingeflochten.

Das Buch ist für fortgeschrittene Leser geschrieben; bereits im ersten Kap wird ohne weitere Erklärungen die Sprache der Indizes verwendet. Durch Zusammenfassung von Theorie und Anwendung des Vektor- und Tensorkallverschafft das Werk einen guten Überblick über diese mathematische Diszip welche zum Verständnis des heutigen physikalischen Weltbildes unbedingt rwendig ist.

M. Je

A Program of Physical Research in Classical Mechanics

By CLIFFORD A. TRUESDELL, Bloomington, Indiana1)

By "classical mechanics" I mean that range in theory and experiment of notion of material bodies which is governed by the classical forms of the mass, nomentum, and energy principles. The too common opinion that the physics f this subject is totally understood rests upon a misconception that classical mechanics is the science of mass-points obeying the Hamiltonian equations. In fact it is not mass-point mechanics, but continuum mechanics, which contains he basic expression of the classical ideas. The mass-point theory is insufficiently physical: on the one hand, really small physical matter (electrons, rotons, etc.) fails to obey its postulates even as a first approximation, while, on the other, the behavior of large physical masses (rubber balls, gas spheres, vers, etc.) is described but incompletely by the mass-point equations, which pply strictly only to the motion of their centres of mass. The gross phenonena observable in macroscopic bodies under ordinary conditions satisfy the assical mass and momentum laws without sensible error, whether these be ipplied to the whole body or to any of its macroscopic portions.

A relic of the last century's views is the common careless claim that the shavior of gross matter can be predicted from the mass-point equations if the intermolecular forces be known. If referred to the Newtonian mass-point equations, this claim is simply false, since the ultimate particles do not obey them; referred to the quantum-mechanical equations, it is on the one hand evidence nat classical mechanics is continuum mechanics, since the classical conservation principles hold for finite portions of matter even though not holding for the elementary particles, but, on the other hand, to attempt to describe the low of rivers or the spring of rubber in terms of the quantum mechanics of the molecules would lead to useless and indeed illusory complications. Continum mechanics is a physically realistic discipline: when a physical mass opproximates the mathematical concept of a continuous body, its behavior is prectly predicted by the mathematical equations, and the theory begins to till only when applied to phenomena in which account has to be taken of the dividual molecules, which it completely overlooks.

Since classical mechanics is a theory physically adequate only for gross nenomena, its basic laws or axioms should be expressed in terms of bodies of nite volume. From some text books one might gain the impression that it is

¹⁾ Graduate Institute for Applied Mathematics, Indiana University. This paper was written the Applied Mathematics Branch, Mechanics Division, U.S. Naval Research Laboratory, ashington, D.C.

possible to deduce the laws of continuum mechanics from the mass-point equations. This view is false¹): continuum mechanics is in fact a more general theothan mass-point mechanics. From continuum mechanics it may be shown that the mass-point equations are satisfied by the centre of mass of any finite body and hence mass-point mechanics is an approximate theory appropriate to trather degenerate case when the motion of a body about and relative to determine of mass may be neglected.

The realization that the axioms of classical mechanics should be phrase in terms of continuous media rather than mass-points is not new. At the suggestion of Felix Klein, such a formulation was constructed long ago by Hamel In this more general theory it is not force, but *stress*, which is of principal importance²).

This notion once achieved, we may use the degenerate case of mass-poimechanics to point the way. The mass-point equations $f = m \, a$, $f_{ij} = -f_{ji}$ aby themselves insufficient to solve any particular problem; to obtain a determinate situation we usually specify the nature of the forces. Each particular of forces defines an ideal system: heavy particle, harmonic oscillator, etc., ideal system intended to represent certain physical bodies. In general classic mechanics the momentum principle was shown by CAUCHY to assume the form

$$\varrho \boldsymbol{a} = \varrho \boldsymbol{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_c,$$

1) It is commonly presented in one of two ways:

(a) Let dV be a "volume element" large enough to contain a very great number of element particles, but small enough to be regarded as infinitesimal. Then the density ϱ at dV is the remass/volume. If \mathcal{F} be the net force per unit volume acting on dV, by regarding ϱ dV as a mapping we have $m = \varrho = 0$ and m = 0 and m = 0. So that $\varrho = 0$.

(b) Let dV be an ordinary mathematical volume element, which can rigorously approach zd and suppose a continuous density ϱ exists. Then if we can regard the mass-point laws as apply

equally to mathematical volume elements, we have $\varrho \, a \, dV = \mathcal{G} \, dV$.

The first viewpoint involves obvious logical and physical contradictions, and must be regaras purely heuristic: if dV do not approach zero it cannot be identified with an integrand and ℓ not a well-defined quantity; if dV do approach zero it cannot contain a large number of elements particles, but if it do not contain a large number of these particles it cannot definitely be said contain or not to contain any particles at all, but only to have a probability of containing a cert number of particles, and, further, quantum effects prevent us from using f = m a in any case. fact, the first viewpoint is simply contradictory both to common sense and to the now acceptive of the constitution of matter. The second viewpoint, which is that of Euler and Caucidoes not derive continuum mechanics at all: rather, it postulates the laws of continuum mechanics applicable analogues of the mass-point equations.

²) In this way classical mechanics becomes a proper first approximation to relativistic mechan Cf. M. von Laue, Die Relativitätstheorie, vol. I, 3rd ed. (F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 19 § 26: «Sodann aber ist das übliche anschauliche Verfahren, die Dynamik der Kontinua auf die Massenpunktes zurückzuführen, schon in der Newtonschen Mechanik schweren axiomatisc. Bedenken ausgesetzt, während umgekehrt der Grenzübergang vom Kontinuum zum Massenpudurchaus einwandfrei ist. Alle diese Bedenken würden sich auch auf die Relativitätstheorie ültragen, ja sie werden hier sogar erheblich verstärkt; es ist nämlich überhaupt nicht möglich, je Verfahren einzuschlagen. Denn die Newtonsche Mechanik gilt wohl für den Massenpunkt im Grefall q = 0, für das Kontinuum aber wäre diese Aussage im allgemeinen falsch.» (This passage önot occur in the first edition.)

where T is the stress matrix, T_c is its conjugate, ϱ is the density, and F is the extraneous force field. These equations, like $f = m \ \alpha$ and $f_{ij} = -f_{ji}$, are also quite insufficient for the solution of any particular problem. In first presenting the basic equations (1) Cauchy¹) remarked that to obtain a determinate system we must know in addition the nature of the stress. Each specification of T defines an ideal material, designed to represent certain physical materials. The best known ideal materials are the perfect fluid, the linear viscous fluid, and the linear elastic solid.

Within classical mechanics in this general sense occur two subjects of intensive current research: plastic deformation and turbulent flow. In this note wish to point out that also the fields of purely elastic and purely viscous behavior still offer challenges to the physicist. Elsewhere I shall give a detailed nathematical treatment and bibliography. Here I wish to emphasize rather he physical principles and the physical novelties. So as to smooth the path of the reader not familiar with the theory of continuous media and the techniques of tensor analysis which are virtual prerequisites for modern mechanics, shall oversimplify, begging therefore the indulgence of the specialist, for whom his paper is not designed. I hope that what little I can present, however, will procurage the reader to question the all too common assumption that because hysical matter is composed of molecules, a theory based on the crudest and nost unrealistic molecular hypothesis is automatically preferable to any continuum theory. Indeed, I contend that gross phenomena are most naturally, iccurately, and elegantly represented by gross hypotheses alone.

Going back to the most primitive physical concept of elasticity, we say that a wire be extended then its longitudinal stress σ is proportional to its longitudinal strain e according to Hooke's law:

$$\sigma = E e , \qquad (2)$$

there E is a constant. If a wire be twisted there is a similar Hooke's law,

$$\tau = \eta \gamma , \qquad (3)$$

elating the shearing stress τ to the shearing strain or angle of twist γ . For luids a proposal of Newton leads to an equation of form (3), with γ to be a terpreted as the rate of shearing. These two laws are easily generalized to

¹⁾ A. CAUCHY, Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, ustiques ou non élastiques, Bull. Soc. Philomath. Paris 1823, pp. 9–13:

[«]Mais, dans le cas général, ces équations renferment six fonctions inconnues [the stresses] des ordonnées x, y, z. Il reste à déterminer les valeurs de ces six inconnues; mais la solution de ce rnier problème varie suivant la nature du corps et son élasticité plus ou moins parfaite.»

Cf. R. von Mises, Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Kontinua, Proc. d int. Congr. appl. Mech., Stockholm, 2, 1–9 (1930).

yield the classical equations of elasticity:

$$T = \lambda E_s \mathbf{1} + 2 \mu E_s$$

and of fluid dynamics:

$$T = - p \mathbf{1} + \lambda \mathbf{D}_s \mathbf{1} + 2 \mu \mathbf{D}. \tag{}$$

In the former, E is the infinitesimal strain matrix and E_s is its scalar or trace while in the latter p is the pressure, $\mathbf{1}$ is the unit matrix, \mathbf{D} is the rate deformation tensor, and \mathbf{D}_s is its trace; the quantities λ and μ , functions of the thermodynamic state, in (4) are of dimension $\mathbf{ML}^{-1}\mathbf{T}^{-2}$, and in (5) are dimension $\mathbf{ML}^{-1}\mathbf{T}^{-1}$. The two laws (4) and (5) are then commonly said to founded upon experiments.

What experiments? Perhaps Hooke deduced (2) from experiments, by there is no evidence that Newton's proposal was anything more than "hypothesis", as he indeed called it. The general equations (4) and (5) well discovered by theory alone. NAVIER and Poisson employed the concept of body as system of mass-points obeying a hypothetical force law, now known! be wrong. CAUCHY gave both molecular and continuum derivations. Stokal used rough molecular arguments to reach a linear rather than a more comp cated result by continuum methods. In none of the original treatments is the any suggestion that the basic laws are established by experiments; rather, the are derived from plausible hypotheses drawn out of common experience¹). all but Stokes' there is explicit statement that the linear relation is only first approximation. The founders of these subjects required no experiments tell them that a linear function is often a good approximation for a more elalirate one in a narrow range, and that the consequences of a linear relation do thus worth exploring, but to be regarded as tentative only. The brazen by completely vague reference to experimental evidence in a typical text book to be compared with the cautious hypothesis or approximation of the pione. Appeal to experiment to shore up unfounded or overwrought theory is a vaca ritual, as when a pious murderer recites a brief prayer for divine protection before cutting his victim's throat.

What experiments? It is common experience that if a steel rod be pulled twisted, the linear relations (2) and (3) are valid only for very small strain For steel and most structural materials, however, yield or rupture occurs a

¹⁾ The work of Euler and Cauchy in mechanics is sometimes deprecated in physical tre ments by the label "mathematics". As a single specimen of the type of thinking which led to major discoveries in continuum mechanics the following passage from Stokes, the most "physic of the pioneers, may be quoted: "Are we then to suppose that when a solid is constrained it has tendency to relieve itself from the state of constraint, in consequence of its molecules tending toware new relative positions, provided the amount of constraint be very small? It appears to me to much more natural to suppose a priori that there should be some such tendency." From § III On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion Elastic Solids, Trans. Cambridge Phil. Soc. 8, 287–319 (1844–9) = Papers, vol. 1, p. 75–129.

or very small strains, so that (2) and (3) describe adequately what purely elastic behavior there is. If the experiment be performed upon a long wire, nowever, then purely elastic twisting through one or more revolutions is possible, but does not obey the linear relation (3). There is an easy answer: 'retain the non-linear terms'', i. e.¹).

$$\tau = \eta \, \gamma + \eta' \, \gamma^3 + \cdots, \tag{6}$$

or possibly employ more complicated functions of γ . This sort of curve-fitting is the subject of hundreds of semi-empirical papers. The linear relation (3) is then valid for small strains: $\gamma \ll 1$. In fluid dynamics the situation is similar, and the rheological literature abounds in formulae like (6). We cannot say, however, that the linear relation (3) is valid for "small rates of deformation", ince rate of deformation is not dimensionless and thus in any given motion may be given any numerical magnitude whatever simply by choice of the unit fitime. The range of validity of the linear approximation in fluid dynamics annot be settled without dimensional considerations. Twenty years ago Batesian warned us that existing "experimental tests" concerned degenerate situations (as in a viscometer) and served merely to verify the interconnections of ertain dimensionless parameters, thus failing entirely to discriminate between he classical laws of viscosity and the myriad other possible laws which would give rise to the same dimensionless parameters in the same degenerate situations.

The equations (2) and (3) are scalar in character, while both stress and crain are square matrices. If we approach the situations of simple extension nd simple shearing through the full matrix equations (4) and (5) we find that ne equations (2) and (3) are exact in the classical theories, but for (3) we btain also the following additional information: in the classical theories, a hearing strain (or rate of shearing) can be maintained by shearing stresses only. That is, in a shearing experiment, both the stress and the strain matrix are reportional to the matrix

there r is a measure of the amount of shear. Now it is at this very point that we one-dimensional approach indicated by (6) fails completely to reveal the

¹⁾ Here and subsequently, so as to avoid confusing the reader who is not familiar with finite isticity theory we gloss over the distinction between a shearing displacement and a shearing strain. nee the strain is a quadratic function of the displacement gradients, nonlinearity occurs in elasticate two different levels: in the expression for the strain, and in the stress-strain relations. Both ese nonlinearities give rise to Kelvin and Poynting effects and may be described in general terms lough with quantitative differences) by our discussion further on.

physics of the situation, for the researches of the curve-fitting type based up (6) or analogous expressions presuppose without any justification whatever the in the nonlinear theory also shearing stresses alone are sufficient to maintain shearing strains or rates of shearing.

What of the experiments? If the experiment be set up so as to measure or the effect predicted by the classical theory, obviously enough only the classical effect will be measured. All but a very, very few of the experiments alleged testing the classical laws of elasticity and viscosity may thus be discarded irrelevant. Indeed, to the best of my knowledge there are only four experiment prior to 1950 which give any pertinent information on this subject.

The first was conceived and executed by Poynting in 1909 to 1912. A st wire when twisted was found to increase in volume in proportion to the sque of the angle of twist. This effect, totally impossible within the classical line theory, had been predicted theoretically by Kelvin in 1883. Reynolds, we had discovered it independently, had called it dilatancy, "a definite change bulk, consequent on a definite change of shape". Reynolds illustrated the phenomenon by a model composed of rigid spheres packed together: "walking over wet sands the gloss disappears and the sand appears to dry owherever the foot is placed." Stating incorrectly that continuum methods counot predict this phenomenon, Reynolds regarded it as evidence that physic bodies are composed of small particles, and he spent many years in construction a theory of matter, The Sub-Mechanics of the Universe, based upon this mode one of the many molecular speculations whose dry bones litter the by-paths ophysics.

In the first Poynting experiment a change of length was observed alone with the change of volume. This change of length also is impossible within the classical linear theory. In order to separate these two effects, in 1913 Poyntil repeated the experiment, employing this time a rubber cord instead of a st wire. Rubber is an ideal medium for elastic studies because its perfectly elas range is enormous and its virtual incompressibility simplifies the theory. W: the rubber cord Poynting found that the change of volume was less than t experimental error, but now there was a much more noticeable change of leng proportional to the square of the angle of twist. In both the experiments the n effects appeared within the range of validity of the classical linear relation (Now the second power of γ cannot appear in the expansion (6), since reversi the sign of γ must reverse the sign of τ . Thus Poynting's experiments show the before there are quantitative departures from the classical shearing law, two qualitively new phenomena, not predicted at all by the classical theory, will make the appearance. Of course an experimenter seeking only the classical effects new notices these new phenomena. Poynting had preceded his experiments by theoretical treatment, which had happened to arise in connection with studies on radiation pressure, and thus he knew what to look for.

The third experiment was reported by RIVLIN in 1947. POYNTING'S results had been forgotten and RIVLIN discovered them anew. RIVLIN'S theoretical treatment was greatly superior, however, and he was able to predict the local surface stresses which would have to be supplied on the two ends of a cylinder in order to produce a purely torsional displacement, stresses which depend upon

the distance from the lixis. In the experiment figure 1) a short thick ylinder of rubber was wisted by metal plates ponded to its end. One of the plates was pierced by several holes, into which the rubber tended o bulge upward. The leight of the bulges was aken as proportional to he normal stresses1). Good agreement between heory and experiment vas obtained. This exeriment is, to the best f my knowledge, the irst locally quantitative xperiment on large two-

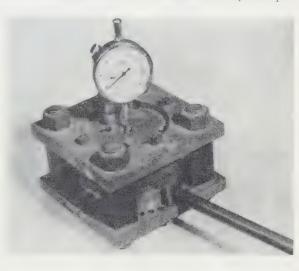


Fig. 1
RIVLIN'S Torsion Apparatus. (Photograph courtesy of Mr. RIVLIN.)

imensional elastic strain which has ever been performed.

The fourth experiment reveals an analogous behavior in fluids. According to the classical theory, a weightless fluid sheared between two concentric ircular cylinders flows in planes perpendicular to the axis, and except for a light capillary meniscus the free surface is plane. The profile of the region ecupied by the fluid is not changed by the motion, since gravity is neglected. For marked deviations from the classical prediction appear in the 1947 results of Weissenberg²), some of which are illustrated in figure 2. The free surface limbs up the sides of both of the cylinders and falls in the interspace³). This

¹⁾ Experimental difficulties prevented direct measurement of the forces required to flatten be surface by plugs pushed down into the holes.

²⁾ Note added in proof. This phenomenon was observed earlier by F. Garner: nd A. Nisson, lature 158, 634-635 (1946). A closely related effect is the swelling of a stream of fluid is uing om a straight pipe, first reported by A. Merrington, Nature (1943).

³⁾ So far as I know, these experiments have never been fully described in print, and it is fficult to draw specific conclusions from them. From the lines 3 and 6 it is perfectly plain nevereless that in order to produce in these liquids the horizontal free surface predicted by the classical eory when gravity is neglected, or the paraboloidal free surface resulting from the action of gravity, would be necessary to supply nonuniform normal pressures altogether absent in the classical eory of fluids.

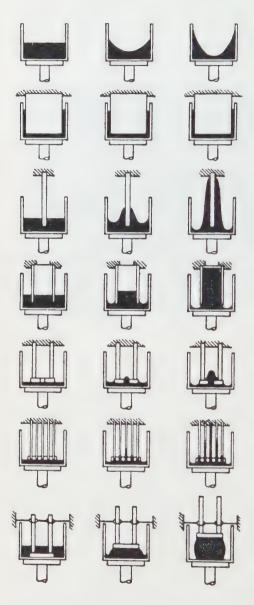


Fig. 2

Some of Weissenberg's Shearing Experiments (after Weissenberg).

phenomenon had been partially producted theoretically by Reiner : 1945, who dismissed it as "nevobserved".

During the last two years many more experiments on the large deformations of rubber and "non-New tonian" fluid flow have been reported. Since, while adding details concerning these long overlooked aspect of nature, they do not reveal any essential new phenomena beyon those already mentioned, I do not attempt to describe them.

The theoretical treatment appropriate to nonlinear theories of fluid and solids was indicated in vergeneral terms by Reiner in 194, whose result includes as a special case a notable earlier attempt to Boussines (1868). If the material be isotropic, the stress matrix T may be supposed to be a power series in the strain (or rate of deformation matrix Γ :

$$T = K_1 \Gamma + K_2 \Gamma^2 + K_3 \Gamma^3 + \cdots$$
, (3)

where K_1, K_2, K_3, \ldots are scalars. Thus matrix of Γ must satisfy its owns: Cayley-Hamilton equation, which follows a 3.3 matrix assumes the form

$$\Gamma^3 = \Pi\Pi \mathbf{1} - \Pi \Gamma + \Pi \Gamma^2,$$
 (§

where 1 is the unit matrix and the principal invariants I, II, and III at expressed in terms of the proper values Γ_i of Γ as follows:

$$\begin{split} \mathbf{I} &= \boldsymbol{\Gamma}_1 + \boldsymbol{\Gamma}_2 + \boldsymbol{\Gamma}_3 ,\\ \mathbf{II} &= \boldsymbol{\Gamma}_2 \, \boldsymbol{\Gamma}_3 + \boldsymbol{\Gamma}_3 \, \boldsymbol{\Gamma}_1 + \boldsymbol{\Gamma}_1 \, \boldsymbol{\Gamma}_2 ,\\ \mathbf{III} &= \boldsymbol{\Gamma}_1 \, \boldsymbol{\Gamma}_2 \, \boldsymbol{\Gamma}_3 . \end{split} \right) \tag{10}$$

By (9), we may eliminate the third and all higher powers of I from (8), so that here results simply

$$T = \mathcal{G}_0 \mathbf{1} + \mathcal{G}_1 \Gamma + \mathcal{G}_2 \Gamma^2, \tag{11}$$

where \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 are power series in I, II, III. Thus the stress matrix T is xactly a quadratic matrix function of the matrix Γ , with coefficients \mathcal{F}_i which re in general infinite series in the scalar invariants of Γ . If, for example, we rite out the terms of orders 1, 2, 3 in (10) we obtain

$$T = (\alpha + A I + B I^{2} + C II + D I^{3} + E I II + F III) 1$$

+ $(G + H I + K I^{2} + L II) \Gamma$
+ $(M + N I) \Gamma^{2}$. (12)

he linear terms yield the classical laws of elasticity and viscosity (4) and (5)' ne coefficients A and G being identifiable with the classical moduli λ and 2μ , or elasticity $\alpha = 0$, while for fluid dynamics $\alpha = -p$.

Now consider the case when the strain (or rate of deformation) matrix duces to the form (7). Then I = 0, $II = r^2$, III = 0, and (12) yields

$$T = (\alpha + C r^{2}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + r (G + L r^{2}) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + r^{2} M \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$
 (13)

he classical result, that T also is of the form (7), follows if C, L, and M be gligible. The two terms of second order in r represent the new phenomena not edicted at all by the classical theory: a hydrostatic pressure of magnitude $-Cr^2$ d normal tensions of magnitude M r^2 in the plane of the motion must be applied. If the hydrostatic pressure be wanting, the material will tend to intract or to expand, according to the sign of C, provided, of course, that it be impressible. If the normal stresses be wanting, the material will tend to prograte or to shorten, according to the sign of C. The first effect, in the fully ineral form presented here, I propose to call the Kelvin effect; the second, the prynting effect. These two effects thus appear as characteristic of nonlinear intinuum mechanics, whether for fluids or for solids. The physical interpretion of the terms occurring in (9) will of course depend upon what particular cory is being considered. The third order term, whose coefficient is C, simply diffies the magnitude of the classical object of measurement; it is identical the second term in the curve-fitting expansion (6), which thus blindly

¹⁾ In an *incompressible* material an arbitrary hydrostatic pressure (in effect, a Lagrangian ltiplier) may be added to the stress, and thus for incompressible materials the first term in (13) s not represent a new effect.

excludes the really beautiful and dramatic part of nonlinear mechanics tacitly assuming it does not exist.

From (13) follows a second result of primary physical significance: classical effect, the Kelvin effect, and the Poynting effect are governed by in pendent material qualities, since each of the coefficients, C, G, L, M occurs in crand only one term. Here is a piece of good fortune for theorist and experimentalike. From a knowledge of the classical viscosity coefficients of a fluid, example, we can conclude nothing regarding the magnitude of the Poyntiand Kelvin effects which that fluid will exhibit. At the same time, these seconder effects are available for direct measurement, in no way obscured by the simultaneous first order classical effect or by the third order correction to numerical value. It is plain, in fact, that to any accuracy whatever the Kelvand Poynting effects depend upon the even order coefficients, while the classical effect depends upon the odd order coefficients.

It is at first surprising that we have been able to conclude so much without ever defining strain, while there are many papers which give much attention to the supposed advantages of one or another type of strain measure. But fact, as Reiner pointed out, the general form (11) is independent of the choice strain measure Γ . While indeed the numerical values of the coefficients in the power series \mathcal{F}_i in (11) are different for different strain measures Γ , the general form is unaffected, and thus the same general conclusions will follow. If, as often proposed in empirical elasticity theories, $\mathcal{F}_2 = 0$ for a particular strain measure, then the Poynting effect is absent in a deformation which is a shear in strain in terms of Γ [i. e., in which Γ is of the form (7)], but it will appear a deformation which is a shearing strain with respect to some other strain measure Γ' .

Reconsider briefly the case of simple extension. The strain or rate of defination matrix is of the type

$$I = \begin{vmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix}$$

and in place of (13) there results

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 r + \mathcal{G}_2 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 r + \mathcal{G}_2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 s + \mathcal{G}_2 s^2 \end{pmatrix}, ($$

where \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 are power series in both r and s. The stress matrix T is of

¹⁾ In the case of elasticity these conclusions apply only to a shearing strain but not to a shear displacement (cf. footnote 1, page 83). It is the case of shearing displacement which is reimportant; but too elaborate to explain in a nontechnical survey. The result of the analysis a shearing displacement is qualitatively similar, however, to that given above.

ame form (14) as is Γ , so that while the classical effect experiences a compliated quantitative change, no qualitatively new phenomena appear. The modification in the classical value is of second order in r and s, however. Thus the nadequacy of the classical theories will appear more quickly in extension than n shear. Furthermore, the amount of the extension depends upon the values of the coefficients B, H, etc., which do not affect the outcome of a shearing experiment at all, so that the results of experiments on extension, no matter how recurate, are insufficient to predict the response of a material to shear, and viceersa. In general, more interesting and valuable information is obtainable from nearing and torsion than from extension.

We may now revert to an earlier question, the range of validity of the lassical theory of viscosity. We do not need to suppose the fluid isotropic. fore generally, in place of (8) we consider

$$\boldsymbol{T} = f(\boldsymbol{D}) , \qquad (16)$$

adicating that each component of T is a function of all the components of D. lince dim $T = M L^{-1} T^{-2}$, dim $D = T^{-1}$, it is evident that (16) is but an complete definition of a fluid: T must depend not only upon the tensor D, at also upon other quantities sufficient to yield a dimensionally invariant elationship. So long as these other quantities all be scalars, the analysis given pove for the isotropic case needs no modification: the additional scalars will spear along with I, II, III as additional arguments of the coefficients \mathcal{G}_i in 1). These scalars are to be of two types: (1) representatives of the thermosynamic state and (2) material constants defining the particular type of fluid. or the former we select the pressure ϕ and the temperature θ . As defining operties of the fluid itself we select a viscosity coefficient u, whose dimensions We M L⁻¹ T⁻¹, and a reference temperature θ_0 (e. g. boiling point at 1 atm.). 'e must now make an essential choice: either the fluid possesses a time constant viz., a material constant of dimension T, or it does not. A material possessing th a Young's modulus E and a viscosity μ always has a time constant, since $\operatorname{m} \mu / E - \mathsf{T}$.

We shall first work out the consequences of the existence of such a time nstant. The defining relation (16) is now amplified to read

$$\mathbf{T} = f(\mathbf{D}, t_0, \mu, \phi, \theta, \theta_0) . \tag{17}$$

ence

$$\frac{\boldsymbol{T}\,t_0}{\mu} = g(\boldsymbol{D}, \, t_0, \, \mu, \, p, \, \theta, \, \theta_0) \; . \tag{18}$$

ach component of the dimensionless matrix on the left is thus a function of quantities: the 9 components of D and the 5 scalars. Since these 14 quantities are composed of the 3 independent dimensions $M L^{-1} T^{-1}$, T, and θ , the

arguments of the dimensionless function g must reduce to 14 3-11 dimesionless ratios of these quantities. Such ratios are: the 9 components of t_0 the 2 scalars $p t_0 p_0$. Hence (18) reduces to the definitive form

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mu}{t_0} g\left(t_0 \boldsymbol{D}, \frac{p t_0}{\mu}, \frac{\theta}{\theta_0}\right) : \tag{1}$$

the stress T depends upon the rate of deformation D only through the dimensionl tensor t_0 D. A similarity parameter of the resulting theory is consequently

$$\mathbf{T}_{R} \equiv t_{0} D \tag{2}$$

where D is a typical rate of deformation, and the criterion for validity of t classical linear approximation is $\mathfrak{T}_R \ll 1$: the rate of deformation must be mismaller than the reciprocal time constant of the fluid. In fact, by expanding (in a power series we find that t_0 cancels out of the linear terms only, a hence the classical theory is the limiting case $t_0 \to 0$. It is accordingly of the great physical importance to clarify the nature and meaning of the time constant and to devise an experiment for measuring it 1). No information on this subjects known at present.

Consider now the second possibility, that no time constant t_0 exists. Both from phenomenological considerations and from the kinetic theory²) model a gas, this alternative might appear the more attractive. In place of (17) begin now with the defining equation

$$T = f(\mathbf{D}, \mu, \phi, \theta, \theta_0)$$
.

Hence

$$\frac{T}{p} = g(\mathbf{D}, \mu, p, \theta, \theta_0) . \tag{6}$$

An argument similar to that employed in the previous case now yields

$$\frac{\mathbf{T}}{p} = g\left(\frac{\mu \, \mathbf{D}}{p} \,,\, \frac{\theta}{\theta_0}\right) : \tag{3}$$

the ratio of stress to pressure depends upon rate of deformation \mathbf{D} , viscosity μ , α pressure p only through the dimensionless tensor μ $\mathbf{D}|p$. Since p does not occindependently upon the right, we conclude that the coefficients of viscosity of orders are independent of pressure, a result whose first approximation is \mathbf{w}^{μ}

¹⁾ Note added in proof. Since this article was written, the nature of the time constant been clarified and experiments for measuring it devised. See §§ 62, 67, 70, and 72 of my partie Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics, to appear in Nos. 1 and 2 of voof The Journal of Rational Mechanics and Analysis (1952).

²) It is perhaps necessary to remark that the Maxwellian relaxation time p/μ in the kinetheory is not a time constant in the sense used here, since the pressure p is not a material constant

nown from Maxwell's kinetic theory¹). In addition to the Mach number, ne Reynolds number, and the other classical scaling numbers we obtain nother similarity parameter, the *truncation number*

$$\mathfrak{T} \equiv \frac{\mu D}{p} \,, \tag{24}$$

and for the validity of the classical linear approximation we have $\mathbf{T} \ll 1$: high scosity, high rate of deformation, or low pressure serve to invalidate the classical neary.

The fluid possessed of a time constant I call the *Reiner-Rivlin fluid*, while nat devoid of such a constant I call the *Stokesian fluid*, since the two theories ist presented seem to be natural consequences of the viewpoints taken by the ersons after whom these names are given.

The low pressure effect in the Stokesian fluid is particularly interesting, r it explains why the classical equations of viscous fluids cannot govern high titude aerodynamic phenomena. In the case of simple shearing, for example, we put the results of our analysis into (13) and take D-r in (24) we obtain r the total stress T the expression

$$= (-1 + d \, \mathbf{T}^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (a \, \mathbf{T} + b \, \mathbf{T}^3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + c \, \mathbf{T}^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$
 (25)

Here a, b, c, d are dimensionless material constants (or functions of θ/θ_0 only). We regard the shearing motion as taking place within parallel plates, we find at the resistance experienced by the plates will differ from its classical value only terms up to \mathbb{T}^3 are taken into account: the terms in \mathbb{T}^2 give rise to a hydrostatic essure (Kelvin effect) and to normal stresses in the plane of motion (Poynting 'ect). That is, to produce this motion not only must the plates be sheared th respect to one another, but also the gas pressure must be adjusted and itable normal pressures must be applied to the two plates. For a given lative motion of the two plates and for any given gas, the new effects become tree and more important the lower is the pressure, being in fact proportional in agnitude to 1/p, while the corresponding change in the resistance is proportional to $1/p^2$.

This brief survey has explained the beginnings of some new fields within assical mechanics. I shall conclude it by listing fourteen types of research, the experimental and theoretical, which can yield new physical information interest and value. They represent research in the older style, which can be cried on by a single person.

1) This limitation can be avoided in a more general theory, where the thermodynamic pressure listinguished from the mean pressure. In the linear theory of viscosity the confusion of the two squares is equivalent to the "Stokes relation" 3 λ + 2 μ = 0.

- (1) Determination of moduli. Exploratory work should determine rough values for the second and third order moduli and their dependence on pressure and temperature. Such values of these moduli as are now known are derively by inference from acoustical or thermoelastic measurements or by molecule hypotheses of doubtful validity. Materials could be classified according to the signs and ranges of their higher order moduli, and some exhibiting particular marked Kelvin or Poynting effects might be found, and might even form the basis of practical application. For example, a governor for a rotary drive shamight be based upon the lengthening effect of excessive twisting; such a governor would permit the shaft to run smoothly at any speed and would executed only when torsional oscillations reached a dangerous magnitude.
- (2) Generalization of the Kelvin and Poynting effects. Our analysis about concerned only simple shearing. For torsion of a cylinder and flexure of rectangular parallelopiped a similar analysis with similar results may be of tained, but there are other interesting simple situations where counterparts analogues of the Kelvin and Poynting effects might appear.
- (3) Thermodynamics. The thermodynamics of the nonlinear theories need to be worked out. In particular, the specific form of the irreversibility law completely unknown. When applied to the classical linear theory of viscositi turns out to be equivalent to the Duhem-Stokes inequalities $\mu \geq 0$ and $\lambda + 2\mu \geq 0$. In the nonlinear theory it is easy to see both that the irreversibility law cannot be expressed in terms of inequalities on the coefficient alone and also that the Duhem-Stokes inequalities themselves are no long necessarily valid. Beyond these negative statements nothing is known.
- (4) The time constant of fluids. Which physical fluids have appreciable time constants? We might expect the time constant to be connected with relaxatily phenomena, but analysis is wholly wanting.
- (5) Boundary conditions for fluids. In the classical theory of viscous fluids the fluid is supposed to adhere to solid boundaries, or very nearly to do the In the nonlinear theories the differential equations are of increasingly high degree, and this one condition does not appear to be sufficient to secure uniqueness. Neither by theory nor by experiment have any general supplementary boundary conditions yet been discovered. While a rarefied gas is known to slip past a wall, no quantitative boundary condition expressing this effects has yet been generally accepted.
- (6) Capillarity. The interaction of capillarity and viscosity was discuss a long ago by Boussineso. Dynamic capillarity experiments on fluids exhibiting nonlinear viscosity might reveal new interaction phenomena.
- (7) Significance of multiple solutions for fluids. Stability. If one puts relation (10) into CAUCHY's laws of motion (1) one finds that for a steady fluid between parallel plates the velocity profile must be linear, as in the classist theory, but that corresponding to any given resistance there exist an compared to the corresponding to the cor

umber of different profiles. For the Reiner-Rivlin fluid these are independent f pressure, but for the Stokesian fluid they depend upon it. Are they all real? he answer may relate in part to the answer to question (3). Of those which re real, are all stable? How can the different cases be produced in experiments? vidently this type of difficulty is not limited to the case of simply shearing. here are similar but more elaborate questions in nonlinear elasticity.

- (8) Turbulence and stability. In connection with question (7) we may ask, an the higher order terms become important in turbulent motions, or in uestions of hydrodynamical stability?
- (9) Anisotropic materials. The generalizations of Poynting and Kelvin effects hich can occur in crystals promise dramatic results in theory and experiment ike, as well as numerous technical applications.
- (10) Ultrasonic studies. The effect of the higher order moduli, particularly fluids, should appear markedly in oscillations of sufficiently high frequency, spite the tiny amplitude of particle motion.
- . (11) Damping. The simple expedient of superposing ordinary viscous imping upon ordinary elastic strain, to which an excessive body of engineering cerature has been devoted, rarely if ever yields results in accord with experient even for very small strains. To obtain a realistic theory of damping, even or materials which are perfectly elastic in static deformation, a new idea is accessary.
- (12) Dynamic elasticity. Thus far our only knowledge of dynamic nonnear elasticity is contained in the general results on wave propagation derived
 HADAMARD, DUHEM, JOUGUET, and TOLOTTI. The effect of nonlinear
 sponse upon motion, particularly in the theory of oscillations, might yield
 me unexpected consequences. The connection between torsional modes and
 tensional modes for a shaft, for example, might have either amplifying or
 mping effects on the torsional oscillations. There is also the possibility that
 e rate theory of JAUMANN and MURNAGHAN, in which stress increments are
 reportional to strain increments, may be rendered sufficiently tractable to be
 ladied with profit.
- : (13) Photoelasticity. Means of measuring nonlinear elastic stresses by photoestic means are yet to be devised.
- (14) More complicated media. Not for all gross bodies can the stress be scribed by a simple function of another tensor, as in the analysis sketched rlier. A more accurate theory can be obtained by permitting interplay tween stress and heat flux. My theory of the Maxwellian fluid, too elaborate describe in this note, represents a first tentative in this direction. The need there are other interesting possibilities, an example being furnished by a lemical reaction taking place on a capillary film.

The material treated here and many other related topics are summarized

C. TRUESDELL, The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynami J. Rat. Mech. Analysis 1, Nos. 1 and 2 (1952).

A fuller discussion of fluids is given in

- C. TRUESDELL, A New Definition of a Fluid, I: The Stokesian Fluid, II: The Mcwellian Fluid, J. Math. pures appl. 29, 215-244 (1950); 30, 111-158 (1950) References for axioms of mechanics:
- G. Hamel, Über die Grundlagen der Mechanik, Math. Ann. 66, 350-397 (190)

 Die Axiome der Mechanik, in: Handbuch der Physik, vol. 5 (Julius Spring Berlin, 1927), pp. 1-42.

Reference for general continuum mechanics:

R. von Mises, Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Katinua, Proc. 3rd Int. Congr. appl. Mech., Stockholm 2, 1–9 (1930).

References for experiments:

- J. H. POYNTING, On Pressure Perpendicular to the Shear-Plane in Finite P-Shears, and on the Lengthening of Loaded Wires when Twisted, Proc. Roy. S. London [A] 82, 546-559 (1909) = Papers, vol. 2, p. 358.
 - On the Changes in the Dimensions of a Steel Wire when Twisted, and on Pressure of Distortional Waves in Steel, Proc. Roy. Soc. London [A] 86, 534-50 (1912) = Papers, vol. 2, pp. 397-423.
 - The Changes in the Length and Volume of an India-Rubber Cord when Twist India-Rubber J., Oct. 4, p. 6 (1913) = Papers, vol. 2, pp. 424-425.
- H. BATEMAN, Motion of an Incompressible Viscous Fluid, Part II of Report of Committee on Hydrodynamics, Bull. nat. Res. Council No. 84 (1932), see § 1
- R.S. RIVLIN, Torsion of a Rubber Cylinder, J. appl. Phys. 18, 444-449, 837 (194
- K. Weissenberg, A Continuum Theory of Rheological Phenomena, Nature 7 310-311 (1947).
- R. S. RIVLIN and D. W. SAUNDERS, Large Elastic Deformations of Isotropic Merials, VII: Experiments on the Deformation of Rubber, Phil. Trans. Roy. S London 243, 251–298 (1951).

Other references for theory:

- J. Boussineso, Sur l'influence des frottements dans les mouvements regulières fluides, J. Math. pures appl. [2] 13, 377-438 (1868), see Note 1.
- W. THOMSON (Lord KELVIN) and P. G. TAIT, Treatise on Natural Philosop Part. I, 2nd ed., vol. 2 (University Press, Cambridge, 1883), see § 679.
- O. REYNOLDS, On the Dilatancy of Media Composed of Rigid Particles in Cont. With experimental illustrations, Phil. Mag. [2] 20, 469–484 (1885) = Pap. vol. 2, pp. 203–216.
 - Experiments Showing Dilatancy, a Property of Granular Material, Possi Connected with Gravitation, Proc. Roy. Inst. Great Britain 11, 354-363 (1887 Papers, vol. 2, pp. 217-227.
- G. Jaumann, Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentgesetze, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien 120 (IIa), 385-530 (1911), see § IX.
- M. Reiner, A Mathematical Theory of Dilatancy, Amer. J. Math. 67, 350-362 (19-Elasticity beyond the Elastic Limit, Amer. J. Math. 70, 433-446 (1948).

- R.S. RIVLIN, The Hydrodynamics of Non-Newtonian Fluids, I-II, Proc. Roy. Soc. London [A] 193, 260–281 (1948); Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 88–91 (1949).
- Normal Stress Coolificient in Solutions of Macromolecules, Nature 161, 567-569 (1948).
- Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, I-VI, Phil. Trans. Roy. Soc. [A] 240, 459-525 (1948); 241, 379-397 (1948); 242, 173-195 (1949); Proc. Roy. Soc. [A] 195, 463-473 (1949).
- A Uniqueness Theorem in the Theory of Highly-Elastic Materials, Proc. Cambridge Phil. Soc. 44, 595-597 (1948).
- A Note on the Torsion of an Incompressible Highly-Elastic Cylinder, Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 485-487 (1949).
- D. Murnaghan, The Foundations of the Theory of Elasticity (1947), pp. 158-174 in: Non-Linear Problems in Mechanics of Continua (Amer. Math. Soc., New York, 1949).

Zusammentassung

Nach einigen Bemerkungen über die Grundlagen der klassischen Mechanik handelt dieser Artikel die allgemeine Natur der nichtlinearen Elastizität und skosität. Die Experimente, die das Vorhandensein von eigentlich nichtlinearen derkräften und den Zustand des Fließens anzeigen, werden zusammengefaßt. ne allgemeine Untersuchung von Reiner, die zeigt, daß jede Theorie nichtearer Vorgänge qualitative Merkmale dieser Phänomene angibt, wird wiedergeben und erläutert. Für diese beiden, im wesentlichen voneinander verschienen, aber vorausgesagten neuen Phänomene werden die Bezeichnungen Kelvinfekt und Poynting-Effekt vorgeschlagen. Die Theorie der nichtlinearen Viskosität Flüssigkeiten wird mit Hilfe des Dimensionsprinzips auf eine mehr explizite rm zurückgeführt. Zwei verschiedene Flüssigkeiten werden unterschieden: die tokessche Flüssigkeit», die vom Autorangegeben worden ist, in der keine Materialnstante der Zeitdimension besteht, und die Theorie von Reiner und Rivlin, in r eine Zeitkonstante von Wichtigkeit ist. Diese einleitenden Betrachtungen aren zum Hauptteil des Artikels, zu einem Programm von 11 Richtlinien phyalischer Forschung — sowohl für die Theorie als auch für das Experiment —, 3 angegeben wird in der Hoffnung, daß, angeregt durch das Vorhandensein ser weitreichenden und wichtigen, noch ungelösten physikalischen Probleme, Bgebende Physiker veranlaßt werden, in das neue Gebiet der nichtlinearen chanik der Kontinua weiter vorzudringen.

.ceived: July 16, 1951.)

Knickung gerader Stäbe unter Torsion

Von Hans Ziegler, ETH., Zürich

1. Einleitung

Seitdem A.G. GREENHILL [1,1) die kritische Belastung der auf Druck untersion beanspruchten Welle untersucht hat, wird bei Stabilitätsproblem ähnlicher Art vorausgesetzt, daß die Momentvektoren W, welche die belast den Kräftepaare darstellen, bei der Deformation axial gerichtet bleiben. Verfasser kürzlich gezeigt hat [2], sind aber solche Kräftepaare nur anahmsweise konservativ [3]; beim Stab mit zwei Endmomenten (vgl. Tafe).

Tafel 1

Knickung durch ein axiales Moment
k Knickfaktor in der Greenhillschen Formel (1. 1)

Knickfall	<i>Ia</i>	II э	Шә	IVa	Və
Randbed.	n				
	77777	70710	77777.	7070. V	man
k	2,861	2	0	0	2

beispielsweise nur dann, wenn er an beiden Enden (entweder fest oder attanslatorisch verschieblich) eingespannt ist. Nach einer weiteren Untersuch des Verfassers [4]²) darf die kritische Belastung nur bei konservativen Iblemen mit Hilfe des statischen oder energetischen Stabilitätskriteriums ern telt werden, während im allgemeinen allein das kinetische Kriterium in Fikommt. Dieses macht die Untersuchung der Biegeschwingungen unter gegebenen Belastung nötig und führt auf Ergebnisse, die sich in vielen Fä

Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 118:]
 Vergleiche auch [5] und [6].

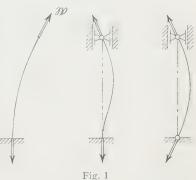
ur schlecht mit der Erfahrung decken, und zwar nicht nur in den Knickfällen on Tafel 1, sondern beispielsweise auch dann, wenn der Stab zusätzlich auf Druck beansprucht oder nach der kritischen Drehzahl einer gedrückten und ordierten Welle gefragt wird.

Von den fünf einfachen, in Tafel 1 zusammengestellten Fällen von Knickung nter einem axialen Moment sind Ia und Ha konservativ; das kritische Moment arf also mit dem statischen Stabilitätskriterium ermittelt werden. Es ist für en Stab mit der Länge / und der vom Querschnitt und der Achse durch seinen chwerpunkt unabhängigen Biegesteifigkeit z bereits durch A. G. GREENHILL [] mit

$$W_k = \pm k \pi \frac{\alpha}{7} \tag{1.1}$$

ngegeben worden, und zwar ist ihm zufolge im Fall Ia k-4 und im Fall IIa -2 einzusetzen. Bei der Überprüfung dieser Werte hat A. Trösch [7] festestellt, daß der Greenhillsche Rückschluß von IIa auf Ia unzulässig und im alle Ia in Übereinstimmung mit einem bereits von E. L. Nicolai [8] gewonenen Resultat k-2.861 zu setzen ist. Im Gegensatz zu diesen beiden Fällen nd aber die übrigen nichtkonservativ. Mit Hilfe des kinetischen Kriteriums at der Verfasser 2 nachgewiesen, daß der Stab im Fall IIIa unter jedem Ioment W=0 labil ist, und dasselbe Ergebnis hat A. Trösch [7] seither für en Fall IVa erhalten. In beiden Fällen ist mithin in der Greenhillschen Formel . 1) k=0 zu setzen. Ferner ist der Wert k=2, den A. G. Greenhill für all Va mit dem statischen Kriterium gewonnen hat, fragwürdig, da dieses Iriterium hier illegitim ist. Er ist aber durch eine Untersuchung von . Trösch [7] bestätigt worden.

Diese Ergebnisse — vor allem diejenigen den Fällen IIIa und IVa sowie die Realtate analoger Untersuchungen [2], [7], enen zufolge bei gewissen Lagerungen nter einem axialen Moment jede Drehzahl ner Welle kritisch ist – haben, auch wenn uit einer Verbesserung der Stabilitätserhältnisse bei Berücksichtigung der Fämpfung [7] und der endlichen Dicke es Stabes gerechnet werden darf, etwas inbefriedigendes an sich. Der Verfasser at daher zunächst versucht, das Problem nter der Annahme neu zu bearbeiten, daß



Belastung durch tangentiale Momente.

ie Momentvektoren $\mathfrak B$ der belastenden Kräftepaare bei der Deformation nicht vial, sondern tangential zur elastischen Linie bleiben (wobei die Knickfälle Ha bis Va in diejenigen von Figur 1 übergehen, während Ia und Ha sich nicht ndern). Bei der Berechnung der virtuellen Arbeit, welche das tangentiale Moment bei einer virtuellen Deformation des Stabes leistet, stellt sich indess heraus, daß \mathbb{B} auch jetzt nicht konservativ ist, indem der entscheidende Ranterm in [2], (7. 16), nicht verschwindet, sondern sein Vorzeichen wechse Damit ist einerseits wieder mit Instabilitäten unter beliebig kleiner Belastu zu rechnen; andererseits stellt sich aber die Frage, ob nicht mit der Annahreines halb axialen, halb tangentialen Momentes ein Fortschritt zu erzielen s

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß das Problem konservativ wi und auf plausiblere Resultate führt, wenn man auf Voraussetzungen über carichtung des Momentvektors $\mathfrak B$ verzichtet, statt dessen auf die ihn erzeugend Einzelkräfte zurückgeht und für diese zweckmäßige Annahmen trifft¹). Dah wird sich herausstellen, daß ganz von selbst ein Vektor $\mathfrak B$ erhalten wird, chalbwegs tangential zur elastischen Linie ist. Da aber hinsichtlich der Einzekräfte verschiedene Voraussetzungen möglich und praktisch realisierbar sin wird es nötig, zwischen verschiedenen Arten von belastenden Momenten $\mathfrak B$ unterscheiden, die auch in ihren kritischen Werten erheblich voneinander aweichen können. Das Problem ist eben in Wirklichkeit viel differenzierter, abisher angenommen wurde; die Konzeption eines axialen Momentes stellt ta sächlich nur eine von mehreren Arbeitshypothesen dar, und zwar eine von hältnismäßig ungünstige, da sie den praktisch vorliegenden Verhältnissen ni äußerst selten entspricht.

Im einzelnen wird es sich darum handeln, die vom praktischen Standpunit aus wichtigsten Belastungsarten herauszugreifen, den Nachweis zu erbringe daß die zugehörigen Momente $\mathfrak W$ konservativ sind, und sodann in einzelnig Fällen ihre kritischen Werte zu bestimmen. Dabei sind die grundsätzlichen Betrachtungen des nächsten Abschnitts noch ganz allgemein gefaßt, mithin aus für kompliziertere Aufgaben dieser Art und insbesondere für Drehzahlproblettin gültig. Von Abschnitt 3 an wird im Interesse einer einfacheren Darstellun vorausgesetzt, daß der Stab nur an den Enden belastet und prismatisch sowie nur eine einzige Biegesteifigkeit besitze, während in den weiteren Ausschnitten, mit Ausnahme von 7, die Belastung auf Endmomente beschränt und als Beispiele nur noch die Knickfälle I bis V unter den neuen Annahme über die Richtung von $\mathfrak W$ behandelt werden.

2. Kraftangriff und Moment

Bezieht man einen geraden Stab auf ein rechtwinkliges Koordinatensyste (x, y, z), dessen Ursprung im unteren Endquerschnitt liegt und dessen z-Ach mit der Stabachse zusammenfällt, so ist man in der Wahl der Kräfte, die ein Belastung des Schnittes z_1 durch einen Momentvektor $\mathfrak W$ darstellen, noch wei

¹) Wie mir Herr Prof. Dr. W.T. Korter brieflich mitteilt, hat auch er diese Feststellu gemacht. Er behandelt in einer Arbeit, die vor der Veröffentlichung steht, die Einleitung C Torsionsmomentes durch ein Kreuzgelenk.

gehend frei. Sitzt eine (etwa in zwei Punkten) in ihrer Ebene beaufschlagte furbinenscheibe auf dem Stab, so hat man mit einem Kräftepaar zu tun, das ich auch bei der Deformation des Stabes nicht ändert, also ausnahmsweise mit inem axialen Moment. Im allgemeinen (zum Beispiel bei der schief beaufchlagten Turbine) wandern indessen die Angriffspunkte bei der Deformation. Im den praktisch vorkommenden Fällen nach Möglichkeit gerecht zu werden, assen wir eine solche Wanderung zu, setzen aber die Kräfte nach Betrag und Richtung grundsätzlich als konstant voraus und beschränken uns im übrigen uf die Anordnungen von Figur 2, nämlich



Fig. 2

elastung durch konstante Kräfte. (d) Querarm mit Kräftepaar (pseudotangentiales Moment),) Scheibe mit Kraft paar prisitingentiales Moment, (b) Scheibe mit gleichmaßiger Verteilung von mehr als zwei Umfangskräften (semitangentiales Moment).

- (d) auf das Kräftepaar \mathfrak{P} , $-\mathfrak{P}$, das an einem rechtwinklig und starr mit em Stab verbundenen Querbalken der Länge 2 a angreift,
- (c) auf das Kräftepaar an einer zum Stab normalen und starr mit ihm verundenen Scheibe vom Radius a,
- (b) auf die gleichmäßige Verteilung von mehr als zwei gleich großen, am mfang einer solchen Scheibe wirkenden Azimutalkräften, die auch die konnuierliche Belastung durch eine pro Bogeneinheit konstante Umfangskraft i sich schließt.

Den Kraftangriff kann man sich in allen drei Fällen durch Fäden realisiert enken; daneben kommt (d) im elektrischen oder magnetischen Kraftfeld,) bei zweifach und (b) bei mehrfach sowie gleichmäßig beaufschlagten Turmen in Frage¹).

Solange die Belastung genügend klein ist, bleibt die Stabachse gerade, und er auf Torsion beanspruchte Stab erfährt lediglich eine Verdrehung, die im chnitt z durch den – möglicherweise großen – Winkel $\tau(z)$ gemessen werden nn. Fall (d) unterscheidet sich von den beiden andern grundsätzlich dadurch,

¹⁾ Bei der Einleitung des Torsionsmomentes durch Kreuzgelenke nach W.T. Koiter liegt ein t (c) verwandter Fall vor, der sich aber nur unter speziellen Randbedingungen mit (c) deckt.

daß bei dieser Verdrehung das belastende Moment vom Wert W_0 auf

$$W = W_0 \cos \tau_1 \tag{2.}$$

absinkt, während für (c) und (b) $W - W_0$ gilt, und daraus folgt insbesonde daß im Fall (d) $\tau(z_1) < \pi/2$ ist.

Unter der kritischen Belastung krümmt sich die Stabachse und geht in c elastische Linie x(z), v(z) über: zugleich ändert sich die Verdrehung $\tau(z)$ $\varepsilon(z)$, und neben der Torsion tritt im einzelnen Schnitt eine Biegebeanspruchu auf. Da für die Bestimmung der kritischen Belastung nur der Beginn d Knickens interessiert, kann man die Verschiebungen x, v als klein gegen c Stablänge l betrachten, ihre Ableitungen x', y' nach z sowie den Drehwinke als klein gegen 1 und die Biegemomente als klein gegen W. Sodann darf m. sich - von den Energiebetrachtungen des nächsten Abschnittes abgesehe welche die Mitnahme von zweiter Ordnung kleiner Glieder erfordern – auf Berücksichtigung der Terme erster Ordnung beschränken.

Die unter der kritischen Belastung auftretende Verformung des Stabes 14 für den Querschnitt z₁ in erster Näherung eine Translation um den Vekt $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, 0)$ sowie eine Drehung um den vektoriellen Winkel $\mathfrak{o}_1(-y_1', x_1')$ zur Folge. Orientiert man im Fall (d) das Koordinatensystem so, daß d y-Achse die Richtung von \mathfrak{P} (die x-Achse mithin diejenige des Querarms a unbelasteten Stab) hat, so resultiert für den Fahrstrahl $\mathfrak{a}(a\cos\tau_1, a\sin\tau_1, a\sin\tau_1)$ welcher den Schwerpunkt S des Schnittes mit dem Angriffspunkt A der Kra $\mathfrak{P}(0, P, 0)$ verbindet, aus dieser Bewegung eine Änderung

$$\mathfrak{o}_1 \times \mathfrak{a} = a \left(-\varepsilon_1 \sin \tau_1, \quad \varepsilon_1 \cos \tau_1, \quad -x_1' \cos \tau_1 - y_1' \sin \tau_1 \right)$$

und für das statische Moment $\mathfrak{a} \times \mathfrak{P}$ von \mathfrak{P} bezüglich S die Änderung

$$(\mathfrak{o}_1 \times \mathfrak{a}) \times \mathfrak{P} = P \ a \ (x_1' \cos \tau_1 + y_1' \sin \tau_1, \quad 0, \quad -\varepsilon_1 \sin \tau_1) \ .$$

Der Momentvektor des Paares, der unmittelbar vor dem Knicken die Komp nenten $(0, 0, W = 2 P a \cos \tau_1)$ hat, geht also unter der kritischen Belastung

$$\mathfrak{W} = W\left(x_1' + y_1' \operatorname{tg} \tau_1, \quad 0, \quad 1 - \varepsilon_1 \operatorname{tg} \tau_1\right) \tag{2}.$$

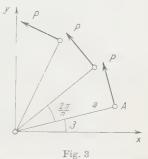
über. Er neigt sich gegen die Stabachse, ohne indessen tangential zur elas schen Linie zu bleiben, und soll, um die Diskussion zu erleichtern, als pseuc tangential bezeichnet werden. Man hat damit

Satz 1. Der Momentvektor eines Kräftepaares, das aus zwei nach Betrag u: Richtung konstanten, an einem Querarm angreisenden Kräften besteht, ist pseuc ngential, das heißt, er besitzt im Koordinatensystem der Figur 2 (d) die Kommenten (2.2).

Fall (c) unterscheidet sich von (d) dadurch, daß sich der Fahrstrahl des ngriffspunktes von $\mathfrak P$ während der dem Knicken vorangehenden Torsion cht ändert, so daß $\mathfrak a(a,0,0)$ ist. Gibt man der y-Achse auch hier die Richtung on $\mathfrak P$, so hat man also (obschon $\tau_1=0$ ist) in den soeben angeschriebenen eziehungen nur $\tau_1=0$ zu setzen, um sie dem neuen Fall anzupassen. Man erilt damit für den Momentvektor des Paares, der ursprünglich die Kompoenten (0, 0, W=2 Pa) aufweist, statt (2, 2)

$$\mathfrak{W} = W(x_1', 0, 1) . (2.3)$$

r ist, auf die (x, z)-Ebene projiziert, tangential zur rojektion der elastischen Linie, in seiner Projektion if die (y, z)-Ebene dagegen axial, und soll als vasitangential bezeichnet werden. Man hat somit: Satz 2. Der Momentvektor eines Kräftepaares, das as zwei nach Betrag und Richtung konstanten, an ner Kreisscheibe angreifenden Kräften besteht, ist vasitangential, das heißt in seiner Projektion auf e Normalebene zur einen Kraft $\mathfrak P$ des Paares tanntial zur Projektion der elastischen Linie, in der rojektion auf die durch $\mathfrak P$ und die Stabachse aufspannte Ebene dagegen axial.



Belastung durch gleichmäßig verteilte Umfangskräfte.

Als Vorbereitung für den Fall (b) betrachten

r nochmals die Kraft \mathfrak{P} , diesmal aber ohne eine Voraussetzung über die rientierung des Koordinatensystems zu treffen, so daß sie (Figur 3) unter aem beliebigen Winkel β gegen die x-Achse geneigt ist. Der Fahrstrahl von und die Kraft \mathfrak{P} sind dann vor dem Knicken durch $\mathfrak{a}(a\cos\beta, a\sin\beta, 0)$ zw. $\mathfrak{P}(-P\sin\beta, P\cos\beta, 0)$ gegeben; die Änderung von \mathfrak{a} ist

$$\mathfrak{o}_1 \times \mathfrak{a} = a \left(-\varepsilon_1 \sin \beta, \quad \varepsilon_1 \cos \beta, \quad -x_1' \cos \beta - y_1' \sin \beta \right)$$

id die Änderung von $\mathfrak{a} \times \mathfrak{P}$

$$(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{a}) \times \mathfrak{P} = P \ a \ (x_1' \cos^2 \beta + y_1' \cos \beta \sin \beta, \quad x_1' \cos \beta \sin \beta + y_1' \sin^2 \beta, \quad 0).$$

Geht man nun zur Verteilung von n Kräften P mit den Zwischenwinkeln π/n über, so erhält man für den Vektor \mathfrak{W} , der ursprünglich die Komponenten \mathfrak{g} , \mathfrak{g} , \mathfrak{g} hat, die neuen Komponenten

$$W_x = Pa (A x_1' + C y_1'), \quad W_y = Pa (C x_1' + B y_1'), \quad W_z = n Pa, \quad (2.4)$$

wobei die Abkürzungen A, B und C durch

$$A = \sum_{k=1}^{n} \cos^{2} \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ 1 + \cos \left[2\beta + (k-1) \frac{4\pi}{n} \right] \right\},$$

$$B = \sum_{k=1}^{n} \sin^{2} \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ 1 - \cos \left[2\beta + (k-1) \frac{4\pi}{n} \right] \right\},$$

$$C = \sum_{k=1}^{n} \cos \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] \sin \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sin \left[2\beta + (k-1) \frac{4\pi}{n} \right]$$

gegeben sind. Diesen Beziehungen entnimmt man ohne weiteres

$$A = 1 + \cos 2\beta$$
, $B = 1 - \cos 2\beta$, $C = \sin 2\beta$, $(n = 2)$ (2.

mit Hilfe der (aus der Moivreschen Formel entspringenden) Identitäten¹)

$$\begin{split} \sum_{k=1}^{n} \cos[\varphi + (k-1) \; \psi] &= \frac{\sin\frac{n \, \psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}, \\ \sum_{k=1}^{n} \sin[\varphi + (k-1) \; \psi] &= \frac{\sin\frac{n \, \psi}{2} \sin\left(\varphi + \frac{n-1}{2} \; \psi\right)}{\sin\frac{\psi}{2}} \end{split} \right\} \quad (\psi = 2 \, \pi \; , \; 4 \, \pi , \; . \end{split}$$

ferner

$$A - B = \frac{n}{2}, \quad C = 0.$$
 (n > 2) (2.

Setzt man (2.5) in (2.4) ein, so erhält man die – hier nicht benötigte Verallgemeinerung von (2.3) für ein beliebig orientiertes Achsenkreuz. Dur Einsetzen von (2.6) dagegen gewinnt man – unabhängig von β –

$$W_x = \frac{1}{2} \, n \, P \, a \, x_1' \,, \quad W_y = \frac{1}{2} \, n \, P \, a \, y_1' \,, \quad W_z = n \, P \, a \,,$$

mithin den Momentvektor

$$\mathfrak{W} = W\left(\frac{1}{2} x_1', \frac{1}{2} y_1', 1\right), \tag{2}$$

Vergleiche etwa E. Hammer, Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonomet.
 Aufl. (Metzler, Stuttgart 1907), S. 216.

ler halbwegs tangential zur elastischen Linie ist und als semitangential bezeichet werden soll. Dieses Ergebnis, das sich übrigens für n=4 auch direkt durch Überlagerung zweier Fälle nach Figur 2 (c) ableiten läßt, führt auf

Satz 3. Der Momentvektor, der einer gleichmäßigen Verteilung von mehr als wei (und auch von unendlich vielen) zleich zroßen und konstanten Azimutalkräfen an einer Kreisscheihe entspricht, ist semitangential, das heißt, er halbiert den Vinkel zwischen der Achse und der Tangente an die elastische Linie.

3. Virtuelle Arbeiten und Energien

Wir beschränken uns nun auf den prismatischen Stab (Figur 4) mit einer inzigen Biegesteifigkeit z und nehmen, um uns bezüglich der kinematischen

Candbedingungen die nötige Freiheit zu wahren, an, raß er nur am oberen Ende z=l, und zwar durch ein Ioment $\mathfrak{B}_l(W_{xl}, W_{yl}, W_{zl})$ gemäß Abschnitt 2 sowie urch eine zur Achse normale Kraft $\mathfrak{R}(K_x, K_y, 0)$ beastet sei. Führt man mit $\mathfrak{v}(v_x=x',v_y=y',v_z=1)$ en tangentialen Einheitsvektor ein, so ist die elastiche Linie durch die Krümmungen v_x', v_y' ihrer Procktionen gegeben, die Torsion durch den spezifischen rehwinkel $\omega+\varepsilon'$, der sich aus dem konstanten, mit fer Torsionssteifigkeit γ gemäß

$$\omega = \frac{W}{\gamma} \tag{3.1}$$

1 berechnenden Anteil unmittelbar vor dem Auslicken und dem mit der Ausbiegung auftretenden 1 wachs ε' zusammensetzt.



Belastung durch eine Dyname \Re , \mathfrak{B}_l .

Die Deformationsenergie des Stabes ist in bekannter Weise durch

$$U = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \left[\alpha \left(v_{x}^{\prime 2} + v_{y}^{\prime 2} \right) + \gamma \left(\omega + \varepsilon^{\prime} \right)^{2} \right] dz \tag{3.2}$$

estimmt, die Arbeit der inneren Kräfte bei einer virtuellen, durch die Variainnen δx , δy , $\delta \varepsilon$ definierten Verformung mithin durch

$$\delta A_{i} = - \, \delta U = - \int\limits_{0}^{l} \left[\alpha \, \left(v_{x}^{\prime} \, \delta v_{z}^{\prime} + v_{y}^{\prime} \, \delta v_{y}^{\prime} \right) + \gamma \, \left(\omega + \varepsilon^{\prime} \right) \, \delta \varepsilon^{\prime} \right] \, dz \; , \label{eq:deltaA}$$

d dafür erhält man, partiell integriert,

$$\mathbb{I}_{i} = \int_{0}^{l} \left[\alpha \left(v_{x}'' \, \delta v_{x} + v_{y}'' \, \delta v_{y} \right) + \gamma \, \varepsilon'' \, \delta \varepsilon \right] dz - \left[\alpha \left(v_{x}' \, \delta v_{x} + v_{y}' \, \delta v_{y} \right) + \gamma \left(\omega + \varepsilon' \right) \, \delta \varepsilon \right]_{0}^{l}. \tag{3.3}$$

Da sich das obere Stabende um

$$\mathbf{r}_{l} = \int_{0}^{l} \mathbf{v} \, dz \tag{3.4}$$

verschiebt, ist ferner

$$V_K = -\int_0^l (K_x v_x + K_y v_y) dz$$
 (3.5)

das Potential der Kraft R und

$$\delta A_K = -\delta V_K = \int_0^l (K_x \, \delta v_x + K_y \, \delta v_y) \, dz \tag{3.6}$$

ihre virtuelle Arbeit.

Mit der virtuellen Arbeit des Momentes \mathfrak{W}_t kann gleichzeitig diejenige de Momentes $\mathfrak{W}_0(W_{x0}, W_{y0}, W_{z0})$ am unteren Stabende berechnet werden, di unter Umständen (zum Beispiel im Knickfall V, Tafel 2) von Null verschiede sein kann. Denkt man sich zu diesem Zweck zunächst ein einzelnes Stabeld ment dz mit festgehaltenem unterem Ende z deformiert, so gibt die Änderum $\delta \mathbf{v}' dz$ des Tangentenvektors $\mathbf{v} - \mathbf{v}' dz$ am oberen Ende z - dz die virtuell Verbiegung an, während die virtuelle Verdrehung durch $\delta \mathbf{e}' dz$ gegeben is Bezeichnet man den vektoriellen Winkel, um den sich dabei das obere Encluse Elementes dem unteren gegenüber verdreht, mit $\delta \mathbf{u} dz$, wobei $\delta \mathbf{u}$ die Kontponenten $(\delta \varkappa_x, \delta \varkappa_y, \delta \varkappa_z)$ besitzt, so gilt

$$\delta \mathfrak{v}' dz = \delta \mathfrak{u} dz \times (\mathfrak{v} + \mathfrak{v}' dz) = \delta \mathfrak{u} \times \mathfrak{v} dz$$

und damit in erster Näherung

$$\delta v_x' = \delta \varkappa_y$$
, $\delta v_y' = -\delta \varkappa_x$. (3.

Da ferner die virtuelle Drehung um die Tangente an die elastische Linie $\delta \varepsilon' a$ sein muß, ist

$$\delta \varepsilon' dz = \delta \mathfrak{u} dz (\mathfrak{v} + \mathfrak{v}' dz) = \mathfrak{v} \delta \mathfrak{u} dz$$
,

mithin

$$\delta\varepsilon' = v_x \, \delta\kappa_x + v_y \, \delta\kappa_y + \delta\kappa_z; \tag{3}$$

man hat daher nach (3.7) und (3.8)

$$\delta \varkappa_{z} = -\delta v'_{y}, \quad \delta \varkappa_{y} = \delta v'_{x}, \quad \delta \varkappa_{z} = v_{x} \delta v'_{y} - v_{y} \delta v'_{x} + \delta \varepsilon'.$$

Mit Rücksicht auf das Momentengleichgewicht für die z-Achse kann mæ

$$W_{zl} = -W_{z0} = W_z (3.$$

etzen und erhält jetzt mit

$$\delta A_{W} = W_{z} \int_{0}^{1} (v_{x} \, \delta v'_{y} - v_{y} \, \delta v'_{x} + \delta \varepsilon') \, dz - (W_{x} \, \delta v_{y} - W_{y} \, \delta v_{x})_{t}$$

$$- (W_{\overline{x}} \, \delta v_{\overline{y}} - W_{\overline{y}} \, \delta v_{\overline{x}})_{0}$$
(3. 10)

ie virtuelle Arbeit der Momente \mathfrak{W}_i und \mathfrak{W}_0 , wobei mit den Querstrichen im tzten Term der Tatsache Rechnung getragen wird, daß (Figur 5) im pseudo-

nd quasitangentialen Fall das am unteren Ende anreifende Kräftepaar dem oberen gegenüber verdreht ein kann. Diese Beziehung läßt sich mit Hilfe der lentität

$$\begin{split} \delta \left[\frac{1}{2} \; W_z \int\limits_0^{\cdot} \left(v_x \, v_y' - v_y \, v_x' + 2 \, \varepsilon' \right) \, dz \right] \\ = W_z \int\limits_0^{\cdot} \left(v_x \, \delta v_y' - v_y \, \delta v_x' + \delta \varepsilon' \right) \, dz \\ + \frac{1}{2} \; W_z \left(v_y \, \delta v_x - v_x \, \delta v_y \right)_0^I \end{split}$$

och umformen, und dabei darf der letzte Klammerusdruck für die untere Grenze durch $(v - \delta v_+ - v_{\bar{\tau}} \delta v_{\bar{\tau}})_0$ setzt werden, da er bis auf den Faktor 1,2 die bei er virtuellen Deformation von der Grundrißprojektion



Fig. 5 Belastung durch gegeneinander verdrehte Kraftepaare.

's Vektors v_0 überstrichene Fläche darstellt und somit einer Drehung des oordinatensystems um die z-Achse gegenüber invariant ist. Man hat also

$$\begin{split} \delta A_{W} &= \delta \left[\frac{1}{2} \; W_{z} \int\limits_{0}^{\cdot} \left(v_{x} \, v_{y}^{\prime} - v_{y} \, v_{x}^{\prime} + 2 \, \varepsilon^{\prime} \right) \, dz \right] \\ &+ \left[\left(W_{y} - \frac{1}{2} \; W_{z} \, v_{y} \right) \, \delta v_{z} - \left(W_{z} - \frac{1}{2} \; W_{z} \, v_{z} \right) \, \delta v_{y} \right]_{t} \\ &+ \left[\left(W_{\overline{y}} + \frac{1}{2} \; W_{z} \, v_{\overline{y}} \right) \, \delta v_{\overline{z}} - \left(W_{\overline{z}} + \frac{1}{2} \; W_{z} \, v_{\overline{z}} \right) \, \delta v_{\overline{y}} \right]_{0}, \end{split}$$
 (3. 11)

d damit ist die virtuelle Arbeit von \mathfrak{W}_l sowie \mathfrak{W}_0 wenigstens teilweise als riation eines Potentials dargestellt.

Sind die Momentvektoren \mathfrak{W}_l , \mathfrak{W}_0 axial, also

$$W_{\!x\,l} = \, W_{\!y\,l} = \, W_{\!\dot{x}\,0} = \, W_{\overline{y}\,0} = \, 0 \,\, \text{,} \quad W_{\!z} = \, W \,\, \text{,} \label{eq:Wxl}$$

reduzieren sich die beiden Randterme in (3. 11) auf

$$-\frac{1}{2} W (v_y \delta v_x - v_x \delta v_y)_0^l,$$

und da sich dieser Ausdruck, solange δv_x und δv_y von Null verschieden se können, nicht als Variation einer Funktion von v_x , v_y schreiben läßt, ist e Problem – wie bereits in [2] festgestellt – nur bei eingespannten Enden (Knich fälle I und II) konservativ.

Sind \mathfrak{W}_l und \mathfrak{W}_0 tangential, so ist

$$W_{x\,l} = W \, v_{x\,l} \,, \quad W_{v\,l} = W \, v_{y\,l} \,, \quad W_{\overline{x}\,0} = - W \, v_{\overline{x}\,0} \,, \quad W_{\overline{y}\,0} = - W \, v_{\overline{y}\,0} \,, \quad W_z = W \, v_{z\,0} \,, \quad W_{z\,0} = W \, v_{z\,0} \,, \quad W_{z\,0}$$

und da hiemit die Randterme in (3. 11) in

$$\frac{1}{2} W \left(v_y \ \delta v_x - v_x \ \delta v_y \right)_0^l$$

übergehen, gilt hier dasselbe; insbesondere sind auch jetzt die Knickfälle 11 bis V nichtkonservativ.

Sind \mathfrak{W}_i und \mathfrak{W}_0 semitangential, so ist nach (2.7)

$$\begin{split} W_{il} &= \frac{1}{2} \; W \; v_{il} \,, \quad W_{yl} = \frac{1}{2} \; W \; v_{vl} \,, \quad W_{i0} = - \; \frac{1}{2} \; W \; v_{i0} \,, \quad W_{y0} = - \; \frac{1}{2} \; W \; v_{i0} \,, \\ W_{z} &= W \;, \end{split}$$

und da hiemit die Randterme in (3. 11) sämtlich verschwinden, sind die seintangentialen Momente unabhängig von den kinematischen Randbedingung konservativ. Ihre potentielle Energie ist

$$V_W = -\frac{1}{2} W \int_0^l (v_x v_y' - v_y v_x' + 2 \varepsilon') dz , \qquad (3.12)$$

und ihre virtuelle Arbeit wird hieraus (unter Durchführung einer partiell Integration) mit

$$\delta A_{W} = -\delta V_{W} = W \int_{0}^{1} (v_{y}' \, \delta v_{x} - v_{x}' \, \delta v_{y} + \delta \varepsilon') \, dz + \frac{1}{2} \, W (v_{x} \, \delta v_{y} - v_{y} \, \delta v_{x})_{0}^{1}$$
(3. 13)

gewonnen.

Sind \mathfrak{W}_l und \mathfrak{W}_0 quasitangential, so ist nach (2.3)

$$W_{zl}=W\,v_{zl}\,,\quad W_{vl}=0\;,\quad W_{\overline{\mathbf{x}}\,\mathbf{0}}=-W\,v_{\overline{\mathbf{x}}\,\mathbf{0}}\;,\quad W_{\overline{v}\,\mathbf{0}}=0\;,\quad W_{z}=W\;.$$

Die Randglieder in (3. 11) reduzieren sich also auf

$$- \; \frac{1}{2} \; W \left[(v_{_{\overline{y}}} \; \delta v_{_{\overline{z}}} + v_{_{\overline{z}}} \; \delta v_{_{\overline{y}}})_l - (v_{_{\overline{y}}} \; \delta v_{_{\overline{z}}} + v_{_{\overline{z}}} \; \delta v_{_{\overline{y}}})_0 \right],$$

und da man hiefür auch

$$- \left. \delta \left[\frac{1}{2} \left. W \left(v_{xl} \, v_{yl} - v_{\overline{x} \, 0} \, v_{\overline{y} \, 0} \right) \right] \right.$$

chreiben kann, sind auch die quasitangentialen Momente konservativ. Ihre otentielle Energie ist

$$\dot{v}_W = -\frac{1}{2} W / (v_x \epsilon' + v_z \epsilon' - 2 \epsilon') .iz - \frac{1}{2} W (v_{xl} v_{yl} - v_{\bar{x}0} v_{\bar{y}0})$$
 (3.12c)

nd ihre virtuelle Arbeit

$$4_{W} = W \int_{0}^{t} (v'_{y} \delta v_{x} - v'_{x} \delta v_{y} + \delta \varepsilon') dz - W (v_{yl} \delta v_{xl} - v_{\bar{y}0} \delta v_{\bar{x}0}).$$
 (3.13c)

Sind schließlich \mathfrak{B}_{l} und \mathfrak{B}_{0} pseudotangential, so hat man nach (2. 2)

$$egin{aligned} & au_{,l} - W \left(arepsilon_{,l} - arepsilon_{,l} \log au_{,l}
ight), \quad W_{y\,l} = 0 \;, & W_{\overline{x}\,0} = - W \left(v_{\,\overline{x}\,0} + v_{\,\overline{y}\,0} \, \lg au_{\!0}
ight), & W_{\overline{y}\,0} = 0 \;, \\ & W_z = W \left(1 - arepsilon_{l} \lg \, au_{l}
ight) = W \left(1 - arepsilon_{0} \, \lg au_{\!0}
ight), & W_{\overline{y}\,0} = 0 \;, \end{aligned}$$

ıd wenn man, wie es die Beschränkung auf Terme zweiter Ordnung erfordert, er $W_z = W$ setzt, erhält man aus den Randgliedern in (3. 11)

$$+\frac{1}{2}\,W\left[\left(v_{_{y}}\,\delta v_{_{x}}+v_{_{x}}\,\delta v_{_{y}}\right)_{l}-\left(v_{_{\overline{y}}}\,\delta v_{_{\overline{x}}}+v_{_{\overline{x}}}\,\delta v_{_{\overline{y}}}\right)_{0}+2\left(v_{_{y}\,l}\,\delta v_{_{y}\,l}\,\mathrm{tg}\,\tau_{l}-v_{_{\overline{y}}\,0}\,\delta v_{_{\overline{y}}\,0}\,\mathrm{tg}\,\tau_{0}\right)\right].$$

a man hiefür auch

$$-\left.\delta\left[\frac{1}{2}\left.W\left(v_{xl}\,v_{yl}-v_{\overline{x}\,0}\,v_{\overline{y}\,0}+v_{yl}^{2}\,\mathrm{tg}\,\tau_{l}-v_{\overline{y}\,0}^{2}\,\mathrm{tg}\,\tau_{0}\right)\right]\right.$$

erreiben kann, sind auch die pseudotangentialen Momente konservativ. Ihre tentielle Energie ist

$$V_{W} = -\frac{1}{2} W_{z} \int_{0}^{l} (v_{x} v'_{y} - v_{y} v'_{z} + 2 \varepsilon') dz + \frac{1}{2} W (v_{xl} v_{yl} - v_{\bar{x}0} v_{\bar{y}0} + v^{2}_{yl} \operatorname{tg} \tau_{l} - v^{2}_{\bar{y}0} \operatorname{tg} \tau_{0})$$
(3. 12d)

d ihre virtuelle Arbeit

$$\begin{split} \delta A_W &= W_z \int\limits_0^l \left(v_y' \, \delta v_x - v_x' \, \delta v_y + \delta \varepsilon' \right) \, dz \\ &- W \left[v_{yl} \left(\delta v_{xl} + \delta v_{yl} \, \mathrm{tg} \, \tau_l \right) - v_{\overline{y}\,0} \left(\delta v_{\overline{x}\,0} + \delta v_{\overline{y}\,0} \, \mathrm{tg} \, \tau_0 \right) \right] \, . \end{split}$$
 (3. 13d)

Durch Zusammenfassen sämtlicher Ergebnisse erhält man endlich Satz 4. Semi-, quasi- und pseudotangentiale Momente sind im Gegensatz zu axialen und tangentialen stets konservativ.

Auf Grund dieses Satzes können Stabilitätsprobleme mit semi-, quasi- un pseudotangentialen Momenten mit Hilfe des statischen Stabilitätskriteriur [4] gelöst werden.

4. Differentialgleichungen und Randbedingungen

Die virtuelle Arbeit sämtlicher inneren und äußeren Kräfte ist dur $\delta A = \delta A_i + \delta A_K + \delta A_W$ gegeben und nimmt, wenn man (3.3), (3.6) up (3.13) addiert, die Form

$$\begin{split} \delta A &= \int\limits_{0}^{l} \left(\alpha \ v_{x}'' + W \ v_{y}' + K_{x}\right) \ \delta v_{x} \ dz + \int\limits_{0}^{l} \left(\alpha \ v_{y}'' - W \ v_{x}' + K_{y}\right) \ \delta v_{y} \ dz \\ &+ \int\limits_{0}^{l} \gamma \ \varepsilon'' \ \delta \varepsilon \ dz + R \end{split} \label{eq:deltaA} \end{split} \ . \tag{4.}$$

an. Dabei ist mit R der Randterm bezeichnet, der im semitangentialen Fall Π

$$R = -\left\{ \left(\alpha \ v_x' + \frac{1}{2} \ W \ v_y \right) \ \delta v_x + \left(\alpha \ v_y' - \frac{1}{2} \ W \ v_x \right) \ \delta v_y + \left[\gamma \ (\omega + \varepsilon') - W \right] \ \delta \varepsilon \right\}_0^l,$$

$$(4. 2)$$

im quasitangentialen mit

$$R = -\left[\left(\alpha \, v_x' + \, W^{\dagger} \, v_y\right) \, \delta v_x + \alpha \, v_y' \, \delta v_y\right]_l + \left[\left(\alpha \, v_{\vec{x}}' + \, W^{\dagger} \, v_{\vec{y}}\right) \, \delta v_{\vec{z}} + \alpha \, v_y' \, \delta v_{\vec{y}}\right]_0 \\ + \left\{\left[\gamma \, \left(\omega + \varepsilon'\right) - W\right] \, \delta \varepsilon\right\}_0^l$$

$$(4.2)$$

und im pseudotangentialen mit

$$R = -\left[\left(\alpha \ v_{x}^{\prime} + W \ v_{y} \right) \ \delta v_{x} + \left(\alpha \ v_{y}^{\prime} + W \ v_{y} \ \mathrm{tg} \ \tau \right) \ \delta v_{y} \right]_{l}$$

$$+ \left[\left(\alpha \ v_{\overline{x}}^{\prime} + W \ v_{\overline{y}} \right) \ \delta v_{\overline{x}} + \left(\alpha \ v_{\overline{y}}^{\prime} + W \ v_{\overline{y}} \ \mathrm{tg} \ \tau \right) \ \delta v_{\overline{y}} \right]_{0}$$

$$+ \left\{ \left[\gamma(\omega + \varepsilon') - W_{z} \right] \delta \varepsilon \right\}_{0}^{l}$$

$$(4. 2)$$

einzusetzen ist.

Nach dem statischen Stabilitätskriterium ist die kritische die kleinste I lastung, unter der eine nichttriviale, das heißt mit einer Verbiegung der Stachse verbundene Gleichgewichtslage existiert. In dieser muß die virtue Arbeit δA für jede passende, das heißt mit den kinematischen Randbedings gen verträgliche Verschiebung verschwinden. Hieraus folgt erstens, daß spezifische Verdrehung ε' konstant ist, und zwar hat sie im semi- und quatangentialen Fall zufolge (3. 1) und (4. 2) den Wert Null, während sie im ps

lotangentialen Fall von Null verschieden sein kann. Zweitens erhält man für die Verbiegung die Differentialgleichungen

$$\alpha v_x'' + W v_y' + K_x = 0$$
, $\alpha v_y'' - W v_x' + K_y = 0$ (4.3)

ınd für diejenigen Enden, an denen v_x , v_z frei, der Stab also nicht eingespannt st, im semitangentialen Fall die Randbedingungen

$$\alpha v'_x + \frac{1}{2} W v_y = 0$$
, $\alpha v'_y - \frac{1}{2} W v_z = 0$, (4.4b)

m quasitangentialen

$$\alpha v'_{xl} + W v_{yl} = 0$$
, $v'_{yl} = 0$ (4.4c)

peziehungsweise

$$\alpha \, v_{\bar{x}\,0}' + W \, v_{\bar{y}\,0} = 0 \, , \quad v_{\bar{y}\,0}' = 0 \tag{4.5c} \label{eq:4.5c}$$

and im pseudotangentialen

$$\alpha v'_{xl} + W v_{yl} = 0$$
, $\alpha v'_{yl} + W v_{yl} \lg \tau_l = 0$ (4.4d)

eziehungsweise

$$\alpha \, v_{\bar{x}\,0}' + W \, v_{\bar{y}\,0} = 0$$
, $\alpha \, v_{\bar{y}\,0}' + W \, v_{\bar{y}\,0} \, \mathrm{tg} \, \tau_0 = 0$. (4.5d)

Die Differentialgleichungen (4. 3) sowie die dynamischen Randbedingungen (4. 4), (4. 5) lassen sich auch direkt dadurch erhalten, daß man unter Berückichtigung der Neigung der elastischen Linie die beiden Biegemomente bestimmt and gleich $\alpha v_x'$ bzw. $\alpha v_y'$ setzt. Sie sind noch durch die kinematischen Randedingungen, nämlich die an eingespannten Enden gültigen Beziehungen

$$v_x = 0, \quad v_y = 0 \tag{4.6}$$

owie die Forderungen

$$K_x = 0, \quad K_y = 0$$
 (4.7)

eziehungsweise

$$\int_{0}^{l} v_{x} dz = 0, \quad \int_{0}^{l} v_{y} dz = 0$$
 (4.8)

ı ergänzen, je nachdem das obere Ende frei verschieblich oder seitlich geführt t.

Die weitere Behandlung erfolgt zweckmäßig komplex, und zwar dadurch, aß man

$$v_x + i v_y = v, \quad K_x + i K_y = K$$
 (4.9)

etzt und die Abkürzungen

$$\frac{W}{\alpha} = w, \quad \frac{K}{\alpha} = c \tag{4.10}$$

einführt. Die Differentialgleichungen (4. 3) lassen sich nämlich auf diese Wei mit

$$v'' - i w v' + c = 0 (4.1)$$

zusammenfassen, die Randbedingungen (4.4) bis (4.8) mit

$$v' - \frac{1}{2} i w v = 0$$
, (4. 12)

$$v'_{xl} + w v_{yl} = 0$$
, $v'_{yl} = 0$, (4. 12)

$$v'_{\overline{x}0} + w \, v_{\overline{v}0} = 0 \,, \quad v'_{\overline{v}0} = 0 \,, \quad (4.13)$$

$$v'_{xl} + w v_{yl} = 0$$
, $v'_{yl} + w v_{yl} \operatorname{tg} \tau_l = 0$, (4.12)

$$v'_{\bar{x}0} + w \, v_{\bar{y}0} = 0 \,, \quad v'_{\bar{y}0} + w \, v_{\bar{y}0} \, \mathrm{tg} \, \tau_0 = 0 \,, \tag{4.13}$$

$$v=0, (4.1)$$

$$c = 0, (4.1)$$

$$\int_{0}^{t} v \, dz = 0 \ . \tag{4.1}$$

In den nächsten Abschnitten sollen mit Hilfe dieser Beziehungen die katischen Momente in den Knickfällen I bis V (Tafel 2) ermittelt werden, jett aber (im Gegensatz zu Tafel 1) unter der Annahme einer semi-, quasi- bzwipseudotangentialen Einleitung des Torsionsmomentes. Da an nichteingespanten Enden je nach der Art des Kraftangriffs verschiedene Randbedingunge zu verwenden sind, gilt – unter dem Vorbehalt seiner Bestätigung in den Aschnitten 5, 6 und 8 –

Satz 5. Ber Betrag des kritischen Momentes in einem bestimmten Knickfan hängt im allgemeinen davon ab, ob es axial, tangential, semi-, quasi- oder pseud tangential angenommen wird.

In den Knickfällen I und II, in denen beide Enden eingespannt sind, ist freilich das Knickmoment bei tangentialer, semi- und quasitangentialer Blastung dasselbe wie bei axialer, während aber mit Rücksicht auf (2.1) beseudotangentialer Belastung auch hier ein neuer Wert zu erwarten ist.

5. Knickung durch ein semitangentiales Moment

Da das Stabilitätsproblem nach Abschnitt 3 konservativ, das Knickmomer mithin sicher von Null verschieden ist, darf man in (4.11) $w \neq 0$ voraussetze und erhält dann mit

$$v = A e^{i w z} - i \frac{c}{r^0} z + B$$
 (5.

e allgemeinste Lösung, die noch drei unbekannte komplexe Konstanten A, und C enthält.

Im Knickfall IIIb, der sich von IIIa (Tafel 1) uur in der Neigung von \mathfrak{W} iterscheidet, reduziert sich (5. 1) zufolge der am unteren Ende gültigen Randdingung (4. 14) sowie (4. 15) auf

$$v = A (e^{iwz} - 1). (5.2)$$

e für das obere Ende formulierte Randbedingung (4. 12b) führt alsdann auf z Eigenwertgleichung exp (i w l) = -1 mit den absolut kleinsten Wurzeln = $\pm \pi/l$, nach (4. 10) also auf das Knickmoment

$$W_k = \pm \pi \frac{\alpha}{l}. \tag{5.3}$$

Im *Knickfall IV b* fül:rt die für das untere Ende formulierte Randbedingung 14) zusammen mit (4. 16) auf

$$v = A \left[e^{iwz} + \frac{2}{l} \left(1 - \frac{e^{iwl} - 1}{iwl} \right) z - 1 \right]$$
 (5.4)

'd die Randbedingung (4. 12b) für das obere Ende mit

$$w l = W \frac{l}{\alpha} = u \tag{5.5}$$

[die Eigenwertgleichung

$$\operatorname{ctg}\frac{u}{2} = \frac{u}{2} + \frac{2}{u},$$

, man $u/2=\pm 3,406$ und damit das Knickmoment

$$W_k = \pm 6.812 \, \frac{\alpha}{L}$$
 (5. 6)

'nimmt.

Im Knickfall Vb liefert die Randbedingung (4. 16) zunächst

$$v = A\left(e^{iwz} - \frac{2}{l} \cdot \frac{e^{iwl} - 1}{iwl}z\right) - B\left(\frac{2}{l}z - 1\right)$$
 (5.7)

ıl die für beide Enden formulierte Randbedingung (4. 12b) mit (5. 5)

$$tg\,\frac{u}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{u_i^2}{2}=0\,.$$

raus gewinnt man $u/2 = \pm 2,456$ und hat somit

$$W_k = \pm 4.912 \, \frac{\alpha}{l} \,. \tag{5.8}$$

Die hier unterdrückte Rechnung für die Knickfälle I und II bestätigt e für ein axiales Moment erhaltenen Resultate. Sie sind mitsamt den neuen¹) Tafel 2 zusammengestellt, und zwar ist $k - u/\pi$ der in die Greenhillsche Form

(1. 1) einzusetzende Zahlenfaktor.

Tafel 2
Knicklaktor k bei axialer, semi-, quasi- und pseudotangentialer Belastung

Knickfälle	I	II		II	I
Rardsed.	JN 1		<i>†</i>	1	, A , San
	<i>/</i>	/ 	¥	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	•
a) axiales Moment	2,861	2	0	0	2
(b) semitang. Moment	2,861	2	1	2,168	1,564
(c) quasitang. Moment	2,861	2	0,5	1,576	$\beta = 0: 1$ $\beta = \frac{\pi}{2}: 1,021$
(d)pseudotang. Moment	∞	00	00	00	β=0:∞

6. Knickung durch ein quasitangentiales Moment

Um das Knicknoment auch in den quasitangentialen Fällen zu ermitte kann man an die Lösungen (5. 2), (5. 4) und (5. 7) anknüpfen, die aber jetzt sich die noch nicht verwendeten Randbedingungen (4. 12c), (4. 13c) nicht körplex schreiben lassen – unter Zerlegung der Konstanten gemäß $A = A_x + i$ $B = B_x + i$ B_y in ihre Real- und Imaginärteile aufgespalten werden müssen

Im Knickfall IIIc führt (5. 2) mit der Randbedingung (4. 12c) zusamrauf die Eigenwertgleichung $\cos(\pi t) = 0$ und damit auf das Knickmoment

$$W_k = \pm \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{l}.$$
 (6)

¹) Die genauere Berechnung sämtlicher Zahlenwerte verdanke ich – wie auch die Kont der übrigen Resultate – Herrn U. Hochstrasser, dipl. Phys. ETH.

Im Knickfall IV c hat man (5.4) analog zu behandeln und kommt mit 5.5) auf die Eigenwertgleichung

$$\left(\frac{u^4}{4} + 2\right)\cos u + 2u\sin u - u^2 - 2 = 0$$
.

Die absolut kleinsten, von Null verschiedenen Wurzeln derselben sind $=\pm4,952$, das Knickmoment mithin

$$W_k = \pm 4{,}952 \frac{\alpha}{l}$$
. (6. 2)

Im Knickfall Vc enthält die Eigenwertgleichung, die mit (4.12c) und 1.13c) aus (5.7) gewonnen wird, den Winkel β , um den (Figur 5) die beiden elastenden Kräftepaare gegeneinander verdreht sind. Sie lautet mit (5.5)

$$u^{3} \sin u \cos^{2} \beta + \left[\left(\frac{u^{4}}{4} - 2 u^{2} \right) \sin u + (u^{3} - 2 u) \cos u + 2 u \right] \cos \beta \sin \beta$$
$$- \left[\left(\frac{u^{4}}{4} - 2 u^{2} + 2 \right) \cos u + 2 u \sin u + u^{2} - 2 \right] \sin^{2} \beta = 0.$$

n praktisch wichtiesten Sonderfall gegeneinander unverdrehter Kräftepaare i=0) reduziert sie sich auf sin u=0 und ergibt das Knickmoment

$$W = -\frac{\pi}{l} \frac{\pi}{l} . \tag{6.3}$$

nd andererseits die Paare um einen rechten Winkel gegeneinander verdreht $=\pi/2$), so erhält man

$$\left(\frac{u^4}{4} - 2u^2 + 2\right)\cos u + 2u\sin u + u^2 - 2 = 0$$

Ld hieraus mit $u = \pm 3,207$ das Knickmoment

$$W_k = \pm 3,207 \, \frac{\alpha}{l} \,. \tag{6.4}$$

Auch diese Ergebnisse sind – zusammen mit den bekannten in den Knicklen I und II – in Tafel 2 eingetragen¹). Im übrigen liefert der Vergleich von [3] und (6, 4) noch den

Satz 6. Bei mehr als einem quasitangentialen Moment hängt die kritische Betung von der gegenseitigen Lage der Kräftepaare ab.

7. Bindungen und kritische Belastung

! In der Theorie der Schwingungen wird gezeigt, daß die kleinste Eigenfresenz mit zunehmender Anzahl der Bindungen im allgemeinen anwächst,

¹⁾ Sie gelten, wie W.T. Kotter festgestellt hat, in den Fällen I bis IV auch für Wellen, die ch ein Kreuzgelenk auf Torsion beansprucht werden.

keinesfalls aber abnimmt. Mit Rücksicht auf die Analogie, die zwischen Schwigungsaufgaben einerseits und Stabilitätsproblemen bei statischer Behandlur andererseits besteht [4], [9], ist zu erwarten, daß ein ähnlicher Satz ganz a gemein auch für die kritische Belastung gilt. In der Tat zeigt Tafel 2, daß d. Knickmoment sowohl bei semitangentialer wie quasitangentialer Belastungen Knickfall III über II bis I, von III bis IV und von V bis IV anwächst, unbeim Vergleich der zugehörigen Eulerschen Knicklasten stellt man dassel Verhalten fest.

Ein beliebiges konservatives System A, das gewissen Bindungen unterlieg ist stabil, solange seine potentielle Energie positiv definit, nämlich in einer tr vialen Gleichgewichtslage Null und in jeder anderen kinematisch möglichen das heißt mit den Bindungen verträglichen – Lage größer als Null ist. Dies Satz liegt [4] dem energetischen Stabilitätskriterium zugrunde. Unterscheid sich ein zweites System B nur darin von A, daß es neben den Bindungen von eine oder mehrere weitere starre, das heißt keine Arbeit leistenden Bindung aufweist, so besitzt es die gleiche potentielle Energie wie A. Solange diese fA positiv definit ist, ist sie es auch für B, da jede kinematisch mögliche Lavon B auch eine solche von A ist; die kritische Belastung von B kann al nicht kleiner sein als diejenige von A. Damit gilt aber allgemein

Satz 7. Die kritische Belastung eines konservativen Systems nimmt beim Hizufügen von starren, das heißt keine Arbeit leistenden Bindungen im allgemeinzu, keinesfalls aber ab.

8. Knickung durch pseudotangentiale Momente

Bei der Knickung durch pseudotangentiale Momente treten einige ne Gesichtspunkte auf.

Erstens enthalten die hier erstmals zur Verwendung kommenden Randldingungen (4. 12d) und (4. 13d) die Drehwinkel τ_l und τ_0 der Endquerschnit Diese hängen von der Querschnittsform und von der Querzahl des Materiab, so daß mit der Möglichkeit von Knickfällen zu rechnen ist, bei denen ckritische Moment und insbesondere der Faktor k in der Greenhillschen Form (1. 1) Funktionen des Werkstoffes und der Querschnittsform sind.

Zweitens ist daran zu erinnern, daß die in der Differentialgleichung (4. I und in verschiedenen Randbedingungen auftretende Konstante $w=W/\alpha$ n dem Moment W unmittelbar vor dem Ausknicken gebildet ist, das nach (2. und Figur 2 (d) gemäß

$$W = W_0 \cos \tau_l = 2 \ P \ a \cos \tau_l$$

aus dem Moment $W_0 - 2\,P\,a$ vor der Belastung bzw. aus der am Querarm zugreifenden Kraft P hervorgeht.

Wir dürsen uns im folgenden aus Symmetriegründen auf positive Momer W und damit auch auf positive τ_i beschränken. Als dritte Besonderheit c

oseudotangentialen Belastung ist dann zu erwähnen, daß der Stab nur ein beschränktes Moment aufnimmt. Da nämlich [wie aus Figur 2 (d) hervorgeht und bereits in Abschnitt 2 vermerkt wurde] $\tau_1 < \pi/2$ und für den Drehwinkel um unteren Ende, sofern der Stab hier um die Achse drehbar gelagert und wie ben quasitangential belastet ist, aus Gleichgewichtsgründen $\tau_0 = -\tau_1$, mithin $0 \ge -\pi/2$ gilt, bleibt der totale Drehwinkel des Stabes kleiner als $\pi/2$ (bei estem unterem Ende) bzw. π (bei drehbarem unterem Ende), und damit bleibt uch W beschränkt. Jede Vergrößerung der Kräfte $\mathfrak{P}, -\mathfrak{P}$ hat nur eine Abahme der Paarbreite zur Folge, wodurch eine Steigerung von W bis zum Berag, der einem totalen Drehwinkel $\pi/2$ bzw. π entspricht, verunmöglicht wird.

Ist τ_l der totale Drehwinkel des Stabes und γ dessen Torsionssteifigkeit, so ilt nach (5,5)

$$\tau_l = \frac{W}{\gamma} \; l = \frac{\alpha}{\gamma} \; w \; l = \frac{\alpha}{\gamma} \; u \, .$$

ührt man hier mit E, G, m, I, I_p , k den Elastizitätsmodul, den Schubmodul nd die Querzahl, das axiale sowie das polare Trägheitsmoment des Querchnittes und schließlich die für die Querschnittsform typische Konstante¹) n, die für rotationssymmetrische Profile den Wert 1 hat und für alle anderen rößer ist, so gilt

$$\alpha = E I$$
, $\gamma = \frac{G I_p}{\overline{k}} = \frac{1}{\overline{k}} \cdot \frac{m E}{2(m+1)} \cdot 2I$

nd damit

$$\tau_t \cdot k \stackrel{m}{=} \frac{1}{m} u. \tag{8.1}$$

t $\tau_l - \tau_0 = 2 \tau_l$ der totale Drehwinkel, so kommt statt (8. 1)

$$\tau_l = \hat{k} \frac{m+1}{m} \cdot \frac{u}{2}. \tag{8.2}$$

$$\tau_i < \frac{\pi}{2} \tag{8.3}$$

 \mathbb{R} , sind nach (8. 1) bzw. (8. 2) größere Werte von u, nämlich solche, die der \mathbb{R} gleichung

$$u < \frac{1}{\overline{k}} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot \frac{\pi}{2}$$
 bzw. $u < \frac{1}{\overline{k}} \cdot \frac{m}{m+1}$ π (8.4)

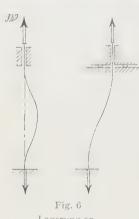
idersprechen, nicht realisierbar, und wenn die kleinste positive Wurzel der igenwertgleichung der einen oder anderen Ungleichung (8.4) nicht genügt, tt überhaupt kein Knicken ein; es ist also $W = \infty$. Somit gilt

¹⁾ Vergleiche C. B. Biezeno und R. Grammel, *Technische Dynamik* (Springer, Berlin 1939), 549.

Satz 8. Bei pseudotanzentialer Belastung kann der Stab unabhängig von ihr. Größe knickfest sein.

Dieser Satz bildet das Gegenstück zu der in Abschnitt 1 besprochenen, v. W unabhängigen Labilität unter einem axialen Moment.

Mit der Tatsache, daß die Randbedingungen (4.12d) und (4.13d) d Winkel τ_I bzw. τ_0 enthalten, hängt eine vierte Besonderheit des pseudotange tialen Problems zusammen, nämlich die Notwendigkeit, die mit I bis V b zeichneten Knickfälle weiter zu unterteilen. Die Fälle I und H (vgl. Tafel



Lagerung an
«eingespannten» Enden.

lassen sich allgemein nur dadurch verwirklichen, d man sich mindestens einen der beiden Einspan körper, beispielsweise den oberen, um die Acl drehbar (und im Fall II auch translatorisch ve schieblich) denkt. Damit erhält die Axialkom nente von MB am betreffenden Ende den Charakt einer Last (im Gegensatz zu einer Reaktion), u die Randbedingungen würden besser durch langes Lager (Figur 6) dargestellt. In dieser Wel kann man aber auch die Einspannung am unter Ende oder diejenige in den Knickfällen III und modifiziert denken, und da sich dabei die bisl verwendeten Randbedingungen nicht ändern, diese Modifikation bei axialer, tangentialer, ser oder quasitangentialer Belastung bedeutungslos. pseudotangentialen Fall dagegen kommt der vor

abhängige Winkel τ_l in den Randbedingungen (4. 12d) und τ_0 in (4. 13d)] von Da er eine obere Schranke besitzt, muß in den Knickfällen I und II mit neu Ergebnissen gerechnet werden. Da ferner sein Zusammenhang mit u, je nach dem nur ein Ende drehbar ist oder beide, durch (8. 1) oder (8. 2) gegeben wir besteht die Möglichkeit verschiedener Knickmomente bei beiden Varianten et und desselben Knickfalles. Wir wollen diese Varianten dadurch unterscheide daß wir die Belastung bei festem unterem Ende einseitig, bei drehbarem er gegen beidseitig pseudotangential nennen. Im Knickfall V ist übrigens aus pretischen Gründen nur die beidseitig pseudotangentiale Belastung von Bedeutur

Im $Knickjall\ IIId$ kann man an die Lösung (5, 2) anknüpfen und erhä wenn man sie noch den Randbedingungen (4, 12d) anpaßt, die Eigenwegleichung

$$\operatorname{ctg} u + \operatorname{tg} \tau_l = 0. ag{8.}$$

Nach (8. 1) und (8. 2) ist auf alle Fälle $\tau_l > u/2$, so daß man unter Berücksicl gung von (8. 3)

$$0 < \frac{u}{2} < \tau_l < \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

t. Dieser Einschränkung zufolge ist aber

$$\operatorname{ctg} u + \operatorname{tg} \tau_{l} > \operatorname{ctg} u + \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^{2}(u/2)}{2 \operatorname{tg}(u/2)} + \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{1}{\sin u},$$

nd da nach (8.6) $1/\sin u > 0$ ist, die Eigenwertgleichung also im fraglichen stervall keine Lösung besitzt, gilt sowohl bei ein wie bei beidseitig pseudongentialer Belastung

$$W_k = \pm \infty . ag{8.7}$$

Die Knickjälle Id, IId und IVd erledigen sich ohne Rechnung; auf Grund an Satz 7 gilt (8. 7) auch für sie, und zwar in beiden Unterfällen.

Im Knickfall V d knüpft man an die Lösung (5.7) an, die noch den Randdingungen (4.12d sowie (4.13d) zu unterwerfen ist. Beschränkt man sich bei auf den Fall im unbelasteten Zustand paralleler Querarme, indem man Figur 5 $\beta = 0$ setzt und die Querstriche in (4.13d) wegläßt, so kommt an mit der Abkürzung

f die Eigenwertgleichung

$$(u + 2t - ut^2) \sin u - 2t(u + t) \cos u + 2t^2 = 0$$
,

e man mit

$$g(u) = 2(1 - \cos u) - u \sin u$$

ch in der Form

$$f(u) = t^2 g(u) + 2 t g'(u) + u \sin u = 0$$

schreiben kann. Da u und t positiv vorausgesetzt werden durften und die atwicklung $g(u) = u^4/12...$ gilt, ist f(u) für kleine u positiv. Da aber nach 6) $0 < u < \pi$ ist und, wie man durch Ableiten feststellt, g'(u) und g''(u) in esem Intervall größer als Null sind, gilt f(u) > 0 im ganzen Intervall. Hieraus gt, daß das Knickmoment auch in beiden Unterfällen von Vd durch (8.7) geben ist.

Auch diese Resultate, die alle unabhängig vom Werkstoff und von der terschnittsform sowie für ein- und beidseitig pseudotangentiale Belastung ten, sind in Tafel 2 eingetragen.

9. Schlußbemerkungen

Der Vergleich der in Tafel 2 zusammengestellten Resultate zeigt, daß die hickgefahr von der Art abhängt, wie das Torsionsmoment eingeleitet wird. Er stätigt damit Satz 5 und gibt im übrigen zu folgenden Bemerkungen Anlaß:

a) Durch pseudotangentiale Momente läßt sich ein Stab der hier betrachen Art in den Fällen I bis V (im Fall V jedenfalls unter der Voraussetzung = 0) nicht knicken.

b) In den Fällen I und II stimmt das semi- und das quasitangenti Knickmoment mit dem axialen überein; hier gilt also – vom pseudotangetialen Fall abgesehen – die Greenhillsche Formel in der von E. L. NICOLAI für I und von A. G. GREENHILL [1] für II angegebenen Form.

c) In den Fällen III bis V, in denen sich das semi- und das quasitangenti Knickmoment unterscheiden, ist das erste größer als das zweite. Die Kniggefahr nimmt also – sonst gleiche Verhältnisse vorausgesetzt – allgemein verder pseudotangentialen Belastung über die semitangentiale bis zur quasitagentialen zu.

d) Im Fall V ist das von A. G. Greenhill [1] berechnete Knickmome (vgl. Abschnitt 1) bei axialer Belastung durch A. Trösch [7] bestätigt; semi- oder quasitangentialer Belastung unterschätzt es die Knickgefahr.

e) Die Greenhillschen Ergebnisse sind – vor allem im Fall V – nach verschidenen Richtungen erweitert worden ([1], 2], [10] bis [14]), nämlich durch E bezug einer Druckkraft, durch Verallgemeinerung auf Stäbe mit zwei verschidenen Biegesteifigkeiten und durch Übertragung auf die Schraubenfeder sowauf das Problem der kritischen Drehzahlen. Auch diese Erweiterungen dürfen unter der Annahme einer semi-, quasi- oder pseudotangentialen Eleitung des Torsionsmomentes gewisser Korrekturen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. G. Greenhill, On the Strength of Shafting when Exposed Both to Tors and End Thrust, Proc. Inst. Mech. Engin. 182 (1883).
- 2 H. Ziegler, Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben und Wellen, ZAMP 265 (1951).
- [3] H. Ziegler, Zum Begriff des konservativen Systems, Elemente Math. scheint demnächst).
- [4] H. Ziegler, Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ing. Arch. 20, (1952).
- [5] A. Pflüger, Stabilitätsprobleme der Elastostatik (Springer, Berlin, Götting und Heidelberg 1950), S. 67.
- [6] H. Ziegler, Ein nichtkonservatives Stabilitätsproblem, Z. angew. Math. Me 31, 265 (1951).
- 7] A. Trösch, Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wellen, Dissertat-ETH. (erscheint demnächst).
- S' E. L. NICOLAI, Über die Stabilität des zu einer Schraubenlinie gebogenen wegedrillten Stabes, Z. angew. Math. Mech. 6, 30 (1926).
- [9] E. Stiefel und H. Ziegler, Natürliche Eigenwertprobleme, ZAMP 1, (1950).
- [10] R. GRAMMEL, Das kritische Drillungsmoment von Wellen, Z. angew. Man Mech. 3, 262 (1923); siehe auch C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, Technis: Dynamik (Springer, Berlin 1939), S. 540.
- [11] C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik (Springer, Beu 1939), S. 552.

- 2] J. A. Haringx, On the Buckling and Lateral Rigidity of Helical Springs, Proc. Nederl. Akad. Wet. 45, 533 und 650 (1942); vgl. auch Philips Res. Rep. 3, 401 (1948) und 4, 49 (1949).
- 3] H. ZIEGLER und A. HUBER, Zur Knickung der gedrückten und tordierten Schraubenfeder, ZAMP 1, 189 (1950).
- 4] R. Grammel, Der Einfluß der Wellentorsion auf die kritische Drehzahl, Stodola-Festschrift (Orell-Füßli, Zürich und Leipzig 1929), S. 180; vgl. auch C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik (Springer, Berlin 1939), S. 796.

Summary

Stability problems concerning thin rods and shafts subjected to torsion and arust are usually treated under the assumption that during deflection the moment vectors of the external couples remain parallel to the axis. In consequence this rather questionable assumption these problems are nonconservative; in the very simple buckling cases the critical load is found to be zero, and in the umerous problems of critical speed every angular velocity results to be critical.

It seems more appropriate to assume that the vectors of the forces contribing to the external moments retain their directions. Then, as a rule, the oment vector is inclined, its slope, however, differing from that of the deflection tree and depending on the manner in which the forces are applied. Under this sumption the problem is conservative and yields new (in some cases even bitrarily high) values for the critical load.

As a first application the buckling moments are recalculated for a prismatic d with two equal flexural rigidities, subjected to torsion under various end nditions.

ingegangen: 27. 8. 1951.)

Zur Theorie des Magnetronverstärkers

Von Fritz Lüdi, Baden¹)

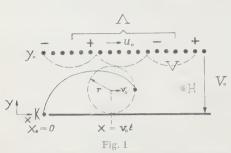
Einleitung

Im folgenden wird dargelegt, wie nach den Gleichungen einer früheren itersuchung des Verfassers über das Magnetron²) die Theorie des Magnetronrstärkers in einfachster Weise folgt und für Synchronismus zwischen elektrongnetischer Welle und Elektronenwelle dieselben Resultate wie die Arbeit in Brossart und Döhler³) ergibt. Darüber hinaus führt eine Diskussion ser Gleichungen auf die Möglichkeit der Verstärkung, wenn die Elektronenlle langsamer als die elektromagnetische Welle läuft. Dieser Untersynchromus ist physikalisch deshalb möglich (im Gegensatz zur Travelling-Wave-

¹⁾ Brown, Boveri & Cie., Baden.

F. LÜDI, Helv. Phys. Acta 16, 59 (1943) [mit I bezeichnet].
 J. BROSSART und O. DÖHLER, Ann. Radioélectr. 3, 328 (1948)

Tube¹), weil die Elektronen nach dem Durchlaufen der feldstarken Zone zw schen den Segmenten, respektive in der Nähe der Helix, immer wieder



Schema des Magnetronverstarkers. Die Helix ist als flache «Wendel» ausgebildet, gegenüber die Leitelektrode, welche die an der Kathode K emittierten Elektronen längs der Verzögerungsleitung führt.

feldschwache Zonen untertauche und sich deshalb die Wechselwirkun von Feld und Elektronen bei Schlunicht aufhebt (Figur 1).

Das Wesentliche der zitierte Arbeit I ist das mit rechnerische Analyse entworfene Bild für de ebenen Fall, wonach unter der Wikung der y-Komponente des milaufenden Drehfeldes eine synchremitlaufende Elektronenfokussierung an den Stellen stattfindet, wo die x-Komponente des Drehfeldes die Elektronen unter Energieabgabe i dieses auf die Anode bewegt (Figur

in I). Das gegenlaufende Drehfeld, welches das mitlaufende zum wirklich vohandenen Wechselfeld ergänzt, wurde dort nicht betrachtet. Damit weigentlich die Theorie des Magnetrons auf die Theorie des Magnetronverstärkd zurückgeführt, allerdings ohne daß der Verfasser damals die Konsequenz de Realisierung gezogen hatte. In einer späteren Arbeit²) wurde dann auch de gegenlaufende Drehfeld und der Nichtsynchronismus untersucht, der schin I angedeutet ist. Dies führte zu gewissen Bedingungen und Aussagen, welche im folgenden noch benützt werden.

Es bleibt jetzt noch übrig, zu zeigen, daß die Gleichungen in I mit d Rückwirkung der Elektronenfokussierung auf den Kreis (die Helix) den arlytischen Ausdruck für die Verstärkung gibt. Dies geschieht in enger Anle nung an eine weitere Publikation³) über die Travelling-Wave-Tube; dan ergibt sich auch der direkte Vergleich zwischen den beiden Verstärkern.

Die Methode des gemeinsamen Lösungsansatzes (Pierce) schließt ein Behandlung des Untersynchronismus aus und erfordert eine spezielle Diskusion. Der Untersynchronismus wird für kürzeste Wellen von Interesse, da et Wellenlänge des Wanderfeldes um den Verzögerungsfaktor (etwa 1/10) kleimist. Der damit verbundene Nachteil kleiner Eindringtiefe und Wechselwirkusmit dem Elektronenstrahl wird behoben durch kleineren Verzögerungsfaktor also Verzicht auf Synchronismus.

¹⁾ Während der Drucklegung ist mir eine Arbeit von S. Millman, Proc. I. R. E. 39, 10 (1951) bekannt geworden, nach welcher auch Untersynchronismus bei einer Travelling-Wave-Tu spezieller Konstruktion für 6 mm möglich ist; die Konstruktion ist so gemacht, daß die Elektron ähnlich wie hier immer wieder in feldfreie Zonen untertauchen.

²⁾ F. Lüdi, Helv. Phys. Acta 19, 3 (1946) [mit II bezeichnet].

³⁾ W. Frey und F. Lüdi, ZAMP 1, 237 (1950) [mit III bezeichnet].

1. Der Elektromechanismus

In I wurden aus einem Wanderfeld mit dem Potential V zwischen Anode (elix) und Kathode (oder Leitelektrode)

$$V = s(y)\sin\left(\frac{2\pi}{A}x - \omega t\right), \quad s(y) = \gamma V_0 \frac{\sinh\left(\frac{2\pi}{A}y\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi}{A}y_0\right)}$$
(1)

e Störungskräfte (Fokussierungskräfte), als Mittelwerte über eine Rollkreis riode im bewegten Bezugssystem

$$x = x_0 + v_0 t + \xi$$
,

geleitet

$$v_{y} = \frac{e}{m} \gamma \frac{2\pi}{\Lambda} V_{0} \frac{\cosh\left(\frac{2\pi}{\Lambda}r\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi}{\Lambda}y_{0}\right)} \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x_{0}\right) = \frac{e}{m} E_{y} \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x_{0}\right),$$

$$v_{y} = \frac{e}{m} \gamma \frac{2\pi}{\Lambda} V_{0} \frac{\sinh\left(\frac{2\pi}{\Lambda}y_{0}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda}y_{0}\right)} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x_{0}\right) = \frac{e}{m} E_{x} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x_{0}\right).$$

$$(2)$$

s bedeuten [vgl. Figur 1]: γV_0 Amplitude des Wechselpotentials als Bruch-1 γ vom Gleichpotential V_0 . 1 Wellenlänge des Wanderfeldes, r Rollkreislius der Zykloidenbewegung der Elektronen, v_0 räumliche Startphase, = $V_0/(v_0 \cdot H/c)$ Rollkreisgeschwindigkeit, t Elektronenlaufzeit.) Damit erben sich die gestörten Elektronenbewegungen zu

$$x = x_{0} + v_{0} t + \xi_{1} + \xi_{2}, \quad \xi_{1} = -\frac{v_{0}}{\omega_{0}} \sin \omega_{0} t, \quad \frac{v_{0}}{\omega_{0}} = r,$$

$$y = y_{1} + y_{2}, \quad y_{1} = \frac{v_{0}}{\omega_{0}} (1 - \cos \omega_{0} t),$$

$$\xi_{2} = \frac{K_{x}}{\omega_{0}^{2}} (1 - \cos \omega_{0} t) - \frac{K_{y}}{\omega_{0}^{2}} \sin \omega_{0} t + \frac{K_{y}}{\omega_{0}} t,$$

$$y_{2} = \frac{K_{y}}{\omega_{0}^{2}} (1 - \cos \omega_{0} t) + \frac{K_{x}}{\omega_{0}^{2}} \sin \omega_{0} t - \frac{K_{x}}{\omega_{0}} t,$$

$$\omega_{0} = \frac{e}{m} \cdot \frac{H}{c} = \text{Rollfrequenz}.$$
(3)

r machen jetzt einige Umformungen, um den Anschluß an die Behandlung die Travelling-Wave-Tube zu bekommen.

1. Alle Elektronen starten an der Stelle $x_0 = 0$, aber zu verschiedenen ten t_s . Aus der Form des Drehfeldes, wo jetzt statt der Laufzeit t die Zeit

 $T-t_s-t$ eingeführt wird, geht wie in I hervor, daß die Phase des Drehfele an der Stelle $x_0=0$ zur Zeit $T=-t_s$ dieselbe ist wie an der Stelle x_0 zur ZT=0, das heißt $(2\pi/A)$ $x_0=-\omega$ t_s .

2. Mit Berücksichtigung, daß jetzt für den Rollkreismittelpunkt gilt

$$x = v_0 t$$

und deshalb

$$-\omega t_s = \omega t - \omega T = \frac{\omega}{v_0} x - \omega T$$

ist, werden die Ausdrücke für die «Kraft»-Wellen

$$K_{y} = \frac{e}{m} E_{y} \sin(-\omega t_{s}) = \frac{e}{m} E_{y} \sin(\frac{\omega}{v_{0}} x - \omega T),$$

$$K_{x} = \frac{e}{m} E_{x} \cos(-\omega t_{s}) = \frac{e}{m} E_{x} \cos(\frac{\omega}{v_{0}} x - \omega T).$$

Mit Rücksicht auf den späteren Exponentialansatz zur Lösung der Differentigleichungen gehen wir schon hier zur exponentiellen Schreibweise über ussetzen

$$K_{y} = -j \frac{e}{m} E_{y} e^{j \left(\frac{\omega}{v_{0}} x - \omega T\right)},$$

$$K_{x} = \frac{e}{m} E_{x} e^{j \left(\frac{\omega}{v_{0}} x - \omega T\right)}.$$

Man beachte, daß die Symbole K_y , K_x von jetzt an eine etwas andere Bedtung haben.

Es folgt mit (2)

$$\frac{K_y}{K_x} = -j \frac{E_y}{E_x} = -j \operatorname{ctgh} \left(\frac{\omega}{u_0} r \right)$$

 $(2\pi/\Lambda \text{ ist durch } \omega/u_0 \text{ ersetzt}).$

Diese Gleichung ist statthaft, weil bei der Division die Exponentialfaktor sich wegheben (gleiche Frequenz und gleiche Ausbreitungsgeschwindigk der K_y - und K_x -Wellen).

Damit kann E_y bzw. K_y durch das elektrische Längsfeld E_x (im weiter mit E bezeichnet) ausgedrückt werden

$$K_{y} = -j \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{u_{0}} r\right) \frac{e}{m} E e^{j\left(\frac{\omega}{v_{0}} x - \omega T\right)}, \quad E = \gamma \frac{\omega}{u_{0}} V_{0} \frac{\sinh\left(\frac{\omega}{u_{0}} r\right)}{\sinh\left(\frac{\omega}{u_{0}} y_{0}\right)}.$$

Die Mittelwertsbildung über einen Rollkreis kommt dadurch zum Ausdrudaß die y-Abhängigkeit verschwindet; der Rollkreismittelpunkt y-r und Startphase sind allein maßgebend.

Aus den Koordinaten (3) folgt nun für die mittlere Geschwindigkeit des ektrons in der α -Richtung

$$v_0 + v$$
,

bei der Wechselanteil v mit genügender Näherung durch

$$= \dot{\xi}_2 = \frac{K_y}{\omega_0} = -j \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{u_0} r\right) \frac{e}{m} E e^{\Gamma_0 x} e^{\phi T}, \quad \Gamma_0 = j \frac{\omega}{v_0}, \quad \phi = -i \omega \quad (5)$$

geben ist, da wir von der raschen Oszillation der beiden ersten Glieder abnen.

2. Die Gleichungen für den Elektronenstrahl und für die Helix

Nun können wir den Anschluß an die Travelling-Wave-Tube machen und ernehmen dazu die Gleichungen aus III. Zu der Bewegungsgleichung (5) mmen die linearisierte Stromgleichung und die Kontinuitätsgleichung

$$\varrho_0 \, v - v_0 \, \varrho - i = 0 \,, \quad i' + \dot{\varrho} = 0 \,, \quad v + -j \, a \, E \,, \\
a - \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{e}{m} \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{u_0} \, r\right) \,. \tag{6}$$

Für einen Moment sei die Abhängigkeit von x und T in E gedacht; Index 0 leutet Gleichstromanteil, Punkt Differentialquotient nach der Zeit, Strich ch der Koordinate x. Das zweidimensionale Problem ist jetzt auf ein einnensionales in der x-Richtung zurückgeführt¹); das Gleichungssystem untereidet sich von dem der Travelling-Wave-Tube [Gleichungen (4), (5) und in III] lediglich durch die Bewegungsgleichung, welche hier um eine Ording niedriger ist.

Aus diesem Gleichungssystem könnte der dichtemodulierte Elektronenom aus dem Feld berechnet werden. Doch suchen wir simultane Lösungen er der influenzierenden Rückwirkung des modulierten Elektronenstromes die Helix, für welche nach III das Gleichungssystem

$$C \dot{V} - I' - I'_1 = 0$$
, $L \dot{I} - V' = 0$, $L dx \dot{I} - dV_1 = 0$ (7)

demselben Ersatzschema (III, Figur 1, L Induktivität, C Querkapazität, Längskapazität pro Länge 1) maßgebend ist. Dazu die Kopplungsgleichungen

$$I_1 = \alpha i + C_l \dot{E} , \quad dV_1 = E dx . \tag{8}$$

¹⁾ Diese Behandlung, welche mit Erfolg auf die Berechnung des elektronischen Leitwertes ativer Anschwingwiderstand) bei Dioden, Trioden, Klystrons geführt hat (eindimensional) agt beim Magnetron, weil die Zykloiden sich durchkreuzen. Dadurch wird die hydrodynamische indlung verunmöglicht, weil der Geschwindigkeitsvektor eines Raumelementes sich nicht als eutige Ortsfunktion darstellen läßt. Obige Behandlung ist jedoch gerechtfertigt, weil nur die issierung des Rollkreismittelpunktes berücksichtigt wird.

Das Längspotential dV_1 ist durch den in Abschnitt 1 betrachteten mittler E-Wert gegeben. Der Proportionalitätsfaktor z trägt auch hier der Wirku des Wechselanteils des Elektronenstromes auf die besondere räumliche V teilung des Längsfeldes (Streukapazität) Rechnung.

3. Die charakteristische Gleichung des Systems und ihre Lösung

Die Lösung des homogenen Gleichungssystems (6), (7), (8) durch Expontialansatz

$$V, I, (E, i) \varrho, v \sim e^{\Gamma x} e^{\phi T}$$
 mit $\Gamma = \Gamma_0 + \delta$

ist nur im Fall von Synchronismus von Elektronengeschwindigkeit v_0 u Wanderfeldgeschwindigkeit u_0 möglich,

$$u_0 = v_0$$
.

Der Zusatz δ trägt der Rückwirkung des Elektronenstroms auf die He
 Rechnung.

Mit diesem Ansatz folgt nun aus (6) wie in III für den aus dem Feld modulierten Elektronenstrom

$$i = \frac{-j \, a \, \varrho_0 \, \rlap/\!\! p/v_0}{\Gamma + \rlap/\!\! p/v_0} \, E \; .$$

Durch Umformung von

$$a \varrho_0 = a \frac{i_0}{v_0} = \frac{\frac{e}{m} \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} r\right)}{\omega_0 v_0} i_0 = \frac{\frac{e}{m} \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} r\right)}{\frac{e}{m} \cdot e} i_0$$

folgt

$$a \, \varrho_0 = rac{\operatorname{ctgh}\left(rac{\omega}{v_0}\, r
ight)}{V_0/v_0} \, i_0$$
 ,

also

$$i = \frac{-j \, \mathrm{ctgh} \left(\frac{\omega}{v_0} \, r \right)}{V_0/y_0} \cdot \, \frac{i_0 \, p/v_0}{\varGamma + \, p/v_0} \, E. \label{eq:interpolation}$$

Anderseits wird das durch den Elektronenstrom i influenzierte Feld nach (7) und (8)

$$E = rac{-arGamma^2 L}{\Gamma^2 - rac{p^2 L}{1 + p^2 L} C_l} i rac{p^2 L}{1 + p^2 L} C_l}$$

der bei Einführung von

$$\Gamma \to \Gamma_0 = \frac{p \sqrt{LC}}{\sqrt{1 + p^2 L C_l}} \quad \text{für} \quad i \to 0$$

$$E = \frac{-\Gamma^2}{\Gamma^2 - \Gamma_0^2} \frac{\Gamma_0^2/p C}{r^2 - \Gamma_0^2} \propto i. \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt schließlich die charakteristische Gleichung zur Beimmung von Γ bzw. von δ

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{i_0}{(V_0/y_0)} \frac{-j \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0}\right)}{r_0 C} \cdot \frac{-j \operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0}\right)}{r + p/v_0} \cdot \frac{-\Gamma^2 \Gamma_0^2}{(\Gamma + \Gamma_0)(\Gamma - \Gamma_0)}. \tag{12}$$

ır Lösung wird für die nach rechts laufende Welle der Ansatz

$$\Gamma = \Gamma_0 + \delta = j \frac{\omega}{v_0} x + \delta$$

macht und im Zähler wie auch in etgh (ω,v_0) r mit genügender Genauigkeit $=\Gamma_0$ bzw. ω/v_0 gesetzt. Mit $\phi=-j$ ω wird dann aus der charakteristischen eichung

$$\frac{1}{\mathbf{x}} = \frac{\operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_0} \, r\right) \, \omega^3}{2 \, (V_0/y_0) \, v_0 \, C \, v_0^3} \cdot \, \frac{i_0}{\delta^2}$$

t den beiden reellen Wurzeln

$$\delta = \pm \, K \, , \quad K^2 = \, \frac{ \alpha \, i_0 \, \mathrm{ctgh} \left(\frac{\omega}{v_0} \, r \right) }{ 2 \, \left(V_0 / \bar{y}_0 \right) \, v_0 \, C} \cdot \, \frac{\omega^3}{v_0^3} \, . \label{eq:delta_spectrum}$$

Dies ist also der Hauptunterschied zur Travelling-Wave-Tube, wo drei komexe Wurzeln auftraten, die eine veränderte Phasengeschwindigkeit gegenüber It elektronenstrahlfreien Helix ergaben. Hier bleiben die ungestörten Phasenschwindigkeiten erhalten, weil die Energieabgabe nach I, II senkrecht zur asbreitungsgeschwindigkeit erfolgt; die positive Wurzel ergibt den Verarkungsfaktor. Um den bessern Vergleich mit der Travelling-Wave-Tube bekommen, werde K noch umgeformt mit der Setzung wie in III

$$v_0 C = \frac{\varepsilon^2}{Z_0},$$

 ε das Verhältnis von Phasengeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit

$$\varepsilon = \frac{v_0}{C}$$
 und $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \omega^2 L C_1}$

Wellenwiderstand der Helix ist.

2.1

Damit wird

$$K^{2} = -\frac{\operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_{0}}r\right) \alpha i_{0} Z_{0}}{2 V_{0}/y_{0} \varepsilon^{2}} \cdot \frac{\omega^{3}}{v_{0}^{3}}.$$
 (1

4. Der Verstärkungsfaktor

Entsprechend den zwei Wellen (${}_{\perp}K)$ gelten die beiden Anfangsbedingugen

 $V_1 - V_2 - V^{siq} \; , \quad i_1 - i_2 - 0 \; , \quad \frac{V_1}{\delta_1} + \frac{V_2}{\delta_2} \; = 0 \; . \label{eq:V1}$

Hierbei ist in der Stromgleichung (10) zu berücksichtigen, daß $E_{1,2} = \Gamma_0 \Gamma_1$ also (wegen $\delta_2 = -\delta_1$) $V_1 = V_2 = V^{sig}/2$ ist.

Für die anwachsende Welle erhalten wir also

$$V = \frac{V^{sig}}{2} e^{j\left(\frac{\omega}{v_0} z - \omega T\right)} e^{+Kz}$$

und daraus mit dem Wert von K, (13), für den Verstärkungsfaktor

$$\mathfrak{B} - \frac{\prod_{sig}^{r} l}{|sig} = \frac{1}{2} c^{\operatorname{ctgh}\left(\frac{\omega}{v_{2}}r\right)^{1/2} \left(\frac{\alpha i_{2} Z_{n}}{2 V_{0} | y_{0} \varepsilon^{2}}\right)^{1/2} \frac{\omega^{3/2}}{v_{0}^{3/2}} l}.$$

Daneben sei der entsprechende Ausdruck für die Travelling-Wave-Tu nach III gesetzt

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{3} e^{0.866 \left(\frac{\alpha^2}{4} \frac{i_0}{V_0} \frac{Z_0}{e^2}\right)^{1/3} \frac{\omega}{V_0}} l.$$

Der Unterschied rührt also bei gleicher Helix (Z_0) und gleicher Betriebsspanung Γ_0 vom verschiedenen Elektronenmechanismus her. Daß im Magnetro verstärker α statt α^2 auftritt, ist bedingt durch den expliziteren Ausdruck of fokussierenden Wechselspannung.

5. Diskussion für Nichtsynchronismus, Elektronengeschwindigkeit kleiner als Wanderfeldgeschwindigkeit $v_0 < u_0$

Hier führt der Ansatz (9) als Simultanlösung für Strahl und Welle nic zum Ziel, weil die Elektronenkräfte K_y , K_x im Bezugssystem der Elektrone rollkreisgeschwindigkeit $v_0 = V_0/(y_0 H/c)$ abgeleitet wurden.

Diese Setzung erlaubte auch die Homogenisierung der Differentialglichungen für die Elektronenbewegung. Wollte man mit einem Ansatz anall (9) zum Ziele gelangen, so müßten die Kräfte K_y , K_x neu im Bezugssystem berechnet werden, was mit einem erheblichen Aufwand verbunden sein dürf

Wir beschreiten hier den einfacheren Weg der Diskussion der Bewegungseichungen, ähnlich wie in I der Wirkungsgrad des Magnetrons abgeleitet urde. Wenn wir nämlich zeigen können, daß 1. bei Untersynchronismus auch ne Elektronenfokussierung stattfindet, und 2. diese Elektronenanhäufungen nergie an das Wanderfeld abgeben, ist die Möglichkeit der Verstärkung auch r diesen Fall gegeben, allerdings unter Verzicht auf den analytischen Ausruck für den Verstärkungsfaktor.

Aus (4) entnimmt man das Vorzeichen der fokussierenden Kraft für die erschiedenen Startwinkel ω t_s

$$K_y = -\frac{e}{m} E_y \sin(\omega t_s) \begin{cases} < 0 \ (0 < \omega t_s < \pi) \\ > 0 \ (\pi < \omega t_s < 2\pi) \end{cases}$$

is heißt mit

$$x = v_0 \, t - \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 - v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 \cos \omega_0 \, t + \frac{K_y}{\omega_0} \, t \, , \quad \dot{x} = v_0 + v_0 +$$

deutet dies eine Fokussierung der Elektronen um die Startwinkel

$$\omega t_s = (2n+1)\pi,$$

il die früher $[\omega t_i \le (2n-1)\pi]$ gestarteten Elektronen langsamer als die äter gestarteten $[\omega t_i \ge (2n+1)\pi]$ laufen.

Die Verdünnungen treten an den Startwinkeln

$$\omega t_s = 2 n \pi$$

f. Nun ist weiter ersichtlich, daß nach (4) für die Startwinkel $\omega t_s = (2 n + 1) \pi$

$$K_x = -\frac{e}{2\pi} E_x$$
, $K_y = 0$

also mit

$$y = \frac{v_0}{\omega_0} \left(1 - \cos \omega_0 t \right) - \frac{K_x}{\omega_0} t$$

diesen Stellen eine Synchronbewegung der Elektronenpakete in der xchtung ($K_y = 0$) und gleichzeitig eine Bewegung in positiver y-Richtung
die Anode erfolgt. Wir finden nun weiter mit (3), daß die kinetische Energie
den Zeiten

$$\dot{t} - (2 n + 1) \frac{\pi}{\omega_0}$$

heißt jeweils im Scheitel der Zykloide

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) = \frac{m}{2} \left(4 \, v_0^2 + \frac{e^2}{m^2} \cdot \frac{E_x^2}{\tilde{\omega}_0^2} \right),$$

also unabhängig von y ist. Dagegen nimmt die potentielle Energie

$$E_{pot} = \frac{e \, V_0}{y_0} \, (y_0 - y) = \frac{e \, V_0}{y_0} \left[y_0 - \frac{2 \, v_0}{\omega_0} - \frac{e}{m} \cdot \frac{E_x}{\omega_0} \, (2 \, n + 1) \, \frac{\pi}{\omega_0} \right]$$

mit wachsendem y ab. Das ist nur möglich, wenn die potentielle Energie, st in kinetische Energie überzugehen, an das Wanderfeld abgegeben wird. I Wirkungsgrad für den Magnetronverstärker ist daher wie beim Magnetron dur

$$\eta = \frac{y_0 - 2r}{y_0}$$

gegeben.

Diese Aussagen gelten nun auch für Untersynchronismus. Der einz Unterschied ist der, daß die Werte E_y und E_x kompliziertere als (2) sind; a es tritt dieselbe Abhängigkeit von der Startphase ωt_s wie in (4) auf. In II die Rechnung explizit durchgeführt. Die Bedingungen bei Schlupf sind daß nach m Rollkreisperioden mt_0 das Elektron wieder dieselbe Phase Wanderfeldes antrifft und daß der Mittelwert für die Kraft über diese Zeit nit verschwindet; dies führt zu der Bedingungsgleichung für das Verhältnis v_s

$$\omega\left(1-\frac{v_0}{u_0}\right)=\varkappa\,\omega_0\,. \qquad (\varkappa=0,1,2,3,$$

Herrn Wolfgang Frey danke ich auch hier für fördernde Diskussion

Summary

The author shows that his earlier work on the theory of the magnet (Helv. Phys. Acta 16, 59 [1943]) already contains a conception of the mode operation of the magnetron amplifier and also permits an analytical express to be established for the amplification factor. In contradistinction to the cast the conventional travelling-wave tube, amplification is also possible when electron velocity is considerably lower than the velocity of the travelling fi-

(Eingegangen: 2. 8. 1951.)

Värmespannungen und -deformationen im elastischen Körper bei ebener stationärer Wärmeströmung

Von Fritz Salzmann, Zürich¹)

1. Allgemeines

Einzelne Fälle von Wärmespannungen in elastischen Körpern, wie etwa ie in beheizten Rohren, sind in der Literatur verschiedentlich behandelt orden. Im folgenden sollen aber die Wärmespannungen bei ebener stationärer fömung allgemein betrachtet werden, unter besonderer Berücksichtigung: Deformation. Wie sich zeigen wird, lassen sich dabei allgemeingültige Gezmäßigkeiten herausschälen, in die sich Sonderfälle, wie etwa die obenvähnten, folgerichtig einfügen.

Es wird auch eine allgemeine Methode entwickelt zur Berechnung der irmespannungen und der Deformation eines zylindrischen Körpers, unter onderer Berücksichtigung der Hohlkörper (Rohre) beliebigen Querschnittes.

2. Grundgleichungen für Spannungen und Deformation

Bezeichnungen:

11, 2

= Koordinaten im räumlichen kartesischen Koordinatensystem,

= Temperatur,

= linearer Wärmeausdehnungskoeffizient,

= Elastizitätsmodul,

= Querkontraktionsbeiwert,

 $\frac{E}{2(1+\nu)} = \text{Schubmodul},$

= spezifische Dehnungen,

 $\gamma_{yz}, \gamma_{zx} = \text{Winkeländerungen},$

= Normalspannungen,

 $\tau_{yz}, \tau_{zx} = \text{Schubspannungen},$

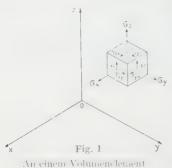
= Verschiebungen in Richtung der Koordinatenachsen x, y, z,

= Wärmeleitfähigkeit.

 u_y, u_z

⁽¹⁾ Forschungsabteilung Escher Wyß AG., Zürich

Zwischen Spannung und Deformation wird bei unveränderter Temperateine lineare Beziehung vorausgesetzt (Hookesches Gesetz). Bei gleichzeitig



angreifende Spannungen.

Erwärmung der Körper setzt sich die gesan Deformation eines Volumenelementes aus zw Anteilen zusammen:

- 1. Aus einer durch die Temperaturerhöhung spannungsfreien Oberflächen des Elemen hervorgerufenen Verformung und
- 2. aus einer durch die an den Oberflächen d Elementes angreifenden Spannungen (Figur hervorgerufenen Verformung.

Der erste Anteil ist eine nach allen Richtung gleichmäßige Dehnung β ϑ , ohne Winkelän rungen, während der zweite Anteil aus Dnungen ε' und Winkeländerungen γ besteht,

zu den Spannungen proportional sind. Die gesamte Verformung stellt sichen kartesischen Koordinatensystem somit folgendermaßen dar:

$$\begin{split} \varepsilon_{x} &= \beta \; \vartheta \; + \frac{1}{E} \left(\sigma_{x} - \nu \; \sigma_{y} - \nu \; \sigma_{z} \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \; \tau_{xy} = \frac{2 \; (1 + \nu)}{E} \; \tau_{xy}, \\ \varepsilon_{y} &= \beta \; \vartheta \; + \frac{1}{E} \left(\sigma_{y} - \nu \; \sigma_{z} - \nu \; \sigma_{x} \right), \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \; \tau_{yz} = \frac{2 \; (1 + \nu)}{E} \; \tau_{yz}, \\ \varepsilon_{z} &= \beta \; \vartheta \; + \frac{1}{E} \left(\sigma_{z} - \nu \; \sigma_{x} - \nu \; \sigma_{y} \right), \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \; \tau_{zx} = \frac{2 \; (1 + \nu)}{E} \; \tau_{zx}. \end{split}$$

Die Dehnungen ε und Winkeländerungen γ sind hierbei in bekannter Weiz mit den Verschiebungskomponenten u_x , u_y , u_z durch die folgenden Behungen verbunden:

$$\begin{split} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{split}$$

Ferner ergibt die Forderung des Gleichgewichtes der an den Oberfläc des Volumenelementes angreifenden Kräfte die bekannten Beziehungen:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

¹) Man vergleiche hiezu etwa E. Trefftz, Mathematische Elastizitätstheorie, in: Hand der Physik, Bd. 6: Mechanik der elastischen Körper (Springer, Berlin 1928).

Diese insgesamt 15 Gleichungen sind hinreichend zur Bestimmung der ei Verschiebungskomponenten u_x , u_x , u_z , der sechs Komponenten des Vertrungstensors ε_x , ε_y , ε_z , $\gamma_{xy}/2$, $\gamma_{xz}/2$, $\gamma_{xz}/2$ und der sechs Komponenten des vannungstensors σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zz} bei vorgegebenem Temperaturverlauf d vorgegebenen Randbedingungen.

3. Ebene Wärmeströmung und ebener Deformationszustand

Die erhaltenen Beziehungen werden nun auf den Fall ebener Wärmeströing reduziert, wobei ϑ nur eine Funktion der Koordinaten x,y ist. Außerdem
rd vorläufig ein ebener Deformationszustand angenommen, also die Verniebungskomponente $u_z=0$ gesetzt. Es wird somit angenommen, eine Dehng in der z-Richtung sei verhindert. In der Axialrichtung eines nach der
achse orientierten zylindrischen Körpers werden damit freilich bei Erwäring Spannungen σ_z auftreten. Eine eventuell geforderte Spannungsfreiheit
den Endflächen kann aber nachträglich durch Anbringen der entgegengezten Spannungen erreicht werden. Auf die Lösung dieses rein elastischen
blems wird weiter unten noch eingetreten.

Es wird nun $\varepsilon_z = 0$. Die dritte der Gleichungen (1) erlaubt damit, σ_z durch und σ_y auszudrücken und aus den ersten beiden Gleichungen zu eliminieren. und u_y sind nur von x und y abhängig. Es wird $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ und $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Man erhält damit die folgenden Gleichungen:

$$E \varepsilon_{x} = (1 + \nu) \left[E \beta \vartheta + (1 - \nu) \sigma_{x} - \nu \sigma_{y} \right],$$

$$E \varepsilon_{y} = (1 + \nu) \left[E \beta \vartheta - \nu \sigma_{x} + (1 - \nu) \sigma_{y} \right],$$

$$E \gamma_{xy} = 2 (1 + \nu) \tau_{xy};$$

$$(4)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x};$$
 (5)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$
 (6)

l dazu für die Spannung σ_z

l. III, 1952

$$\sigma_z = -E \beta \vartheta + \nu (\sigma_x + \sigma_y). \tag{7}$$

4. Die stationäre Wärmeströmung

Die Frage ist naheliegend, ob es ein Gesetz für die Temperaturverteilung (x, y)-Ebene senkrecht stehenden Ebenen spannungssind. Es wäre in diesem Fall $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} \equiv 0$. Die Gleichungen (4)

ergeben dann, unter Berücksichtigung von (5),

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = (1+\nu) \beta \vartheta, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = (1+\nu) \beta \vartheta, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0.$$

Differenziert man die letzte dieser Gleichungen nacheinander partiell na x und nach y und setzt aus den ersten beiden $\partial u_x/\partial x$ und $\partial u_y/\partial y$ ein, so erhäman die Bedingung

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0,$$

das heißt, eine Spannungsfreiheit der geforderten Art ist nur bei stationäs Wärmeströmung in einem von Quellen freien Gebiete möglich.

Auf anderem Wege erhält man dieses Resultat auch beispielsweise dur Einführen der Airyschen Spannungsfunktion F, wobei die durch die Glachungen:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$
, $\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

definierten Spannungen die Gleichgewichtsbedingungen (6) erfüllen. Die Gluchungen (4) und (5) führen dann nach Elimination der Deformationsgröß auf die Beziehung:

$$\Delta \Delta F = -\frac{E \beta}{1 - \nu} \Delta \vartheta,$$

wobei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Wenn die Temperaturverteilung die Gleichung (9) erfüllt, also $\Delta\theta=0$ is so folgt $\Delta\Delta F=0$; das heißt $F\equiv 0$, und damit $\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0$, ist ein mögliche Lösung. Spannungen außer σ_z können also nur noch infolge von Rambedingungen bezüglich wirkender Randkräfte oder bezüglich Deformation, over dieser Lösung nicht erfüllt werden, auftreten.

Die Bedingungen (8) können auch in der folgenden Weise geschrieb werden:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial u_y}{\partial x}.$$
 (1)

Diese Gleichungen sind als Cauchy-Riemannsche Beziehungen bekan und werden erfüllt, wenn u_x und u_y den Realteil und den Imaginärteil eir Funktion w der komplexen Variablen z - x + i y darstellen¹).

$$w(z) = u_x + i u_y. ag{7}$$

 $^{^{1}}$) Die Bezeichnung z entspricht der allgemein üblichen Darstellungsweise und ist natürlinicht zu verwechseln mit der räumlichen Koordinate z.

Wird andererseits von der Temperatur ϑ die Laplacesche Gleichung (9) erallt, so kann bekanntlich auch ϑ als Realteil einer Funktion $\Omega(z)$ der kompleen Variablen z = x + i y dargestellt werden:

$$\Omega(z) = \vartheta(x, y) + i \chi(x, y) . \tag{12}$$

ist dabei die Stromfunktion für die Wärmeströmung.

Die Gleichungen (8) werden nun erfüllt, wenn

$$\frac{dw}{dz} = (1+\nu)\beta\Omega \tag{13}$$

:. Umgekehrt kann aber auch, sofern \varOmega im ganzen Bereich stetig ist, bei vorgebener Funktion \varOmega durch Integration die Funktion ϖ gefunden werden

$$w = (1 + \nu) \beta \int \Omega dz. \tag{14}$$

Es ergibt sich also der Satz: Bei ebener stationärer Temperaturverteilung, im ganzen, einfach zusammenhängenden Bereich der Laplaceschen Diffentialgleichung (9) genügt, gibt es für die Deformation eine Lösung, bei der Ebenen senkrecht zur (x,y)-Ebene keine Spannungen auftreten. Wird die mperatur als Realteil einer analytischen Funktion $\Omega(z)$ dargestellt, so sind Verschiebungen u_x und u_y Real- und Imaginärteil der Funktion w(z), die mäß Gleichung (14) durch Integration der Funktion Ω nach z erhalten wird.

Es ist dann $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$, und die Spannung senkrecht zur (x, y)pene ist

$$\sigma_z = -E \beta \vartheta . \tag{15}$$

Der Verlauf der Deformation und der Spannungen senkrecht zur (x, y)bene soll nun an einigen Beispielen gezeigt werden:

a) Linearer Temperaturverlauf

Es handelt sich hierbei um eine reine Parallelströmung der Wärme, die ene Einschränkung der Allgemeinheit als in Richtung der x-Achse verlaufend genommen werden kann. Es ist hier:

$$\Omega = kz - kx + iky.$$

? Temperatur ist $\vartheta = k x$; der Wärmestrom geht natürlich bei positivem k Richtung der negativen x-Achse. Nach Gleichung (14) kann nun sofort w halten werden

$$w = (1 + \nu) \beta \int k z dz = (1 + \nu) \beta k \frac{z^2}{2} = (1 + \nu) \beta \frac{k}{2} (x + i y)^2.$$

Trennung in Realteil und Imaginärteil ergibt

$$u_x = (1 + \nu) \beta \frac{k}{2} (x^2 - y^2)$$
, $u_y = (1 + \nu) \beta k x y$.

Die Normalspannung σ_z ist nach Gleichung (15)

$$\sigma_z - E \beta \vartheta - E \beta k x$$
,

während alle anderen Spannungen zu Null werden. Die Linien x = const der (x, y)-Ebene erfahren eine Krümmung, wie in Figur 2 dargestellt.

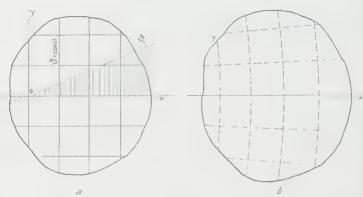


Fig. 2

Temperaturverlauf und Deformation bei linearer Temperaturverteilung in einem Körper (glei mäßiger Parallelstrom der Wärme). a Temperaturnetz; b Deformation.

b) Quellströmung

Eine Quelle im Nullpunkt des Koordinatensystems wird durch die Funktig

$$\Omega = -a \lg z = -a \ln r - a i \varphi$$

erhalten, wenn z in der Form $z=r\,e^{i\,\varphi}$ dargestellt wird. Es wird hiebei bekannter Weise $\vartheta=-a\ln r$.

Integration von Ω nach z liefert nun

$$w = -(1 + \nu) \beta a z (\lg z - 1) = -(1 + \nu) \beta a r e^{i \varphi} (\ln r + i \varphi - 1)$$

Durch Trennung von Realteil und Imaginärteil erhält man

$$u_x = -\left(1+
u
ight)eta$$
 a $r\left[\left(\ln r - 1
ight)\cos arphi - arphi\sin arphi
ight]$,

$$u_y = -(1+\nu) \beta a r [(\ln r - 1) \sin \varphi + \varphi \cos \varphi].$$

is ist aber in diesem Fall einfacher, sich auf die radiale und die Umfangskomonente der Verschiebung zu beziehen. Es wird

$$\begin{split} u_r &= \quad u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi = - \left(1 + v \right) \beta \ a \ r \left(\ln r - 1 \right) \,, \\ u_\varphi &= - \, u_x \sin \varphi + u_y \cos \varphi = - \left(1 + v \right) \beta \ a \ r \ \varphi \,. \end{split}$$

ie Normalspannung ist

$$\sigma_z - E \beta a \ln r$$
.

In Figur 3 ist auf Grund dieser Beziehungen die Deformation des Quer-

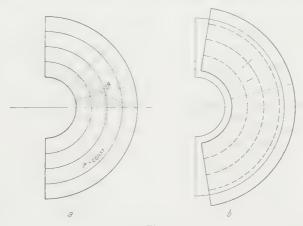


Fig. 3

Temperaturverlauf und Deformation bei ebener Quellströmung. a Temperaturnetz, b Deformation des Querschnittes eines halben Hohlzylinders.

unittes eines halben Hohlzylinders, durch den Wärme von innen nach außen römt, dargestellt.

Eine spannungsfreie Verformung ist nicht möglich, wenn die Quelle vom örper ganz umschlossen ist. Man sieht dies sofort daraus, daß u_q bei einem Ellen Umlauf um den Nullpunkt bis zur Erreichung des Ausgangspunktes en um den Betrag $\Delta u_{\varphi} = -(1+v)~\beta~a~2~\pi~r$ veränderten Wert annimmt. In voller Zusammenhang auf dem ganzen Umfang eines die Quelle umschließenden Kreises ist daher nicht möglich, ohne daß Spannungen auftreten. Der breier muß bis zur Quelle aufgeschlitzt werden (Figur 4). In zwei benachbarten inkten A,B beidseitig des Schlitzes, wobei B bei der Deformation nach B_1 it, unterscheidet sich die Verschiebung um den obenerwähnten Betrag.

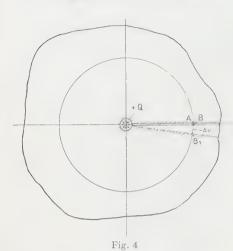
Die Wärmemenge, die pro Zeit- und Längeneinheit der Quelle entströmt, ist

$$Q = a \ 2 \pi \lambda$$
, $(\lambda = \text{Wärmeleitfähigkeit})$

somit kann auch geschrieben werden

$$\Delta u = - \left(1 + \nu \right) \, \frac{\beta}{\lambda} \, Q \, r \, . \label{eq:deltau}$$

Der Differenzvektor der Verschiebung steht dabei senkrecht auf der Vetbindungsgeraden zwischen dem betrachteten Punkt und der Quelle.



Körper mit einer Wärmequelle (ebene Strömung). Spannungsfreie Deformation in der Strömungsebene ist nur möglich in dem bis zur Quelle aufgeschlitzten Körper. Bei der Deformation öffnet sich der Schlitz keilförmig.

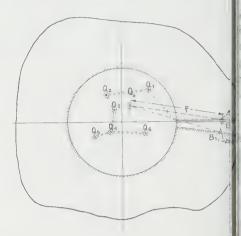


Fig. 5

Körper mit mehreren Wärmequellen. Spannung freie Deformation in der Strömungsebene ist is möglich, wenn die Quellpunkte selbst aus de Körper ausgeschnitten sind, etwa durch die strichelt angedeutete Schlitzführung oder ausonst durch eine alle Quellen umschließende Ketur. Das Klaffen des Schlitzes entspricht jene bei einer im Schwerpunkt der Quellen liegend Ersatzquelle Q_0 .

Sind mehrere Quellen — oder auch Senken — vorhanden, so ergibt sied daraus, daß dann die Differenz der Verschiebung benachbarter Punkte bei beseitig des Schlitzes gleich

$$\Delta u = -(1+\nu) \frac{\beta}{\lambda} Q_0 \varrho$$

beträgt, wobei Q_0 die algebraische Summe aller Quellen Q:

$$Q_0 = \sum_k Q_k$$

und ϱ den Abstand des Schwerpunktes aller Quellen vom betrachteten Punbedeuten. Δu steht wieder senkrecht zur Verbindungsgeraden mit diese

chwerpunkt (Figur 5). Die beiden Begrenzungen des Schlitzes sind nach der Deformation unter dem Winkel $\delta = -(1+v) \beta Q_0/\lambda$ gegeneinander geneigt.

Der Schlitz muß irgendwie so geführt werden, daß sämtliche Quellen Q_K us dem Körper ausgeschnitten werden. Der Quellschwerpunkt Q_0 als nur zum wecke der Berechnung der Unstetigkeit der Deformation gedachter Ersatz ir das Quellsystem darf dagegen auch innerhalb des Körpers liegen.

Da die Ergiebigkeit der Quellen positiv oder negativ sein kann, so kann er Schwerpunkt auch weit außerhalb des Bereiches dieser Quellen liegen. Ieben sich die positiven und negativen Anteile in der Summenbildung für Q_0 n Grenzfall auf, so kann trotzdem das Produkt Q_0 ϱ endlich bleiben, wenn ϱ egen ∞ geht. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn eine Quelle und eine enke gleicher Stärke +Q bzw. -Q vorhanden sind. Q ϱ wird dann gleich em «Moment»

$$m = Q h$$

eses Quell-Senken-Systems, wobei h den Abstand von Quelle und Senkerdeutet. Die Verschiebungsdifferenz wird dann für jeden Punkt des Schlitzes eich groß, nämlich

$$\Delta u = -(1+\nu) \beta \frac{m}{\lambda},$$

id steht senkrecht zur Verbindungsgeraden zwischen Quelle und Senke. ie beiden Begrenzungen des Schlitzes verschieben sich zueinander parallel igur 6).

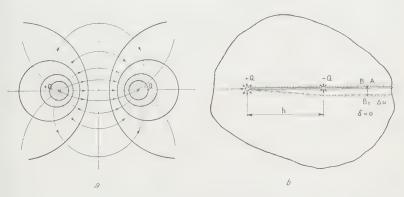


Fig. 6

Körper mit Quelle und Senke gleicher Größe. a Temperaturnetz, b Verlauf des Klaffens des geschlitzten Körpers.

Von spezieller Bedeutung ist der Grenzfall, wo eine Quelle und eine Senke icher Stärke unendlich nahe beieinander sind (Dipol) bei endlich bleibendem ment m.

c) Quell-Senke (Dipol)

Das komplexe Potential einer solchen Strömung (Figur 7) wird durch Grenzübergang auf unendlich kleinen Abstand einer Quelle und einer Senkterhalten und bekanntlich durch den Ausdruck dargestellt:

$$\label{eq:omega_energy} \mathcal{Q} = \frac{m}{2\,\pi\,\lambda} \cdot \frac{1}{z} = \frac{m}{2\,\pi\,\lambda\,r} \cos\varphi - i\,\frac{m}{2\,\pi\,\lambda\,r} \sin\varphi \,.$$

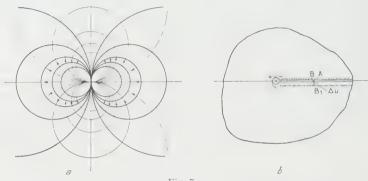


Fig. 7

Körper mit Quell-Senke (Dipol). a Temperaturnetz; b Verlauf des Klaffens des geschlitzten Kipers. Die Schlitzbegrenzungen verschieben sich zueinander parallel.

Die Temperatur ist $\vartheta = [m_r(2\pi\lambda r)]\cos q$. Linien konstanter Temperatur un Stromlinien sind Kreise. Die Achse des Dipols (Verbindungslinie von Quell und Senke) fällt mit der x-Achse zusammen. Nach Gleichung (14) erhält mit nun

$$w=\left(1+v\right)eta\intrac{m}{2\,\pi\,\lambda\,z}\,dz=\left(1+v\right)etarac{m}{2\,\pi\,\lambda}\,\lg z$$

$$=\left(1+v\right)etarac{m}{2\,\pi\,\lambda}\left(\ln r+i\,arphi
ight)\,,$$

das heißt, die Verschiebungskomponenten werden:

$$u_x = (1 + v) \beta m \frac{-\ln r}{2 \pi \lambda}, \quad u_y = (1 + v) \frac{\beta m \varphi}{2 \pi \lambda}.$$

Man erkennt, daß u_x bei einem Umlauf um den Dipol stetig in den Augangswert übergeht, während aber u_y , die Verschiebungskomponente sen recht zur Achse des Dipols, sich um

$$Au_y = (1 + v) \frac{\beta m}{\lambda}$$

ändert und konstant, also unabhängig von der Lage des betrachteten Funktist. Dies ist eine Bestätigung des unter b erhaltenen Resultates.

d) Temperaturfunktion
$$\Omega = k z^n \ (n \neq -1)$$

In Polarkoordinaten r, φ ausgedrückt, wird

$$\Omega = k r^n e^{in\varphi} = k r^n \cos(n \varphi) + i k r^n \sin(n \varphi).$$

Die Temperatur ist $\vartheta=k\;r^n\cos\left(n\;\varphi\right)$ und hat also n Perioden bei einem Jmlauf um den Nullpunkt. Man erhält sofort

$$w = (1 + v) \beta k \frac{z^{n+1}}{n+1} = \frac{(1+v) \beta k}{n+1} r^{n+1} [\cos(n+1) \varphi + i \sin(n+1) \varphi],$$

vobei der schon unter Beispiel c behandelte Fall n=-1 auszuschließen ist. Aan erhält

$$u_x = \frac{(1+v)\beta k}{n+1} r^{n+1} \cos(n+1) \varphi$$
, $u_y = \frac{(1+v)\beta k}{n+1} r^{n+1} \sin(n+1) \varphi$

der, als radiale und tangentiale Komponenten der Verschiebung:

$$u_r = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi = \frac{(1+\nu) \beta k}{n+1} r^{n+1} \cos (n \varphi),$$

$$u_\varphi = -u_x \sin \varphi + u_y \cos \varphi = \frac{(1+\nu) \beta k}{n+1} r^{n+1} \sin (n \varphi).$$

Diese Beziehungen sind für alle positiven oder negativen Werte von n, sußer n-1, gültig. Ein Umlauf um den Nullpunkt führt wieder stetig auf en Ausgangspunkt der Verschiebung zurück. Die in Ebenen senkrecht zur (x,y)-Ebene spannungsfreie Verformung ist also auch bei einem geschlossenen, ie z-Achse umschließenden zylindrischen Körper möglich. Die Spannungen z-Richtungen sind daher $\sigma_z = -E \beta \vartheta$.

Dasselbe ist natürlich auch bei der Temperaturfunktion $\Omega - i k z^n$ zu sagen, obei in den vorstehenden Formeln einfach $\sin(n \varphi)$ durch $\cos(n \varphi)$ und $\cos(n \varphi)$ urch $-\sin(n \varphi)$ zu ersetzen ist.

5. Die Wärmespannungen im zylindrischen Körper mit freien Enden

Bisher wurde eine Verhinderung der Dehnung des Körpers in Achsrichtung -Richtung) vorausgesetzt. Dabei tritt in Ebenen senkrecht zur Achse nach leichung (7) die von der Koordinate zunabhängige Normalspannung

$$\sigma_z = -E \beta \vartheta + \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

if.
Sind nun die Enden dieses zylindrischen Körpers frei, so muß diesem pannungszustand ein solcher überlagert werden, bei dem an den Endflächen e entgegengesetzten Spannungen wirken, wobei der Körper keine Wärme-

deformation erleidet. Es sind damit die Gleichungen (1), (2) und (3) mit θ – und unter den vorgegebenen Randbedingungen zu lösen.

Eine partikuläre Lösung, bei der nur Spannungen in z-Richtung auftrete läßt sich sofort angeben, nämlich

$$u_{x} = \frac{1}{E} \left\{ -v \left[a_{0} x + b_{1} \frac{x^{2}}{2} - b_{1} \frac{y^{2}}{2} + b_{2} x y \right] - b_{1} \frac{z^{2}}{2} \right\},$$

$$u_{y} = \frac{1}{E} \left\{ -v \left[a_{0} y + b_{1} x y + b_{2} \frac{y^{2}}{2} - b_{2} \frac{x^{2}}{2} \right] - b_{2} \frac{z^{2}}{2} \right\},$$

$$u_{z} = \frac{1}{E} \left\{ a_{0} z + b_{1} x z + b_{2} y z \right\};$$

$$(1)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$
, $\sigma_z = a_0 + b_1 x + b_2 y$. (1)

Es handelt sich um eine lineare Spannungsverteilung (Zug \div reine Biegung ein Fall, für den ja die elementare Theorie streng gültig ist. Die Glieder mit in den Ausdrücken für die Verschiebung berücksichtigen dabei auch die wege der Querkontraktion auftretende Deformation der zur (x,y)-Ebene parallel Querschnitte.

Diese Lösung erfüllt im allgemeinen die Bedingung nicht, daß sie die nas Gleichung (7) erhaltenen Wärmespannungen an den Endflächen des Zylinder aufhebt. Doch ist es möglich, die Konstanten a_0 , b_1 und b_2 so zu bestimmet daß sowohl die resultierende Kraft über dem Querschnitt wie auch die Sumreder statischen Momente der Randspannungen bezüglich der x- und y-Achverschwinden.

Die Gesamtspannung ist

$$\sigma_{z_{ges}} = a_0 + b_1 x + b_2 y - E \beta \vartheta + \nu (\sigma_x + \sigma_y), \qquad (1)$$

und die Bedingungen lauten (mit df = Flächenelement des Querschnittes):

Wird das Koordinatensystem so gelegt, daß die z-Achse mit der (durch den chwerpunkt des Querschnittes gehenden) Achse des Zylinders zusammenfällt id daß die x- und y-Achse in die Richtung der Hauptträgheitsachsen des uerschnittes fallen, so gilt für die Integrale in den vorstehenden Gleichungen:

$$\int df = F = \text{gesamte Querschnittsfläche},$$

$$\int x \, df = y \, df = 0,$$

$$\int x^2 \, df = J_2 = \text{Trägheitsmoment des Querschnittes für die } y\text{-Achse},$$

$$\int y^2 \, df = J_1 = \text{Trägheitsmoment des Querschnittes für die } x\text{-Achse},$$

$$\int x \, y \, df = 0.$$

$$(J_1 \text{ und } J_2 \text{ sind Hauptträgheitsmomente})$$

an erhält somit:

$$a_{0} = E \beta \frac{1}{F} \int \vartheta df - \nu \frac{1}{F} \int (\sigma_{x} + \sigma_{y}) df,$$

$$b_{1} = E \beta \frac{1}{J_{2}} \int \vartheta x df - \nu \frac{1}{J_{2}} \int (\sigma_{x} + \sigma_{y}) x df,$$

$$b_{2} = E \beta \frac{1}{J_{1}} \int \vartheta y df - \nu \frac{1}{J_{1}} \int (\sigma_{x} + \sigma_{y}) y df.$$

$$(19)$$

Mit der Wahl dieser Werte für die Konstanten a_0 , b_1 und b_2 ergeben die salen Spannungen σ_z nach Gleichung (18) weder eine resultierende Kraft ih ein Moment. Die Randspannungen σ_z sind aber im allgemeinen nicht in dem Punkte des Querschnittes Null, sondern bilden nur unter sich ein Gleichwichtssystem. Eine völlige Kompensation würde also noch das Anbringen isprechender Gegenspannungen erfordern. Da diese aber unter sich auch Gleichgewicht wären, könnte ihr Einfluß sich gemäß dem Prinzip von der Int-Venant nur auf die unmittelbare Umgebung der Zylinderenden erstrekti. In weiterer Entfernung von den Enden wird dagegen die angegebene Lög (18) ihre Gültigkeit bewahren. Falls erforderlich, können die Randeinflüsse speziellen Fall noch besonders berücksichtigt werden.

Die Deformation der Zylinderachse (x = y = 0) wird

$$u_{x_0} = -\frac{b_1 z^2}{2E}, \quad u_{y_0} = -\frac{b_2 z^2}{2E}, \quad u_{z_0} = \frac{a_0 z}{E},$$
 (20)

heißt, der Zylinder erfährt eine Längsdehnung

$$\varepsilon_z = \frac{a_0}{E} = \beta \frac{1}{F} \int_F \vartheta \, dt - \frac{\nu}{EF} \int_F (\sigma_x + \sigma_y) \, dt \tag{21}$$

und eine Krümmung in der (x, y)-Ebene bzw. in der (y, z)-Ebene mit c Krümmungsradien ϱ_2 bzw. ϱ_1 , wobei

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{b_1}{E} = \beta \frac{1}{J_1} \int_F \vartheta y \, df - \frac{\nu}{J_1 E} \int_F (\sigma_x + \sigma_y) y \, df ,$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{b_2}{E} = \beta \frac{1}{J_2} \int_F \vartheta x \, df - \frac{\nu}{J_2 E} \int_F (\sigma_x + \sigma_y) x \, df .$$

Bei der Berechnung dieser Ausdrücke sind in der üblichen Weise die Dehnung gegen die Einheit vernachlässigt.

6. Der lineare Temperaturverlauf bei allseitig unbehinderter Dehnus

Der im ersten Beispiel behandelte lineare Temperaturverlauf $\vartheta=k$ x erg bei behinderter Dehnung in der z-Richtung die Spannungen

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$
, $\sigma_z = -E \beta \vartheta = -E \beta k x$.

Man erhält nun aber sofort einen Deformationszustand, bei dem auch Spannung σ_z verschwindet, wenn man in Gleichung (18):

$$a_0 = 0$$
, $b_1 = E \beta k$, $b_2 = 0$

setzt. Allgemein kann also gesagt werden:

Bei einem linearen Temperaturverlauf (also bei gleichmäßigem paralle Wärmestrom) treten in einem Körper keine Spannungen auf, falls er an Oberfläche nicht an seiner freien Deformation gehindert wird.

Zu der beim ersten Beispiel erhaltenen Verschiebung sind jene nach Gleichungen (16) mit den obenstehenden Werten von a_0 , b_1 und b_2 hinzuzufüg Man erhält so:

$$u_x = \beta k \frac{1}{2} (x^2 - y^2 - z^2)$$
, $u_y = \beta k x y$, $u_z = \beta k x z$,

das heißt, eine Ebene senkrecht zur x-Achse (x = const bzw. $\vartheta = \text{const}$) w zu einer Kugelfläche gekrümmt¹) mit dem Krümmungsradius ϱ , wobei

$$\frac{1}{\rho} = \beta \, k \, ,$$

k ist dabei das Temperaturgefälle.

¹) Diese wie auch die zuvor festgelegten allgemeinen Aussagen sind natürlich nur inner der von der Elastizitätstheorie gemachten Voraussetzungen kleiner Deformation gültig, also beispielsweise nur unter der Voraussetzung, daß die Dimensionen des betrachteten Körper: Vergleich zum Krümmungsradius ϱ klein seien, was praktisch stets der Fall ist.

7. Berechnung der Unstetigkeit der

eformation eines Hohlquerschnittes aus der Temperaturverteilung

Wird der Hohlquerschnitt (Figur 8) längs der A-Achse aufgeschnitten, so ist, e oben gezeigt wurde, die Deformation bei stationärem, im ganzen Quermitt quellenfreiem Temperaturfeld in v- und y-Richtung spannungsfrei, bei nur wegen Verhinderung der Dehnung in Achsrichtung eine Spannung auftritt. Die Deformation einer aus dem Querschnitt herausgeschnittenen iteriellen Linie Draht, in Figur 8 gestrichelt angedeutet) erfolgt also in der

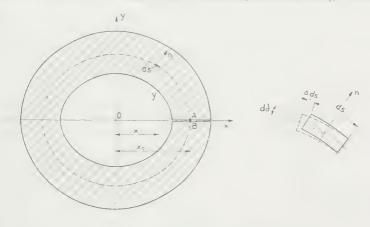


Fig. 8
Allgemeine Bestimmung der Deformation eines aufgeschlitzten Hohlzylinders.

)-Ebene so, wie wenn das übrige Material nicht vorhanden wäre. Die Unigkeit der Deformation kann daher als die gegenseitige Verschiebung des angspunktes A und des Endpunktes B des so herausgeschnittenen, das Loch Querschnitt vollständig umschließenden Drahtes ermittelt werden.

Ein Element des Drahtes von der Länge ds (in Figur 8a vergrößert darget) erfährt eine Verlängerung

$$\Delta ds = (1 + \nu) \beta \vartheta ds.$$

Faktor $(1+\nu)$ erscheint dabei wegen Verhinderung der Dehnung in chtung. Außerdem krümmt sich das Element, wenn die Temperatur quer Draht ein Gefälle $\partial \vartheta_i \partial n$ aufweist, derart, daß der Endpunkt des Elementes bei festgehaltenem Anfangspunkt um den Betrag $d\delta = \beta (\partial \vartheta_i \partial n) ds$ vert. Die gesamte Neigung und Verschiebung des Drahtendes B kann nun so ttelt werden, daß man das Integral über die infolge der Dehnung und keländerung der einzelnen Elemente auftretende Neigung und Verschie-

bung des Drahtendes ermittelt. Man erhält so:

$$\delta = (1 + \nu) \beta \oint \frac{\partial \theta}{\partial n} ds,$$

$$\Delta u_x = (1 + \nu) \beta \oint \vartheta dx + (1 + \nu) \beta \oint y \frac{\partial \vartheta}{\partial n} ds,$$

$$\Delta u_y = (1 + \nu) \beta \oint \vartheta dy - (1 + \nu) \beta \oint (x - x_0) \frac{\partial \vartheta}{\partial n} ds.$$

Die Integrale sind über den ganzen Umlauf von A bis B zu erstrecken.

Wird in diesen Beziehungen noch die durch das Drahtelement ds durc tretende Wärmemenge, pro Zeiteinheit und pro Längeneinheit der z-Richtur $dq = \lambda(\partial\vartheta,\partial n) ds$ eingeführt und die gesamte durch den Draht von ihm nach außen durchtretende Wärmemenge mit Q bezeichnet, so ergibt sich

$$\delta = -(1+\nu) \beta \frac{Q}{\lambda},$$

$$\Delta u_x = (1+\nu) \beta \oint \vartheta dx - (1+\nu) \frac{\beta}{\lambda} \oint y dq,$$

$$\Delta u_y = (1+\nu) \beta \oint \vartheta dy + (1+\nu) \frac{\beta}{\lambda} \oint x dq - x_0 (1+\nu) \beta \frac{Q}{\lambda}.$$

Für einen den Hohlraum nicht umschließenden Draht werden natürlich die drei Werte zu Null.

8. Berechnung der Wärmespannungen bei Hohlquerschnitten

Die in den Hohlzylindern in zur Achse parallelen Schnitten auftretend Zwangsspannungen können nun so berechnet werden, daß im aufgeschlitzt Körper an der Trennstelle Kräfte und Momente angebracht werden, weld die Neigung δ und die Verschiebungsdifferenz Δu_x und Δu_y nach den Glechungen (26) rückgängig machen.

Für das Rohr mit Kreisquerschnitt läßt sich diese Aufgabe genau löst Die auftretenden Spannungen sind auf andere Weise schon direkt unter Et führung von Ansätzen mit stetiger Deformation gelöst worden. Bei einer üben Rohrumfang ungleichmäßigen Temperaturverteilung wird die Temperatur am besten unter Einführung von Polarkoordinaten durch die Reihe

$$\vartheta = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} \right)^n + a_{-n} \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} \right)^{-n} \right] \cos (n \varphi)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} \right)^n + b_{-n} \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} \right)^{-n} \right] \sin (n \varphi) + c_0 \ln \frac{\gamma}{\gamma_1}$$

dargestellt. Wie aus den behandelten Beispielen b, c und d zu ersehen geben dabei nur die Glieder a_{-1} (r_1/r) cos q, b_{-1} (r_1/r) sin q und c_0 ln r_1r_1 An.

um Auftreten von Spannungen σ_x , σ_y , τ_{xy} bzw. in Polarkoordinaten σ_r , σ_y , σ_y . Die Unstetigkeit der Deformation beim aufgeschlitzten Rohr würde hier:

$$\begin{split} \delta &= (1+\nu) \; \beta \; c_0 \; 2 \; \pi \; , \\ \Delta u_x &= - \; (1+\nu) \; \beta \; b_{-1} \; 2 \; \pi \; r_1 \; , \\ \Delta u_y &= \; (1+\nu) \; \beta \; a_{-1} \; 2 \; \pi \; r_1 + \; (1+\nu) \; \beta \; c_0 \; 2 \; \pi \; x_0 \; . \end{split}$$

Beim geschlossenen Rohr mit Innenradius r_1 und Außenradius r_2 treten agegen die folgenden Spannungen auf:

$$\frac{E \beta}{2 (1-\nu)} \left\{ c_0 \left[\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} - \ln \frac{r}{r_1} \right] + \left[a_{-1} \cos \varphi + b_{-1} \sin \varphi \right] \left[\frac{r_1^3 r_2^2}{(r_2^2 + r_1^2) r^3} + \frac{r_1 r}{r_2^2 + r_1^2} - \frac{r_1}{r} \right] \right\},
= \frac{E \beta}{2 (1-\nu)} \left\{ c_0 \left[\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} - \ln \frac{r}{r_1} - 1 \right] + \left[a_{-1} \cos \varphi + b_{-1} \sin \varphi \right] \left[-\frac{r_1^3 r_2^2}{(r_2^2 + r_1^2) r^3} + \frac{3 r_1 r}{r_2^2 + r_1^2} - \frac{r_1}{r} \right] \right\},
= \frac{E \beta}{2 (1-\nu)} \left[a_{-1} \sin \varphi - b_{-1} \cos \varphi \right] \left[\frac{r_1^3 r_2^2}{(r_2^2 + r_1^2) r^3} + \frac{r_1 r}{r_2^2 + r_1^2} - \frac{r_1}{r} \right]. \tag{28}$$

Die innere und äußere Rohroberfläche ist hierbei als spannungsfrei voraussetzt ($\sigma_r = \tau_{r\sigma} = 0$ für $r = r_1$ und $r = r_2$).

Die dem ersten Glied, mit dem Koeffizienten c_0 , entsprechenden Wärmerannungen gemäß den Gleichungen (28) beziehen sich auf die zentrischemmetrische Temperaturverteilung und sind schon im Jahre 1907 von Lowz¹) angegeben worden. Die Spannungen in ungleichmäßig erwärmten Rohm wurden von Schau im Jahre 1932 behandelt²). Er fand hierbei, daß die imperaturglieder mit $r^a \cos n \, q$ keine Spannungen in Richtung senkrecht ir Rohrachse hervorrufen, beachtete aber den Ausnahmefall n=-1 nicht. Die in den Gleichungen (28) diesem Fall entsprechenden Spannungen mit den beffizienten a_{-1} bzw. b_{-1} wurden von Schau nach einer auf Anregung von sofessor Stodola. Perfolgten Nachprüfung seiner ursprünglichen Rechnung in Jahre 1935 angegeben⁴).

i Die Lösungsmethode, bei der vom aufgeschlitzten Zylinder ausgegangen d, gestattet aber, die Wärmespannungen in Rohren von beliebigem Quer-Initt zu berechnen. Es besteht dabei die Aufgabe, Spannungen und Defor-

¹⁾ R. LORENZ, Temperaturspannungen in Hohlzylindern, Z. VDI. 51, 743 (1907).

²) F. Schau, Das Temperaturfeld und die Temperaturspannung im Siederohr, Z. Dampfkesselers.- u. -Vers.-Ges. Wien 57, Nr. 8 bis 11 (1932).

⁻³¹ A. Stodola, Zur Theorie der Wärmespannungen in dem Umfang nach ungleichmäßig erumten Rohren, Schweiz. Bauztg. 104, 229 (1934).

⁴⁾ F. Schau, Z. Dampfkesselunters.- u. -Vers.-Ges. Wien 60, 8 (1935) (Zuschrift).

mationen infolge einer an der Schnittstelle angebrachten Zugkraft, eine Schubkraft und eines Momentes zu bestimmen. In besonderen Fällen dürftes möglich sein, diese Aufgabe genau nach der strengen Elastizitätstheorie zu lösen, andernfalls wird dies mit einer Näherungstheorie möglich sein, wob

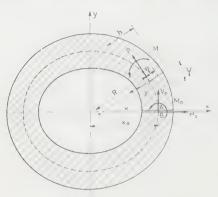


Fig. 9 Kräfte und Momente in den Längsschnitten eines Hohlzylinders.

etwa die Rohrwand als gekrümmte Stab behandelt wird, mit der Annahme daß die Normalen zur Mittelfläche de Rohrwand auch nach der Deformatio gerade bleiben und senkrecht zur defomierten Mittelfläche stehen.

Gemäß dieser Theorie¹) ist die Spanung über die Normale zur Ward folgendermaßen verteilt:

$$\sigma = \frac{1}{F} \left(P + \frac{M}{R} \right) + \frac{M}{Z} \cdot \frac{\eta}{1 + \eta/R} , \quad (2)$$

wobei P die Zugkraft im Querschnit und M das Biegemoment (positiv in Sinne einer Verstärkung der Krümung) bedeuten. R ist der Krümmungradius der undeformierten Wand, η ist der Abstand des betrachteten Punkt

von der Wandmitte, positiv gerechnet nach außen. Die Querschnittsfläche ist bei Bezug auf die Längeneinheit des Rohres gleich der Wandstärke h, und ist eine Größe, die nur sehr wenig vom Trägheitsmoment $\vartheta - h^3$,12 des Queschnittes verschieden ist. Sie ist definiert als

$$Z = \int\limits_{\eta = -h/2}^{+h/2} \! \frac{\eta^{\,2} \, d\eta}{1 + \, \eta/R} = R^{\,3} \left[\ln \, \frac{1 + (h/2 \, R)}{1 - (h/2 \, R)} - \frac{h}{R} \right] \approx \frac{h^{\,3}}{12} \, .$$

Zur Berechnung der Deformation wird am einfachsten von der Deformationarbeit A ausgegangen. Für den ganzen Umlauf von A bis B (Figur 9) ist

$$A = (1 - v^2) \left\{ \oint_{AB} \frac{(P + M/R)^2}{2FE} ds + \oint_{AB} \frac{M^2}{2ZE} ds \right\}.$$
 (3)

Der Faktor $(1-v^2)$ erscheint hier, im Unterschied zum gebogenen Stæwegen der Verhinderung der Querkontraktion. Der Einfluß der Schubsparnungen auf die Deformation ist vernachlässigt.

Wirken am Ende B des aufgeschlitzt gedachten Rohrquerschnittes (lie $x=x_0$) die Kräfte H_0 und V_0 sowie das Moment M_0 , so gilt für die Beanspre

¹) Beispielsweise gemäß der Darstellung von M. TEN Bosch, Berechnung der Maschinens mente (Springer, Berlin 1951), S. 35ff.

hung an einem beliebigen Ort (x, y) der Wand (Figur 9)

$$P = V_{0} \cos \psi - H_{0} \sin \psi ,$$

$$M = M_{0} + H_{0} y + V_{0} (x_{0} - x) ,$$

$$P + \frac{M}{R} = V_{0} \left[\cos \psi + \frac{x_{0} - x}{R} \right] + H_{0} \left[-\sin \psi + \frac{y}{R} \right] + \frac{M_{0}}{R} .$$
(31)

Die Verdrehung δ^* des Endquerschnittes B bzw. die Verschiebung Au_i^* , u_i^* werden nun als die partiellen Ableitungen der Deformationsarbeit nach em Moment M_0 bzw. nach den Kräften H_0 und V_0 erhalten. Es ergibt sich:

$$\delta^* = \frac{\partial A}{\partial M_0} = \frac{1 - v^2}{E} \left\{ \oint \frac{P + M/R}{FR} ds + \oint \frac{M}{Z} ds \right\},$$

$$u_x^* = \frac{\partial A}{\partial H_0} = \frac{1 - v^2}{E} \left\{ \oint \frac{P + M/R}{F} \left(-\sin \psi + \frac{y}{R} \right) ds + \oint \frac{M}{Z} y ds \right\},$$

$$u_y^* = \frac{\partial A}{\partial V_0}$$

$$= \frac{1 - v^2}{E} \left\{ \oint \frac{P + M/R}{F} \left(\cos \psi + \frac{x_0 - x}{R} \right) ds + \oint \frac{M}{Z} (x_0 - x) ds \right\},$$
(32)

obei P und M aus den Beziehungen (31) einzusetzen sind. Die Größen M_0 , und H_0 müssen nun so bestimmt werden, daß die Deformationsgrößen δ^* , u_i^* die durch die Temperaturdehmung erhaltene Unstetigkeit an der Schnittelle, nämlich δ , Au_i , und Au_{ij} nach den Gleichungen (26) wieder aufheben, ie drei Beziehungen

$$\delta + \delta^* = 0$$
, $\Delta u_x + \Delta u_x^* = 0$, $\Delta u_y + \Delta u_y^* = 0$ (33)

möglichen somit die Bestimmung der in den Gleichungen (32) noch enthalnen drei Unbekannten M_0 , H_0 , V_0 . Diese können als Konstante bei der tegration vorausgenommen werden, so daß Integrale zu bilden sind, die r von der geometrischen Form des Rohrquerschnittes abhängig sind.

Symmetrischer Querschnitt und Temperaturverlauf

Besonders einfach werden die Beziehungen, wenn der Rohrquerschnitt d der Temperaturverlauf eine doppelte Symmetrie, zum Beispiel bezüglich r x-Achse und der y-Achse, besitzen. Dann werden die Umlaufintegrale in Gleichungen (26) zu Null, und es ergibt sich

$$\delta = -(1+\nu) \beta \frac{Q}{\lambda}, \quad \Delta u_x = 0, \quad \Delta u_y = -x_0 (1+\nu) \beta \frac{Q}{\lambda}.$$

Die Unstetigkeit der Deformation bei x_0 ist also nur noch von der gesamte durchtretenden Wärmemenge Q abhängig, während die Verteilung diese Wärme auf den Rohrumfang außer der Symmetriebedingung keiner Einschrätkung unterliegt. Ferner wird

$$H_0 = V_0 = 0$$
 and $\delta^* = M_0^{-1} \frac{1-\nu^2}{E} \oint \frac{1+Z/(FR^2)}{Z} ds$.

Die erste der Gleichungen (33) liefert somit, nach M_0 aufgelöst:

$$M_0 = \frac{E \, \beta \, Q}{(1-\nu) \, \lambda \oint \frac{1+Z/(FR^2)}{Z} \, ds} \, \cdot \label{eq:m0}$$

Wird hier F = h und näherungsweise $Z = h^3/12$ gesetzt, so ergibt sich

$$M_0 = \frac{E \beta Q}{(1-r) \lambda \int_0^1 \frac{12}{h^3} \left(1 - \frac{h^2}{12 R^2}\right) ds},$$

wobei die Wandstärke h und der Krümmungsradius R noch mit dem durc laufenen Bogen s veränderlich sein können.

Das Biegemoment wird über den ganzen Umfang konstant $M=M_{\rm 0}$, ur die Spannung wird nach Gleichung (29)

$$\sigma = \ \frac{12\,M_{\rm 0}}{h^3}\,\Big\{\!\frac{h^2}{12\,R} + \frac{\eta}{1+\,\eta/R}\!\Big\}.$$

Interessant ist, daß bei diesem zweifach symmetrischen Problem die Spanungen nur von der gesamten durchströmenden Wärmemenge abhänger nicht aber von der örtlichen Verteilung dieser Wärmemenge. Dasselbe ist übrgens auch bei mehrfach symmetrischer Temperaturverteilung der Fall, be spielsweise bei einem Rohrquerschnitt nach Art eines regulären Polygom wobei der Wärmedurchtritt bei jeder Polygonseite gleich verteilt ist.

Summary

The paper deals with the thermal stresses and deformation in an elastic body with a steady, two-dimensional heat flow. General relations between temperature distribution and deformation, using functions of the complex variable x+i are established. The analysis leads to a particular solution, for which in section perpendicular to the plane of flow (x, y) stresses do not occur for a steady her flow without sources or sinks, in a simply connected region. Different examples of temperature distribution with corresponding deformation are presented Finally the thermal stresses occurring in a hollow cylindrical body with arbitration cross section are treated in a general way and special reference is made to stresses in circular tubes.

(Eingegangen: 20. 8. 1951.)

On the Theory of Filtration of Signals

By Lotfi A. Zadeh, New York¹)

Introduction

It is often taken granted that given an ensemble of signals $\{u_1(t) + u_2(t)\}$ here $\{u_1(t)\}$ and $\{u_2(t)\}$ represent the message and noise ensembles respectively, e cannot achieve a perfect separation of the messages from noise unless the o ensembles occupy non overlapping bands in the frequency spectrum. This true, of course, as long as the filter employed for the separation of messages om noise is restricted to a fixed linear network. It is not true, however, when e is permitted to use linear variable filters. In this note we shall give a brief tline of a theory of linear variable filters²) and deduce the conditions under nich two (or more) signal ensembles can be separated from each other by e use of such filters.

It will be noted that many of the mathematical relations used in the sequel e commonly employed in wave mechanics, though in a different form and different purposes. The differences stem from the special character of filters d the nature of the problems involved in the filtration of signals.

Representation of Signals

GABOR³) has studied certain aspects of the problem of representation of nals in terms of so-called "elementary signals" and has pointed out the vantages of some particular types of representation. For our purposes, it I be convenient to use a general form of integral representation

$$u(t) = \int\limits_C k(t; \lambda) U(\lambda) d\lambda \tag{1}$$

ere u(t) is a signal defined over the interval $-\infty < t < \infty$; λ is a complex iable; $k(t; \lambda)$ is a suitable set of functions of t [representing the component rals in terms of which u(t) is resolved]; $U(\lambda)$ is the spectral function of u(t)itive to $k(t; \lambda)$; and C is an appropriate contour in the λ -plane (generally a right line parallel to either the imaginary or real axis).

Columbia University.
 A more complete discussion of certain aspects of the theory will appear in a forthcoming er in the "Journal of the Franklin Institute".

³⁾ D. GABOR, J. Inst. electr. Engrs. 93, pt. III, 429 (1946).

It is assumed that the kernel $k(t; \lambda)$ possesses an inverse $k^{-1}(\lambda; t)$ such that

$$\int_{C} k(t;\lambda) k^{-1}(\lambda;t') d\lambda = \delta(t-t')$$
 (2)

where $\delta(t-t')$ is the Dirac delta-function. In terms of $k^{-1}(\lambda;t)$ the spectra function $U(\lambda)$ may formally be written

$$U(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} k^{-1}(\lambda; t) u(t) dt.$$
 (5)

It will be observed that the case where the $k(t;\lambda)$ form a discrete set can be regarded as a special case of (1) wherein the spectral function $U(\lambda)$ consist of a train of delta-functions. The use of delta-functions may be avoided by writing (1) in the Stieltjes integral form.

A few basic types of the $k(t; \lambda)$ functions and their respective inverses at collected below. Other types may be derived from these by changes of variables, and by non-singular linear transformations of $k(t; \lambda)$. The various well known types of orthogonal sets of functions are omitted for brevity.

- (1) $k(t; \lambda) = \delta(t \lambda);$ $k^{-1}(\lambda; t) = \delta(t \lambda);$ C = real axis.
- (2) $k(t;\lambda) = 1(t-\lambda)$ (unit step function); $k^{-1}(\lambda;t) = \delta^{(1)}(\lambda-t)$ (unit doublet function); C = real axis.
- (3) $k(t; \lambda) = 1(t) \frac{e^{\lambda t}}{2 \pi j}$; $k^{-1}(\lambda; t) = e^{-\lambda t}$; C = Bromwich-Wagner contouru(t) and $U(\lambda)$ constitute a pair of Laplace transforms.
- (4) $k(t; \lambda) = 1(t) \frac{t^{-\lambda}}{2\pi j}$; $k^{-1}(\lambda; t) = t^{\lambda 1}$; C = Bromwich-Wagner contour. u(t) and $U(\lambda)$ constitute a pair of Mellin transforms.
- (5) $k(t;\lambda) = 1(t-\lambda) 1(t-\lambda-1)$ (unit pulse); $k^{-1}(\lambda;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(1)}(\lambda-t-n)$ (train of unit doublets); C = real axis
- (6) $k(t; \lambda) = 1(t) \sqrt{\lambda t} J_n(\lambda t);$ $k^{-1}(\lambda; t) = 1(\lambda) \sqrt{\lambda t} J_n(\lambda t);$ C = real axis. u(t) and $U(\lambda)$ constitute a pair of Hankel transforms of order n.

Linear Variable Filters

Let N represent a linear variable filter and let u(t) and v(t) be, respectively, he input and output of N. It will be assumed throughout that N is at rest, it not necessarily fixed, prior to the application of the input.

Let $K(t; \lambda)$ be the response of N to $k(t; \lambda)$ —both regarded as functions of me involving λ as a parameter. The function $K(t; \lambda)$ will be called a *character-tic function* of N, since it provides a complete characterization of the relation etween the input and output of N. For the purposes of our analysis, we shall gard $K(t; \lambda)$ as a primary characteristic of N, rather than as a derived nantity to be obtained, say, from the solution of the equations governing the chavior of the system.

The response of N to a specified input u(t) can readily be expressed in terms $K(t; \lambda)$ and the spectral function $U(\lambda)$ relative to $k(t; \lambda)$. Thus, by resolving t in terms of $k(t; \lambda)$ [equation (1)] and employing the definition of $K(t; \lambda)$, e expression for the output of N is formally found to be

$$v(t) = \int_{\dot{C}} K(t; \lambda) U(\lambda) d\lambda.$$
 (4)

hen no ambiguity results, this relation will be written more simply in the ual symbolic form

$$v = K u. (5)$$

Equations (1) and (4) can be interpreted in the usual manner in terms of action space concepts. Briefly, let the signal space constituted by the class signals under consideration be a linear vector space Σ . (A Hilbert space, saibly of a nonseparable type, is adequate for most practical purposes. It build be remarked that some of the statements made in the sequel apply, lictly speaking, only to Hilbert space.) A signal u(t) is represented as a vector Σ . The $k(t; \lambda)$ constitute a basis for Σ (or for a space in which Σ is imbedded). Sinear operation on Σ transforms the basis $k(t; \lambda)$ into $K(t; \lambda)$, leaving rariant the coordinates of u(t), i. e. $U(\lambda)$, with respect to $k(t; \lambda)$.

When $k(t; \lambda) = \delta(t - \lambda)$, the characteristic function becomes the impulsive ponse (Green's function) of N, and is denoted by $W(t; \lambda)$. For this case $\lambda = u(\lambda)$ and (4) reduces to the familiar relation

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t; \xi) \ u(\xi) \ d\xi. \tag{(a)}$$

It will be noted that the impulsive response of a physical system vanishes $t < \lambda$. Conversely, the vanishing of $W(t; \lambda)$ for $t < \lambda$ is the only condition art from the obvious requirement that $W(t; \lambda)$ be a real function of its

arguments, for physical realizability of a filter, provided no restrictions a imposed on the form or the structure of the filter.

For $k(t; \lambda) = e^{\lambda t}/2 \pi j$, it is convenient to write the corresponding characteristic function in the form

$$K(t; \lambda) = H(\lambda; t) k(t; \lambda)$$
$$= H(\lambda; t) \frac{e^{\lambda t}}{2 \pi j}$$

where $H(\lambda; t)$ represents the so-called system function¹) of N. The spect: function $U(\lambda)$ is the Laplace transform of u(t) and (4) becomes

$$v(t) = \frac{1}{2 \pi j} \int_{C} H(\lambda; t) U(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda$$

where C is the Bromwich-Wagner contour. [For simplicity, it is tacitly assum here that u(t) vanishes for negative t.] Equation (8) can be written more copactly in an operational form

$$v(t) = H(p; t) u(t)$$

where H(p;t) plays the role of a time-dependent Heaviside operator²). operating on u(t), H(p;t) should be treated as if it were an ordinary Heavist operator involving t as a parameter.

It is useful to have an expression for the impulsive response $W(t;\xi)$ in term of $K(t;\lambda)$ and vice versa. These expressions can readily be obtained by apply: equation (6) to $u(t) = k(t;\lambda)$. We find

$$K(t; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t; \xi) \ k(\xi; \lambda) \ d\xi$$

and by inversion of this relation,

$$W(t;\xi) = \int_{C} K(t;\lambda) k^{-1}(\lambda;\xi) d\lambda.$$

The above relations apply to any linear filter. We now define an *ideal* fill as a system N which passes without distortion (or delay) all components signals $k(t; \lambda)$ in which λ belongs to a set A (acceptance band) on C, and reject those component signals in which λ (on C) does not belong to A (reject band). In terms of $K(t; \lambda)$ this implies

$$K(t; \lambda) = \left\{ egin{array}{ll} k(t; \lambda), & ext{for} & \lambda ext{ in } A \\ 0, & ext{for} & \lambda ext{ not in } A \end{array}
ight\}.$$

¹) L. A. ZADEH, J. appl. Phys. 21, 1171 (1950).

²) L. A. ZADEH, J. Math. Phys. 30, 73 (1951).

The two sets of functions $\{k(t;\lambda), \lambda \text{ in } A\}$ and $\{k(t;\lambda), \lambda \text{ not in } A\}$ span o complementary manifolds M_1 and M_R , respectively, in the signal space Σ , insequently, the operation performed by an ideal filter is equivalent, in action space terms, to the projection of Σ on the manifold M_1 (the acceptance unifold) along the manifold M_R (the rejection manifold).

The fact that projection is an idempotent operation suggests the following ernative definition of an ideal filter: A filter N is called ideal if it is idempotent, it is, if it is equivalent to a tandem combination of two filters each of which is natical with N. In some respects, this definition is more basic and also more deral than that given previously; however, it applies only to linear filters. The impulsive response of an ideal filter is readily obtained by substituting the into (11). We find

$$W(t;\xi) = \int_{t} k(t;\lambda) \ k^{-1}(\lambda;\xi) \ d\lambda \tag{13}$$

ere the integral is taken over the set A.

An ideal filter is not, in general, a physically realizable system inasmuch as expression for $W(t;\xi)$ given above does not, in general, vanish for $t<\xi$, wever, as long as $W(t;\xi)$ satisfies a rather weak condition, $W(t;\xi) \to 0$ as $\xi \to -\infty$, one can approximately realize $W(t-\beta;\xi)$, where β is a sufficilty large constant, with as small an error as desired. In physical terms, this ans that, if $W(t;\xi) \to 0$ as $t-\xi \to -\infty$, one can construct a physical filter ch would approximate specified ideal filter to within a constant timetry β .

It should not be overlooked that in order to be realizable $W(t; \xi)$ must be all function of its arguments. This condition is satisfied by (13) because acceptance band A is supposed to be chosen in such a manner as to corred to real signals.

We shall illustrate the relations given above by two simple examples. First $\gamma(t; \lambda) = \delta(t - \lambda)$ and suppose that the set A consists of the interval $0 \le \lambda \le T$, liation (13) gives

$$W(t;\xi) = \int_{0}^{T} \delta(t-\lambda) \, \delta(\lambda-\xi) \, d\lambda \tag{14}$$

ch reduces to

$$W(t;\xi) = \delta(t-\xi)$$
 for $0 \le \xi \le T$ (15)
 $W(t;\xi) = 0$, for all other ξ .

sically, this represents a switch which is closed during the time interval $t \leq T$ and is open for t < 0 and t > T.

A less trivial example is the following. Let

$$k(t;\lambda) = \frac{e^{j\omega t}}{2\pi j(1+\alpha\cos t)}, \qquad (\lambda=j\omega, |\alpha| < 1)$$

which has

$$k^{-1}(\lambda;t) = (1 + \alpha \cos t) e^{-j\omega t} \tag{}$$

for the inverse. Suppose that the filter is required to accept only those comnent signals in which $|\phi| \leq |\phi_0|$. This condition, in conjunction with (13), (13), and (17), leads to the following expression for $W(t-\beta;\xi)$

$$W(t-\beta;\xi) = (1+\alpha\cos\xi) \frac{\sin\omega_0(t-\beta-\xi)}{\pi(t-\beta-\xi)} \cdot \frac{1}{1-\alpha\cos(t-\beta)}.$$

Physically, this represents a tandem connection of three filters N_1 , N_2 , \sharp N_3 each corresponding to a factor in (18). N_1 consists of an amplitude modulat whose system function is

$$H_1(t) = 1 + \alpha \cos t;$$

 N_2 represents a conventional low-pass filter such that

$$H_2(j\;\omega) = \left\{ \begin{array}{ccc} e^{-j\;\omega\;\beta}, & \text{for} & \left|\;\omega\;\right| \leq \omega_0 \\ \\ 0, & \text{for} & \left|\;\omega\;\right| > \omega_0 \end{array} \right\};$$

and N_3 is an amplitude modulator with the system function

$$H_3(t) = \begin{array}{cc} & 1 \\ 1 & \cos\left(t - \beta\right) \end{array}.$$

This particular type of filter is a special case of a much more general ty but a discussion of this and other types of ideal filters is outside the limscope of the present note.

Consider now two ensembles of signals $\{u_1(t)\}$ and $\{u_2(t)\}$ of which $\{u_1(t)\}$ say, represents the messages and $\{u_2(t)\}$ represents the noise, and suppose to one is given the sum $\{u_1(t)+u_2(t)\}$. It is of interest to inquire about conditions which must be satisfied in order to make possible the extraction the message ensemble (possibly with a time-delay) by means of a linear fillition of the sum of messages and noise. To put it another way, we are interest in the conditions under which there exists a physically realizable linear operator K such that the relation

$$K[u_1(t) + u_2(t)] = u_1(t - \beta)$$

holds for sufficiently large β with any desired accuracy.

We shall confine ourselves here to a brief and heuristic discussion of this estion. A more complete analysis of the problem and its practical implicans will be given in a subsequent paper¹).

Leaving aside for the moment the question of physical realizability, we set = 0 in equation (22) and examine the resulting relation

$$K[u_1(t) + u_2(t)] = u_1(t)$$
(23)

the light of the well-known properties of linear vector spaces.

Let M_1 and M_2 be the manifolds spanned in Σ by $\{u_1(t)\}$ and $\{u_2(t)\}$, bectively. In order that (23) hold it is necessary and sufficient that M_1 , M_2 be disjoint, i.e. have no element in common except the origin, in which E(t) is simply the projection of E(t) on E(t) along E(t). Since the operation of jection is equivalent to filtration with an ideal filter, we conclude that the stage and noise ensembles can be separated from each other by means of an all filter if and only if the manifolds spanned by these ensembles are disjoint. In order to obtain an explicit characterization of the ideal filter in question, sexpedient to chose a basis E(t) in E(t) which is adapted (in the function ce sense) to E(t) and E(t) and E(t) corresponding to E(t) and E(t), respectively, time the following form:

$$\begin{aligned}
&\left\{U_1(\lambda)\right\} = 0, & \text{for } \lambda \text{ in } A \text{ (on } C), \\
&\left\{U_2(\lambda)\right\} = 0, & \text{for } \lambda \text{ not in } A \text{ (on } C).
\end{aligned}$$
(24)

ill be observed that the familiar cases of signals which occupy nonoverlapr bands in the frequency spectrum or are diplexed in the time domain, are lial cases of the situation represented by equation (24).

Since A_1 constitutes the acceptance band of the filter, the expression for impulsive response of the ideal filter in question may be obtained at once pplying equation (13). Thus, we find

$$W(t, \xi) = \int_{A_1} k(t; \lambda) k^{-1}(\lambda; \xi) d\lambda$$

be the integral is taken over A_1 . As was discussed previously, this ideal ξ is not, in general, physically realizable, but one can approximate to $\theta - \beta$; ξ) (for sufficiently large β) by a physical filter, provided $W(t; \xi)$ tends to as $t - \xi \to -\infty$. This physical filter would yield the message ensemble led by the time β with as small an error as desired, and thus would satisfy condition expressed by equation (22).

L.A. ZADEH and K.S. MILLER, J. appl. Phys. 22 (1952) (to be published).

Zusammenfassung

Einige Gesichtspunkte des Problems der Trennung von Information u Rauschen mittels linearveränderlicher Filter werden erörtert, und eine Theosolcher Filter ist wiedergegeben. Ein Filter N wird ideal genannt, wenn es gleic wertig ist zu einer Kettenschaltung von zwei Filtern, wobei jedes mit N identis ist. Es wird gezeigt, daß im allgemeinen Informations- und Rauschgemische ra Hilfe entsprechender idealer Filter getrennt werden können, vorausgesetzt d die in Frage stehenden Gemische unzusammenhängende Mannigfaltigkeiten Signalraum umfassen.

(Received: August 2, 1951.)

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

Nomogramm zur Bestimmung der reellen und komplexen Wurze einer Gleichung vierten Grades

Von Eduard Batschelet und Hans Rudolf Striebel, Basel¹)

Vor kurzem hat H. Blenk zur graphischen Auflösung von Gleichung vierten Grades mit reellen Koeffizienten *Netztafeln* angegeben²). Der Grund danke besteht darin, daß man die gegebene Gleichung

$$z^4 - az^3 + bz^2 - cz + d = 0$$

mit Hilfe der Transformation z = z' - a/4 auf die Normalform

$$z'^4 + p z'^2 - q z' + r = 0$$

bringt. Dadurch wird der Schwerpunkt, den die Bildpunkte der vier Wurz in der komplexen Zahlenebene besitzen, in den Nullpunkt gerückt, so daß Wurzeln in der Gestalt

$$z'_1 = u + v$$
, $z'_2 = u - v$, $z'_3 = -u + w$, $z'_4 = -u - w$

angesetzt werden dürfen. Hierbei kann u wegen der Symmetrie zur reellen Ac als eine reelle, nichtnegative Zahl betrachtet werden, während v und w je nach Anzahl der reellen oder der komplexen Wurzeln reell oder rein imaginär skönnen. Vergleicht man p, q, r mit den entsprechenden Koeffizienten der Gehung

$$(z'-z'_1)(z'-z'_2)(z'-z'_3)(z'-z'_4)=0$$

so erhält man die folgenden Beziehungen für die reellen Größen $u,\,v^2$ und

$$(p+4u^2)^2 - \left(\frac{q}{2u}\right)^2 - 4r = 0,$$

$${v^2 \choose w^2} = -\frac{p}{2} - u^2 + \frac{q}{4u}.$$

1) Universität Basel.

²) Z. angew. Math. Mech. 29, 58-61 (1949). Auf einem anderen Gedanken beruhen die N tafeln, welche von Fritz Emde, Tafeln elementarer Funktionen (Verlag Teubner, 1940), spes S. 48-72, veröffentlicht wurden.

l. III, 1952

Um die unbekannte Zahl u aus (4) mit Hilfe einer Netztafel bestimmen zu innen, war H. Blenk veranlaßt, durch eine weitere Transformation den Koeffienten q in (2) zu 1 zu machen. Wir schlagen nun an Stelle einer Netz- eine uchtlinientafel vor, die bekanntlich unter günstigen Verhältnissen einen Freititsgrad mehr besitzt und bedeutend weniger Zeichenarbeit erfordert¹). Wir konstruieren für die Gleichung (4) mit festem p eine Fluchtlinientafel

Wir konstruieren für die Gleichung (4) mit festem p eine Fluchtlinientafel it einem krummlinigen und zwei geraden, parallelen Skalenträgern. Zu diesem veck betten wir das Nomogramm in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein ehe Figur 1). Die Einheiten auf der x- und auf der y-Achse können unabhängig

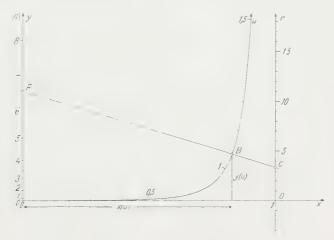


Fig. 1 Konstruktion der Fluchtlinientafel (p=0).

heinander gewählt werden. Eine erste Skala, die q-Skala, legen wir in die Achse, eine zweite, die r-Skala, in die Gerade x=1. In beiden Fällen müssen nd r mit Hilfe noch zu bestimmender Funktionen auf y bezogen werden, wesb wir etwa y=f(q) und y=g(r) setzen. Für jeden Wert von p denken wir uns en krummlinigen Skalenträger x=x(u), y=y(u) für die gesuchte Unbente u entworfen (zum Beispiel für p=0 in Figur 1). Damit nun die Bildakte A, B, C dreier zusammengehöriger Werte von q, r, u auf ein und derselben aden liegen, haben die Koordinaten bekanntlich die Bedingung

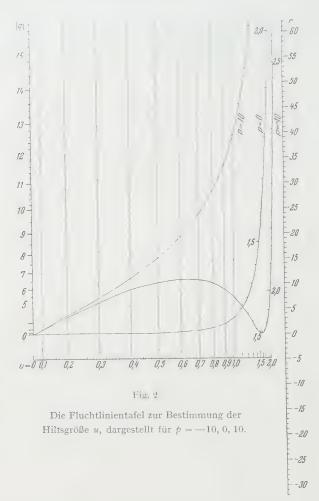
$$\begin{vmatrix} 0 & f(q) & 1 \\ x(u) & y(u) & 1 \\ 1 & g(r) & 1 \end{vmatrix} = -x(u) [f(q) - g(r)] - y(u) + f(q) = 0$$
 (6)

erfüllen. Ein Vergleich von (6) mit (4) liefert uns ohne Mühe die für die Zeichg notwendigen Funktionen

$$x(u) = \frac{4 u^2}{4 u^2 + 1}, \quad y(u) = \frac{4 u^2 (p + 4 u^2)^2}{4 u^2 + 1}, \quad f(q) = q^2, \quad g(r) = 4 r. \tag{7}$$

) Wegen einer allgemeinen Kritik der Netztafeln vergleiche zum Beispiel den Artikel von ADER über Nomographie im *Handbuch der Physik*, Bd. 3, S. 564–598, speziell S. 581.

Der Koeffizient p erscheint nur in y(u), so daß für die zu zeichnenden krum. Imigen Skalenträger bei gleichem Wert von u jeweils dieselbe Abszisse vorhand ist. In Figur 2 ist das so entstehende Nomogramm für die drei Werte p. p = 0 und p = -10 maßgetreu wiedergegeben.



Bei der praktischen Verwendung des Nomogramms brauchen außer dem Figur 2 eingetragenen Kurven nicht unbedingt weitere Kurven p= const zeichnet zu werden. Denn mit Hilfe einer Transformation $z'=m\,z''$ mit reellem läßt sich der Koeffizient p ohne weiteres zu einem der Werte 10, 0, -10 mach $z'=m\,z''$ führt zu einer bloßen Maßstabänderung der komplexen Zahleneber

Nach der Bestimmung von u können v und w aus (5) berechnet werden. .. (3) folgen dann unmittelbar die vier Wurzeln.

Für gewisse Werte von q und r wird die Gerade, die in Figur 2 zum Ablesen u dient, die Kurve p = const in drei verschiedenen Punkten schneiden. Dies spricht dem Fall von vier reellen Wurzeln. Denn hier kann man die Wurzeln drei verschiedene Arten zu Paaren zusammenfassen.

In ähnlicher Weise kann man auch ein Nomogramm zur Bestimmung der len und der komplexen Wurzeln der vollständigen kubischen Gleichung – $az^2 + bz + c = 0$ entwerfen.

Beispiel

$$z^4 - 10z^3 + 19z^2 - 56,7 = 0$$
.

rch die Transformation z=z'+2,5 bringen wir die Gleichung auf die Normal-

$$z'^4 - 18,5 z'^2 - 30 z' - 55,1 = 0$$

durch die weitere Transformation $z' = \sqrt{1,85} z''$ in die Gestalt

$$z''^4 - 10z''^2 - 11,9z'' - 16,1 = 0$$

p=-10, q=-11,9, r=-16,1. Der Figur 2 entnehmen wir für u den Wert 3 und erhalten aus (5) und (3) durch Rechnung die Wurzeln

$$z_1'' = 3,77$$
, $z_2'' = -2,79$, $z_3'' = -0,493 + 1,14i$, $z_4'' = -0,493 - 1,14i$.

nsformieren wir schließlich rückwärts, so gewinnen wir für die Wurzeln der orünglichen Gleichung die Näherungswerte

$$z_1 = 7,64$$
, $z_2 = -1,30$, $z_3 = 1,83 + 1,55 i$, $z_4 = 1,83 - 1,55 i$.

Summary

Fo find approximate values for the real and complex roots of a fourth order ation, H. Blenk suggested to determine the auxiliary values u, v, w from (4) (5). He published a network chart to solve the equation (4). In this paper we cose an alignment diagram instead of a network chart. This procedure allows gher degree of freedom without additional work. The same method may be for third order equations.

egangen: 25. 10. 1951.)

Varia - Miscellaneous - Divers

Union internationale de Physique pure et appliquée

L'Union internationale de Physique pure et appliquée étudie actuellement rojet de colloque sur «Les ondes courtes» (ordre de grandeur de 10⁻¹ à 10 cm) leurs relations avec l'optique qui serait organisé en juin ou septembre 1952 une ville du nord de l'Italie. Cette réunion aurait lieu sous le patronage de ion internationale de Physique; la Société de Physique italienne, sous la dence de M. le professeur E. Perucca (Politecnico di Torino) ou d'une autre onnalité italienne, prendrait soin de l'organisation.

Tenant compte des suggestions reçues, les sujets considérés seraient suivants (chacun d'eux étant traité essentiellement au point de vue d'une ce paraison et d'une aide mutuelle entre la physique des ondes courtes et l'optiqu 1° Questions théoriques et résultats expérimentaux (propagation, diffraction interprétations quantiques et électromagnétiques, etc.);

2 Appareillages et méthodes expérimentales: guides d'ondes, dispositifs spect scopiques (en se limitant aux travaux postérieurs au Colloque tenu en 1

à Amsterdam), etc.;

3° Applications: examen à grande échelle de certains phénomènes concern l'optique physique et l'optique physiologique; météorologie (temps, longueu

vitesse de la lumière), etc.

Les intéréssés sont priés d'adresser leurs demandes d'information ainsi des inscriptions éventuelles de communications comprenant titre et durée ma mum à chacune des deux adresses indiquées ci-après: E. Perucca, Direct de l'Institut de Physique expérimentale du «Politecnico», Torino, Italie; P. Fleury, Secrétaire général de l'Union internationale de Physique, 3, bot vard Pasteur, Paris XVe, France.

International Symposium on the Reactivity of Solids

Diese Tagung findet vom 9. bis 13. Juni 1952 in Gothenburg (Schweden) ur dem Patronat der Royal Swedish Academy of Engineering Sciences statt.

Diesbezügliche Anfragen und Anmeldungen sind zu richten an Ingen Vetenskaps Akademien, Box 5073, Stockholm 5, Schweden. P. Nig

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

"Acustica", Internationale akustische Zeitschrift (S.-Hirzel-Verlag, Züng 1951). Jahresabonnement sFr. 36.-, Einzelheft sFr. 6.50.

Soeben ist die erste Nummer einer neuen wissenschaftlichen Zeitschr «Acustica», erschienen. An ihrer Herausgabe beteiligen sich drei internations wissenschaftliche Vereinigungen, nämlich: «Groupement des acousticiens» langue française», "Acoustics group of the Physical Society of London" «Verband der deutschen physikalischen Gesellschaften». Die drei Gesellschaften je einen Schriftleiter in der Person von Prof. Canac, Prof. Richarstund Prof. Erwin Meyer. Dazu gesellt sich Prof. Giacomini, Rom, und die Hausschriftleitung hat Dr. Kosten, Delft, übernommen. Es handelt sich also umra wirklich internationales Gemeinschaftswerk.

Seitdem im Jahre 1942 die «Akustische Zeitschrift» eingegangen war, mach sich besonders nach dem Kriege das Fehlen eines europäischen akustischen Fasorganes stark bemerkbar. Veröffentlichungen aus allen Gebieten der Akust wanderten entweder an das «Journal of the Acoustical Society of America" oder erschienen in allen möglichen wissenschaftlich-technischen Organen, woteilweise nur sehr schwer auffindbar waren. Die neue Zeitschrift «Acustica» in daher eine sehr fühlbare Lücke in glücklicher Weise aus, und es besteht is Zweifel, daß sie sich rasch einer weiten Verbreitung erfreuen wird, wofür auf die hervorragende Zusammensetzung der Schriftleitung bürgt. Zudem ist

standekommen einer wirklich internationalen Zusammenarbeit immer sehr eulich; nicht zuletzt hat dazu der Verband der deutschen physikalischen Geschaften beigetragen, indem er auf das bereits eingeleitete Wiedererscheinen früheren «Akustischen Zeitschrift» zugunsten der «Acustica» verzichtet hat. Die vorliegende erste Nummer der «Acustica» vermittelt schon ein übersichtnes Bild über die Reichhaltigkeit und Qualität der zu erwartenden Beiträge. NAC und GAVREAU berichten über die von ihnen entwickelte Technik von raschallmessungen in Luft und ihre Anwendung für Modellversuche. MEYER, RKIN, OBERST und PURKIS veröffentlichen die Resultate einer englisch-deuten Zusammenarbeit auf dem Gebiete der raumakustischen Meßmethoden; ch die Anwendung des Reziprozitätsgesetzes ist es erstmals gelungen, bei der nallübertragung durch eine Trennwand die Anteile von Luft und Körperschall au zu trennen. Fokker bringt eine theoretische Betrachtung aus der musikalien Grammatik über Tonleitern, und Fischer untersucht die Abstrahlung von pulsen durch eine Kolbenmembran. Den Schluß dieses ersten Heftes bildet eine öffentlichung von Somerville und Ward aus dem Laboratorium der citish Broadcasting Corporation'' über Modellmessungen an akustischen Diforen in Räumen.

Um der in den letzten Jahren erfolgten Anhäufung des Stoffes Rechnung zu gen, ist die Herausgabe mehrerer Beihefte zu der sonst sechsmal pro Jahr ereinenden Zeitschrift vorgesehen. Die Aufsätze erscheinen in französischer, lischer oder deutscher Sprache, wobei jeweils sehr übersichtliche Zusammentungen in allen drei Sprachen vorangestellt sind.

Es besteht kein Zweifel, daß diese neue Zeitschrift einem wirklichen Bedürfnis spricht und daß alle Voraussetzungen für interessante Originalbeiträge aus n Gebieten der Akustik vorhanden sind, so daß ihr heute schon repräsentativer rakter zukommt, der ihr weiteste Verbreitung sichern wird. W. Furrer

General Homogeneous Coordinates in Space of Three Dimensions. E. A. Maxwell (Cambridge University Press, Cambridge 1951), 169 pp.; 15s. Das Buch ist die Fortsetzung des im Jahre 1948 in zweiter Auflage erschieren Buches The methods of plane projective geometry, based on the use of general sogeneous coordinates desselben Verfassers. Es gibt eine kurze, leichtfaßliche führung in die (analytische) projektive Geometrie des dreidimensionalen mes.

Inhaltsangabe: I. Der Punkt, die Gerade, die Ebene. II. Die Flächen zweiter nung. III. Die Erzeugenden der Flächen zweiter Ordnung. IV. Liniengeorie. V. Die Raumkurven dritter Ordnung. VI. Systeme von Flächen zweiter nung. VII. Anwendungen auf die euklidische Geometrie. VIII. Anwendungen Matrizenkalküls.

Eine reiche Aufgabenliste (einfache und schwierigere Aufgaben) folgt jedem itel.

Das Buch kann für Studierende der Mathematik und der Physik des 1. und emesters nützliche Dienste leisten.

M. Plancherel

Theorie der Elektrizität. Von R. BECKER (Verlagsgesellschaft B. G. Teub-Leipzig 1949). Band 1: Einführung in die Maxwellsche Theorie, 240 S., 15b.; \$4.10; Band 2: Elektronentheorie, 336 S., 80 Abb.; \$4.60.

Die neuesten Auflagen der zweibändigen Theorie der Elektrizität unterscheisich von den vorhergehenden praktisch nicht. Es wäre in der Tat auch schwer, idwelche Vorschläge für Verbesserungen an diesem Standardwerk anzubrin-

gen, welches sich seit Jahren für das Studium der Elektrodynamik und der Grundagen der Elektronentheorie so vorzüglich bewährt hat. Gewiß wird manch Leser bedauern, daß die moderne Entwicklung der Theorie des Elektrons im Sinder Quantenmechanik nicht zur Darstellung kommt. Diesem Wunsche könn jedoch nur durch eine ganz erhebliche Vergrößerung des Umfanges nachgekomen werden, worauf der Autor bewußt verzichtet hat. Es spricht für den Wades bestehenden Werkes, daß es durch diese Einschränkung an Bedeutung nich verliert.

Rein äußerlich sind die beiden Bände leider mit einem Schönheitsfehler haftet: Das Papier ist von recht mäßiger Qualität und zeigt zahlreiche Defekt die den Satz oft in unangenehmer Weise stören. Man hätte dem wertvollen Tewahrlich einen besseren Träger gewünscht.

G. But

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Zweiter Ban Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen. Von A. Ostrow: (Verlag Birkhäuser, Basel 1951). 482 S., sFr. 69.70.

Nach fünf Jahren konnte nun die Fortsetzung des in der Sammlung «Lesbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften» hera gegebenen ersten Bandes der Vorlesungen über Infinitesimalrechnung erschem Sie erfolgt aus stofflichen und pädagogischen Rücksichten in zwei Bänden, wie denen der vorliegende zweite Band des Gesamtwerkes die Differentialrechnung der Funktionen mehrerer Variablen sowie notwendige Ergänzungen des ers Bandes behandelt.

Nach einem Ausbau der Grundlagen durch eine vertiefte Diskussion des Uendlichen in je einem Kapitel über Mengenlehre und über Konvergenz und Stetkeit von Funktionen auf Punktmengen folgt eine eingehende Darstellung der endlichen Reihen mit konstanten und variablen Gliedern und den Potenzreill im besondern sowie der Ergänzungen zur Differentialrechnung, vor allem mehreren Variablen. Die Anwendungen beziehen sich zunächst auf die Analy wo die so wichtigen Existenzsätze für implizite Funktionen bewiesen und Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Funktionssystemen eingehend diskutiv werden. Ein Kapitel über numerische Rechenmethoden bringt Anwendungen Interpolation erster und höherer Ordnung (LAGRANGE und NEWTON), numerischifferentiation und Integration und genäherte Auflösung von Gleichungen, wor jeweils auf Fehlerabschätzungen besonderes Gewicht gelegt wird. Die beiden wiedeibenden Kapitel sind einer Einführung in die Differentialgeometrie gewidm

Besonders zu erwähnen ist die überaus reiche Sammlung von Aufgaben – sind insgesamt 1560 ganz neuartig gestellte Aufgaben –, die stoffgemäß auf verschiedenen Paragraphen verteilt sind.

Originalität und wissenschaftliche Sauberkeit, pädagogisches Geschick u Kunst der Darstellung werden für längere Zeit auch diesem zweiten Band ein ersten Platz sichern.

A. Pflus

Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces. R. Courant (Interscience Publishers, New York 1950). 344 pp., \$4.50.

Es sind nun bald hundert Jahre her, seitdem RIEMANN das Dirichletse Prinzip zur Begründung seiner Theorie der Abelschen Integrale benützt, ur genau fünfzig Jahre, seitdem HILBERT dieses Prinzip auf eine sichere Basis gestihat. Stets erwies es sich als eine kraftvolle Methode, und seine Verwendbarklist besonders von Courant (es war immer einer seiner Lieblinge) wesentlich as gebaut und vereinfacht worden.

1. III, 1952

Das vorliegende Buch gibt eine moderne Darstellung des Dirichletschen Prinos und seiner wichtigsten Anwendungen auf dem Gebiet der konformen Abbilng und der Minimalflächen. Die sehr klaren und ausführlichen Beweise, unteritzt durch physikalische Motivierungen und Interpretationen, machen die ktüre dieses Buches zu einem wirklichen Genuß. Aus dem Inhalt: I. Lösung des andwertproblems für ebene Gebiete mit Hilfe des Dirichletschen Prinzips, II. eweis des Parallelschlitztheorems, Uniformisierung schlichtartiger Riemannher Flächen sowie solcher höhern Geschlechts. III. Lösung des Plateauschen oblems für einfach zusammenhängende Flächen nach der vom Verfasser entckelten Methode, IV. Verallgemeinerung auf Flächen höherer topologischer ruktur : Durch gegebene endlich viele Jordan-Kurven in einem m-dimensionalen aum ist eine Minimalfläche von vorgeschriebenem Orientierbarkeitscharakter d Eulerscher Charakteristik zu konstruieren. Beim Lösbarkeitskriterium spien die Vergleichsflächen mit niedrigerer topologischer Struktur eine wesentliche olle. V. Im zweidimensionalen Falle liefert obige Methode die Existenz konmer Abbildungen auf gewisse Normalgebiete. VI. Diskussion besonderer Proeme, wie freier Ränder und unstabiler Minimalflächen.

Das Buch enthält einen von M. Schiffer verfaßten Anhang über einige neuere atwicklungen in der Theorie der konformen Abbildung. Es werden die Anwenngen der Bergmanschen Kernfunktion auf konforme Abbildung, die von Schiffe mit Erfolg wieder aufgegriffene Hadamardsche Variationsmethode sowie die ethode der Extremallänge zur Lösung von Extremalproblemen dargestellt.

A. Pfluger

Elektrische Maschinen. Band I: Allgemeine Berechnungselemente. Die zichstrommaschine. Von R. RICHTER. (Verlag Birkhäuser, Basel 1951). 630 S., 3 Abb.; sFr. 49.40.

Von dem 1924 im Verlag Springer als erste Auflage erschienenen Buche von CHTER Elektrische Maschinen, 1. Band, ist nun die zweite Auflage als photochanischer Neudruck im Basler Verlag Birkhäuser neu herausgekommen. Mit nugtuung darf festgestellt werden, daß Druck und Bild der früheren Auflage chwertig sind. Die notwendigen Ergänzungen sind eingangs des Buches als fänzungen und Berichtigungen kurz zusammengestellt; sie enthalten im besonen einige wertvolle Hinweise auf neuere Literatur im Gebiete der Erwärmungsbleme.

Der in drei Teile gegliederte Inhalt des Buches umfaßt im ersten Abschnitt Grundbegriffe und Gesetze der Elektrotechnik, soweit sie irgendwie für die Etrischen Maschinen jeder Art von Belang sind.

Der zweite Abschnitt führt in die allgemeinen Eigenschaften und Kriterien elektrischen Maschine ein. Zu erwähnen sind dabei die kurze, aber für normale prüche ausreichende Übersicht über die Wicklungen für Gleich- und Wechtrom; ferner die Berechnungsgrundlagen des magnetischen Kreises. Sehr führlich behandelt ist in diesem Abschnitt das Erwärmungsproblem der trischen Maschine; nach exakter Bestimmung aller auftretenden Verluster, wertvolle Angaben über die Wärmeabgabe und die Lüftung angeschlossen, in finden sich auch, allerdings in etwas fremder Umgebung, die grundlegenden rlegungen und Berechnungsangaben über die verschiedenen Streuinduktivi-

Erst der dritte Abschnitt befaßt sich speziell mit der Gleichstrommaschine, der die theoretischen und rechnerischen Grundlagen, eingeschlossen die Kombation, ausführlich behandelt sind. Die Angaben über die konstruktiven Fra-

gen dürften in einem zweiten Bande folgen; einige Schnittbilder geben de Leser immerhin einen gewissen Einblick in die konstruktive Seite der Gleich strommaschine.

Das Buch verdient durch seine Klarheit und Vollständigkeit höchstes Lol es darf wohl als das Standardwerk über die Gleichstrommaschine bezeichnwerden. Für Studierende bildet es eine gediegene Grundlage für das Verständnder elektrischen Maschine; für den Praktiker ist es infolge seiner Gründlichke ein willkommenes Nachschlagewerk. Sein Studium wird allen, die mit de Gleichstrommaschine in Berührung kommen, größten Gewinn bringen.

E. Dünn

Superfluids, Volume 1: Macroscopic Theory of Superconductivity. By F. Lo DON (John Wiley and Sons, New York 1950). 161 pp., \$5.00.

The book under review is the first of a projected series entitled "Superfluid which is to deal with the phenomenon of resistanceless flow exhibited by superconductors and by liquid helium II. This volume is not a general textbook superconductivity in all its experimental and theoretical aspects. It is rather up-to-date account of the phenomenological theory of superconductivity propos

by F. and H. LONDON.

In an introductory chapter the concept of a superfluid is discussed and tability of a portion of the particles present (electrons or atoms) to withdraw from the disorder of thermal agitation is attributed to a quantum mechanism of mach molecular size. After a general discussion of superconductors and liquid helium from this point of view London makes the fascinating suggestion that submacroscopic quantum mechanisms may help us to understand the macromolecular systems of biophysics which behave in many respects much more simply the would be expected in view of the apparent great complexity of their structure.

The ideal superconductor is then defined and the thermodynamics of transition from the normal to the superconducting state discussed. The balassumption of the London theory is that the supercurrent is related to the manetic field present in contrast to the normal current which is governed by the electric field. The consequences of this hypothesis are developed and it is shown to be capable of explaining the Meisener effect, the perfect diamagnetism macroscopic superconductors. Then follow discussions of the intermediate state when the body is passing from the purely superconductive to the normal state and of the phenomena exhibited by superconductors of small dimensions.

The book closes with a chapter describing Professor London's views on wll a quantum mechanical theory of superconductivity must achieve and the suggestions which the macroscopic theory can make as to the line to be taken.

The appearance of the book is particularly opportune as it is of great values have an authoritative account of the achievements and limitations of the macing scopic theory at a time when there are signs that, as a result of the work. Fröhlich and of Bardeen, a satisfactory molecular theory of superconductive may soon be developed. Professor London's book may be heartily recommend to all who are interested in the present state of theory regarding the fascinate transfer mechanisms classified under the heading of «Superfluids» and the remaining volumes of the series will be eagerly awaited.

L. C. Jacks

Über die numerische Auflösung von Randwertproblemen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen

Von Eduard Batschelet, Basel1)

Einleitung

Die angewandte Physik kennt eine Reihe von Problemen, vor allem Probleme der Potentialtheorie, der Hydrodynamik, der Elastizität, des stationären Värmeflusses und der Diffusion, welche zu Randwertaufgaben mit linearen artiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus führen. Bei solchen Problemen können nur in wenigen, einfachen Fällen Lösungen in geschlossener form angegeben werden. Unter den numerischen Methoden hat sich das Difvenzenverjahren, welches das kontinuierliche Problem durch ein diskontinuierliches ersetzt, als besonders wirksam erwiesen. Seine Vorzüge liegen in der infachheit des mathematischen Apparates, in der grossen Anschaulichkeit nd nicht zuletzt darin, dass mit kurzer Rechnung schon ein guter Überblick ber den Verlauf der Lösungsfunktion gewonnen werden kann.

Obwohl der Grundgedanke des Verfahrens sehr alt ist, haben erst L. F. RI-HARDSON [16]²) und C. RUNGE [17] praktische Erfolge erzielt. Ihre Methoden urden von mehreren anderen Autoren, wie H. LIEBMANN [11], H. B. PHILLIPS id N. Wiener [15], G. Shortley, R. Weller, P. Darby, E. H. Gamble [18], 9], verbessert. Vor allem gelang es R. V. Southwell [21] und seinen zahlreiten Mitarbeitern, mit Hilfe der sogenannten Relaxationsmethode einen Weg it zeigen, auf dem die numerische Lösung solcher Probleme mit erträglichem unfwand erhalten werden kann.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit dem dritten Randwertroblem, wo die Normalableitungen am Rande durch eine lineare Relation mit
In Funktionswerten verknüpft sind. Wir berücksichtigen wegen der zahlreien Anwendungsmöglichkeiten auch gemischte Randwertprobleme. Hier liegt
If Teilen des Randes eine Randbedingung erster Art, auf anderen Teilen eine
Iche zweiter oder dritter Art vor. Als Beispiel sei etwa der stationäre Wärmeuss durch einen Körper genannt, wobei der eine Teil der Oberfläche unter konunter Temperatur steht und beim andern Teil die Wärme proportional zur
Erlichen Temperaturdifferenz zu- oder wegströmt.

¹⁾ Mathematische Anstalt der Universität Basel.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf Seite 191.

Die numerische Auflösung des zweiten und des dritten Randwertproblems mit Hilfe der Differenzenmethode ist gegenüber dem ersten Randwertproblem bis jetzt stiefmütterlich behandelt worden. Wohl hat L. F. RICHARDSON [16] Beispiele dargeboten. Auf ein numerisches Verfahren sind aber erst F.Wolf [24] im Falle eines Stufenrandes und R. V. SOUTHWELL, G. VAISEY [20], [21] bei gekrümmtem Rand eingegangen. Die letztere Methode knüpft stark an mechanische Vorstellungen an, die jedoch beim gemischten Randwertproblem kaum mehr verwendet werden können. Neuerdings hat sich L. Fox [7], [8] mit dem Differenzengleichungen, die sich in den Gitterrandpunkten ergeben, besonder beschäftigt. Doch blieb das Problem der Approximation bei gekrümmtem Rande noch offen.

In § 1 studieren wir zunächst den Übergang zu Differenzengleichungen von neuem, wobei wir der Approximation am Rande besondere Aufmerksamkeis schenken. Allerdings sehen wir uns gezwungen, Ecken und Spitzen am Rand auszuschliessen, sofern nicht gerade der einfache Fall eines Stufenrandes vor liegt. Die eigenartigen Schwierigkeiten, welche eine Unstetigkeit der Tangentserzeugt, kommen in Abschnitt 8 zur Sprache.

Wir geben auch in § 1 hinreichende Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit von Gitterlösungen, das heisst der Lösungen des dem gegebener Problem zugeordneten Systems von Differenzengleichungen. Wir erwähne hier nur nebenbei, dass man, von unseren Ergebnissen ausgehend, sehr wahn scheinlich entsprechende Existenz- und Unitätssätze für Differentialgleichungen beweisen könnte, wie solche von R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy [5] im Falle von Randbedingungen erster Art hergeleitet worden sind.

Über den beim Differenzenverfahren begangenen Abbrechfehler (truncatioerror), das heisst über die Differenz zwischen der Gitterlösung und der gesuchten kontinuierlichen Lösung, hat S. Gerschgorin [10] im Falle des erster Randwertproblems gezeigt, dass dieser Fehler bei Verfeinerung des Gitter mindestens proportional zur Gitterseite h gegen Null strebt. L. Collatz [1] he anschliessend dargetan, dass eine bessere Anpassung der Randwerte durch Interpolation die Konvergenz wesentlich verbessert, so nämlich, dass der Fehle mit h² gegen Null strebt. Ein solches Ergebnis war schon früher erwartet worden, wie Andeutungen von L. F. Richardson [16] und von C. Runge [17] zeigen.

In § 2 werden wir eine Fehlerabschätzung für den Fall von Randbedingungen dritter Art sowie auch für gemischte Randbedingungen vornehmen. Wit modifizieren und erweitern hiezu die von S. Gerschgorn [10] ersonnene Majerantenmethode. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Differentiægleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen, wobei w. Eigenwertprobleme ausschliessen. In Satz 1 (§ 2, Abschnitt 14) sagen wir aus dass bei dem von uns vorgeschlagenen numerischen Verfahren der Abbrechfehler proportional zur Gitterseite h gegen Null strebt. Anschliessend dara

diskutieren wir die Massnahmen, die man zur Konvergenzbeschleunigung zu zeffen hat. Unser Vorgehen ist an allerlei einschränkende Voraussetzungen gebunden, welche in erster Linie die Existenz einer eindeutigen Lösung mit gewissen Stetigkeitseigenschaften sicherzustellen haben. Immerhin ist zu erwarten, dass das Differenzenverfahren auch in allgemeineren Fällen brauchbare numerische Resultate liefert, wie praktische Erfahrungen zeigen. Doch wird der Konvergenzgrad im allgemeinen geringer sein.

Schliesslich gehen wir in § 3 auf die numerische Auflösung des zugeordneten Systems von Differenzengleichungen genauer ein. Wir studieren ein alternichendes Verfahren, das als eine Erweiterung des Southwellschen Relaxationsverahrens aufgefasst werden kann. In Satz 2 (Abschnitt 18) zeigen wir, dass dieses Approximationsverfahren für jedes feste Gitter konvergiert. In Abschnitt 19 olgt eine Diskussion der Konvergenzgeschwindigkeit. Beim Beweis von Satz 2 nachen wir ausgiebig von den Greenschen Zahlen Gebrauch, welche wir weiter vorne, in Abschnitt 6, einführen. Die Arbeit schliesst mit dem Studium der unvermeidlichen Abrundungsfehler.

§ 1. Das der Differentialgleichung und den Randbedingungen entsprechende System von Differenzengleichungen

1. Es bezeichne G ein beschränktes, einfach oder mehrfach zusammenhänendes Gebiet der reellen (x, y)-Ebene. Der Rand C des Gebietes soll frei von Doppelpunkten, Ecken und Spitzen sein, also überall eine stetige Tangente seitzen.

Gesucht ist eine Funktion v = v(x, y), welche in G der normierten¹) elliptichen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c v = g$$
 (1.1)

enügt und auf C die Randbedingung

$$k(s) \frac{\partial v}{\partial n} - h(s) v = f(s)$$
 (1.2)

ei nach innen gerichteter Normale erfüllt.

Wir setzen voraus, dass die Koeffizienten a, b, c, g in (1.1) solche beschränkte unktionen von x und y und k(s), h(s), f(s) in (1.2) solche beschränkte Funkonen eines auf C erklärten Parameters sind, dass das Problem eine eindeutig estimmte Lösung v(x, y) besitzt, die im Innern und auf dem Rand von G samt

¹⁾ Über die Transformation der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung auf die Normalm siehe etwa Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. 2 (Springer, Berlin 37), S. 123 ff.

ihren partiellen Ableitungen bis zur vierten Ordnung stetig ist¹). Die verlangten Stetigkeitseigenschaften sollen nicht verlorengehen, wenn g und f(s) durch eine gemeinsame, von Null verschiedene Konstante ersetzt werden²). Unter alleit Umständen soll im folgenden stets

$$c = c(x, y) \le 0 \tag{1.3}$$

gelten. Ferner müssen wir für die Randbedingung die folgenden Annahmer machen:

Der Rand C zerfalle in zwei Teile C_1 und C_2 , wobei C_1 und C_2 aus endlichvielen Teilbögen bestehen können. Dann sei

$$k(s) = 1 \text{ auf } C_1, \quad k(s) = 0 \text{ auf } C_2$$
 (1.4)

und

$$h(s) \ge 0 \text{ auf } C_1, \quad h(s) = 1 \text{ auf } C_2.$$
 (1.5)

Sollte die Menge der Randpunkte C_2 leer und zugleich in allen inneren Punkten c(x, y) = 0 sein, so verlangen wir über (1.5) hinaus, dass auf wenigstens einem Teilbogen von C

$$h(s) > 0 \tag{1.6}$$

gilt.

In dem soeben formulierten Problem sind die folgenden Spezialfälle mit enthalten:

- a) Das Randwertproblem erster Art, wenn nämlich C₁ eine Nullmenge ist.
- b) Das Randwertproblem dritter Art, wenn C_2 eine Nullmenge ist.
- c) Das aus Randbedingungen erster und zweiter Art hervorgehende gemischte Problem. Hier ist längs C_1 die Normalableitung $\partial v/\partial n$ und länge C_2 , das keine Nullmenge ist, der Wert von v vorgegeben.

Das zweite Randwertproblem ist nur dann mitenthalten, wenn c(x, y) nich in allen Punkten von G verschwindet. Denn sonst muss für die Existenz eine Lösung bekanntlich

$$\int_{C} \frac{\partial v}{\partial n} \, ds = 0$$

vorausgesetzt werden.

¹⁾ Unter welchen Bedingungen für die Koeffizienten eine eindeutige Lösung mit den verlangtes Stetigkeitseigenschaften existiert, sei hier nicht untersucht. Die Literatur über Existenzsätze für das dritte Randwertproblem findet man zusammengestellt im Artikel von L. Lichtenstein Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 2, 3. 2, S. 1303-1305, oder im Artikel vo. W. Sternberg in Pascals Repertorium der höheren Mathematik, Bd. I, 3, 2. Aufl. (Teubner, Leipzi und Berlin 1929), S. 1139. Es ist dort üblich, die auch von uns gemachten Voraussetzungen (1. 3 und (1. 6) zugrunde zu legen. Doch wird die Stetigkeit der höheren als zweiten Ableitungen nich verlangt. Auf der anderen Seite ist unser Problem mit Rücksicht auf die Anwendungen allgemeine formuliert, indem k(s) auch den Wert Null annehmen darf.

²) Da die linken Seiten in (1.1) und (1.2) homogen in v sind, so ist die Wahl der Konstante: unwesentlich. In (13.1) wird sie gleich -1 gesetzt.

2. Um (1. 1) mit der Randbedingung (1. 2) numerisch auflösen zu können, wenden wir das Differenzenverfahren an. Zu diesem Zweck legen wir in die x, y)-Ebene ein quadratisches Punktgitter parallel zu den Koordinatenachsen¹). Die Seitenlänge, das heisst der Abstand zweier benachbarter Gitterpunkte, sei nit h bezeichnet. Den Rand C von G approximieren wir auf die folgende Weise lurch einen von den Gitterpunkten gebildeten Streckenzug C' (Figur 1):

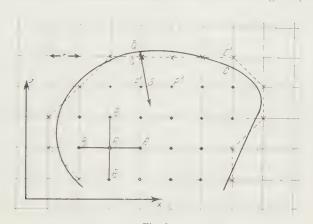


Fig. 1 Approximation des Gebietes G durch das Gittergebiet G'.

Von jeder Gitterseite, die von C geschnitten wird, ordne man den dem chnittpunkt am nächsten liegenden Gitterpunkt dem Rande C' zu. Im Zweielsfall bleibt die Wahl frei. Von einem so bestimmten Gitterrandpunkt kann nan auf C ein Lot fällen, welches $\leq h$ 2 ist. Dies folgt unmittelbar aus der Vorussetzung, dass C überall eine stetige Tangente besitze. h sei dabei so klein ewählt, dass zu jedem Punkt auf C' nur ein einziges solches Lot existiert. Auf iese Weise wird jedem Punkt Q von C' eindeutig ein Punkt Q von C, nämlich er Fusspunkt des Lotes, zugeordnet. Mit C'_1 und C'_2 bezeichnen wir die Mengen erjenigen Punkte von C', denen ein Randpunkt von C_1 bzw. C_2 zugeordnet ist. ür hinreichend kleines h sind C'_1 und C'_2 nicht leer, wenn das Entsprechende ir C_1 bzw. C_2 gilt.

Mit G' bezeichnen wir das von C' eingeschlossene Gittergebiet. Jeder innere itterpunkt ist dadurch ausgezeichnet, dass er die maximale Zahl von vier achbarpunkten besitzt, die alle zum "abgeschlossenen" Gittergebiet G' gebren. Wir dürfen erwarten, dass h bereits so klein ist, dass die innern Gitterinkte von G' eine "zusammenhängende" Punktmenge bilden, und dass auch eine "Engpässe" existieren. In G' bilden wir nun Differenzenquotienten, welche

¹⁾ Gelegentlich eignen sich andere als quadratische Gitter besser. Wir verweisen hiezu auf V. Southwell [21].

die in (1. 1) und (1. 2) vorkommenden Differentialquotienten approximieren. Eine Gitterfunktion u(x, y) nehme in einem beliebigen Gitterpunkt P_0 den Wert u_0 und in den vier Nachbarpunkten P_1 , P_2 , P_3 , P_4 die Werte u_1 , ..., u_4 an (Figur 1). Einige dieser Nachbarpunkte können auch Randpunkte sein. Unter den partiellen Differenzenquotienten erster und zweiter Ordnung verstehen wir dann wie üblich die Ausdrücke

$$\frac{u_1 - u_3}{2h}$$
, $\frac{u_1 - 2u_0 + u_3}{h^2}$ in der x-Richtung,
 $\frac{u_2 - u_4}{2h}$, $\frac{u_2 - 2u_0 + u_4}{h^2}$ in der y-Richtung. (2.1)

Ersetzt man in (1, 1) die Differentialquotienten durch die soeben eingeführten Differenzenquotienten, so lauten die zu (1, 1) analogen Differenzengleichungen

$$\frac{1}{h^2} \; (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4 \; u_0) + a \; \frac{u_1 - u_3}{2 \; h} + b \; \frac{u_2 - u_4}{2 \; h} + c \; u_0 = g \; ,$$

wobei die Werte von a, b, c, g im Punkte P_0 zu bestimmen sind. Daraus gewinnen wir durch Umformung

$$\left(1 + \frac{ah}{2}\right)u_1 + \left(1 + \frac{bh}{2}\right)u_2 + \left(1 - \frac{ah}{2}\right)u_3$$

$$+ \left(1 - \frac{bh}{2}\right)u_4 - (4 - ch^2)u_0 = h^2g,$$

$$(2.2)$$

oder abkürzend die Differenzengleichungen

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 - \beta u_0 = \gamma$$
. (2.3)

Hierin sind die Koeffizienten α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , β , γ gewisse Gitterfunktionen, welche wegen (2. 2) und (1. 3) den folgenden Bedingungen genügen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 4 , \qquad (2.4)$$

$$\beta \ge 4. \tag{2.5}$$

Es sei ausserdem h so klein angenommen, dass überall in G'

$$\alpha_i > 0$$
 $(i = 1, 2, 3, 4)$ (2. 6)

gilt.

3. Um die Normalableitung passend approximieren zu können, sei Q ein beliebiger Gitterpunkt von C' und n-n(s) die durch Q gehende Kurvennormale von C (Figur 1). Durch sie wird, wie in Abschnitt 2 dargelegt worden ist dem Gitterpunkt Q ein Punkt Q der Kurve C zugeordnet. Folgt man der Kurvennormalen n ins Innere von G', so schneidet sie die nächstfolgende Gitterseite in einem gewissen Punkt S. S ist im allgemeinen kein Gitterpunkt. Die S

Endpunkte der Gitterseite, auf der S liegt, seien mit P' und P'' bezeichnet. Bei ninreichend kleiner Gitterseite h ist mindestens einer dieser beiden Gitterbunkte ein innerer Punkt von G'.

Weiterhin sei der Abstand des Punktes S von Q mit σ h bezeichnet, wobei ür σ offenbar

$$1 \le \sigma \le \sqrt{2} \tag{3.1}$$

wilt. Aus den Werten u' und u'', welche u(x, y) in den Punkten P' und P'' unnimmt, werde durch lineare Interpolation der Wert u in S gebildet, so dass also u die Gestalt

$$u = \lambda_1 u' + \lambda_2 u'', \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0$$
 (3.2)

nat (vgl. Figur 3 in Abschnitt 10). Mit U bezeichnen wir den Wert von u(x, y) in Q. Dann werde $\partial v \partial n$ im Punkte Q durch den Differenzenquotienten

$$\frac{u}{\sigma h} \qquad (3.3)$$

m Punkte Q approximiert.

Die Randbedingung (1. 2) wird daher im Punkte Q durch

$$k(s) = \frac{u - U}{\sigma h} \qquad h(s) \quad U = f(s) \tag{3.4}$$

ngenähert, wofür wir nach Multiplikation mit σh auch

$$k(s) u - [k(s) + \sigma h h(s)] U = \sigma h f(s)$$
(3.5)

der kurz

$$K u - H U = F \tag{3.6}$$

chreiben können. Darin bezeichnen K, H, F gewisse Gitterfunktionen auf dem Rand C'. Die zu ihrer Bestimmung im Randpunkt Q notwendigen Werte von (s), h(s), f(s) sind in dem zugeordneten Punkt Q zu berechnen.

An Stelle von (1.4) tritt die Annahme

$$K = 1 \text{ auf } C_1', \quad K = 0 \text{ auf } C_2'$$
 (3.7)

nd an Stelle von (1.5)

$$H = 1 + \sigma h h(s) \ge 1 \text{ auf } C'_1, \quad H = \sigma h > 0 \text{ auf } C'_2,$$
 (3.8)

obei für den Fall, dass C_2' eine Nullmenge ist, h so klein vorauszusetzen ist, ass für wenigstens einen Punkt von C'

$$H > 1 \tag{3.9}$$

lt.

4. Die Gleichungen (2. 3) und (3. 6) fassen wir zu einem System zusammen, wobei wir gleichzeitig für die Linearformen linker Hand abkürzende Bezeichnungen einführen:

$$l(u) \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 - \beta u_0 = \gamma ,$$

$$L(U) \equiv K u - H U = F .$$
(4. 1)

Hierin verwenden wir grosse Buchstaben nur für solche Grössen, die sich auf den Rand C', kleine Buchstaben aber für Grössen, die sich vorzugsweise auf das Innere von G' beziehen.

Bezeichnet N die Anzahl aller Gitterpunkte von G' mit Einschluss des Randes C', so bilden die Gleichungen (4. 1) ein System von genau N linearen Gleichungen mit den N Unbekannten u(x, y).

Dieses System besitzt unter den Bedingungen (2.4), (2.5), (2.6), (3.7) (3.8), (3.9) eine Reihe wichtiger Eigenschaften, die wir in den folgenden Hilfssätzen zusammenfassen:

Hilfssatz 1. Machen wir im Gleichungssystem (4. 1) zusätzlich die Annahme

$$\gamma \ge 0$$
 , $F \ge 0$, (4.2)

so gilt für eine allfällig existierende Lösung von (4.1) im Innern und auf dem Rand von G'

$$u \le 0. \tag{4.3}$$

Beweis. Angenommen, es existiere eine Lösungsfunktion u(x, y) mit wenig stens einem positiven Wert. Dann bezeichne $u^* > 0$ den maximalen Wert von u in G'. Betrachten wir zuerst die Konsequenzen für den Fall, dass u^* einem Punkt im Innern von G' zugeordnet wäre. Für diesen Punkt müsste dann nach (4.2)

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 - \beta u^* \ge 0$$

gelten, wobei sich unter den Nachbarpunkten auch Randpunkte befinden können. Daraus ergäbe sich für einen beliebigen der vier Nachbarpunkte, etwa fül u_1 wegen (2.4), (2.5), (2.6)

$$\alpha_1 u_1 \ge (\beta - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) u^* = (\beta - 4 + \alpha_1) u^*$$

oder

$$u_1 \ge \left(1 + \frac{\beta - 4}{\alpha_1}\right) u^* \ge u^* . \tag{4.4}$$

Sollte im betrachteten Punkt $\beta > 4$ sein, so könnte (4.4) nur mit dem Grössen zeichen bestehen. Damit hätten wir aber wegen der Maximumeigenschaft von u^* bereits einen Widerspruch. Für $\beta = 4$ würde man $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_3$

halten. Man könnte dann den gleichen Schluss, der zu (4.4) geführt hat, mit en im Innern von G' liegenden Nachbarpunkten fortsetzen. Da G' zusammeningend ist, so werden davon alle Gitterpunkte erfasst. Einem Widerspruch önnten wir vorerst nur in dem Sonderfall entgehen, wo β überall gleich 4 ist. ierbei hätte u(x, y) im Innern und am Rande den konstanten Wert u^* .

Aus dem Gesagten dürfen wir schliessen, dass der maximale Wert u^* in enigstens einem Punkt des Randes angenommen würde. Ein solcher Punkt ann nicht zu C_2' gehören. Denn dort müsste, wegen $K=0, H>0, F\geq 0$ und . 1), $U\leq 0$ sein. Es würde sich also um einen Punkt von C_1' handeln. Daher äre K=1, und man könnte (4. 1) die Ungleichung

$$u \ge H u^* \tag{4.5}$$

etnehmen, wo u wegen (3.2) im allgemeinen einen Mittelwert zweier Funktonswerte u' und u' bezeichnet. Nun ist wegen (3.8) $H \ge 1$, weshalb (4.5) allen Fällen zum Widerspruch führt, wo nicht gerade H=1 und $=u'-u''=u^*$ ist. In diesem Sonderfall aber gäbe es einen inneren Punkt it dem maximalen Funktionswert u^* , so dass nach den aus (4.4) gezogenen onsequenzen überall $\beta-4$ und $u(x,y)-u^*$ gelten müsste. Daher wäre C_2' ne Nullmenge. Nach (3.9) gäbe es dann wenigstens einen Randpunkt mit >1. Doch wäre auch für einen solchen Punkt der Widerspruch in der Uneichung (4.5) offenkundig.

5. Hilfssatz 2. Verschwinden alle Werte von γ in G' und alle Werte von F if G', ist also das Gleichungssystem (4.1) homogen, so besitzt es nur die triviale isung u(x, y) = 0.

Beweis. u(x, y) = 0 ist sicher eine Lösung des homogenen Gleichungsstems. Gäbe es noch eine von ihr verschiedene Lösung $u^*(x, y)$, so müsste gen Hilfssatz 1 $u^*(x, y) \le 0$ sein. Da aber mit $u^*(x, y)$ auch $u^*(x, y)$ eine sung wäre, so müsste $u^*(x, y) \ge 0$ zugleich mit $u^*(x, y) \le 0$ gelten, was $\equiv 0$ zur Folge hätte.

Hilfssatz 3. Das Gleichungssystem (4.1) besitzt stets eine eindeutig bewimte Lösung.

Beweis. Aus dem Hilfssatz 2 folgt, dass die Determinante des Systems (4. 1) in Null verschieden sein muss. Dies ist aber eine hinreichende Bedingung für Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung.

Hilfssatz 4. Es seien u(x, y) und w(x, y) zwei Gitterfunktionen in G', für sche

$$l(w) \le l(u)$$
, $L(W) \le L(U)$ (5.1)

rausgesetzt ist. Dann gilt im Innern und auf dem Rand von G'

$$w \ge u$$
. (5.2)

Beweis. Man führe die Gitterfunktion z = u - w ein. Aus (5. 1) folg $l(z) \ge 0$, $L(Z) \ge 0$, so dass z die Bedingungen (4. 2) des Hilfssatzes 1 erfüllt Somit ist $z \le 0$, $w \ge u$, q. e. d.

Hilfssatz 5. Es seien u(x, y) und w(x, y) zwei Gitterfunktionen in G', welck die Bedingungen

$$l(w) \le - |l(u)|, \quad L(W) \le - |L(U)| \tag{5.3}$$

erfüllen. Dann gilt im Innern und auf dem Rande von G'

$$w \ge |u|. \tag{5.4}$$

Beweis. Dem Hilfssatz 4 entnimmt man, dass bei Verkleinerung von l(u) und von L(U) die Gitterfunktion u(x,y) wächst. Nun folgt aus (5.3) $l(w) \leq l(w)$ $L(W) \leq L(U)$ und damit $w \geq u$. Anderseits ergibt sich aus (5.3) durch Zeichenumkehr $l(-w) \geq |l(u)|$, $L(-W) \geq |L(U)|$ und daher $l(-w) \geq l(u)$, $L(-W) \geq L(U)$, was mit Hilfssatz 4 zu $-w \leq u$ oder zu $w \geq -u$ führt Die Ergebnisse $w \geq u$ und $w \geq -u$ sind in der Ungleichung (5.4) zusammen gefasst.

- 6. Für spätere Konvergenzbetrachtungen führen wir im Gittergebiet q spezielle Gitterfunktionen $g_{\nu}(x, y)$ ein. G' besitze n Randpunkte, die wir irgendeiner Reihenfolge mit $Q_{\nu}(\nu 1, 2, ..., n)$ bezeichnen. Dann werde $g_{\nu}(x, y)$ folgendermassen definiert:
 - a) Es sei ν eine der Zahlen 1, 2, ..., n. Dann nehme $g_{\nu}(x, y)$ in Q_{ν} den Wert in allen übrigen Randpunkten den Wert Null an.
 - b) $g_{\nu}(x, y)$ genüge in jedem innern Punkt von G' der Differenzengleichung l(u) = 0 mit der in (2, 4), (2, 5) und (2, 6) gemachten Annahmen übst die Koeffizienten.

Wegen a genügt $g_{\nu}(x, y)$ einer (inhomogenen) Randbedingung erster Ar Daher ist $g_{\nu}(x, y)$ nach Hilfssatz 3 eine eindeutig bestimmte Gitterfunktion. Die obige Definition erinnert an diejenige einer Greenschen Funktion. Wit wollen deshalb die Werte von $g_{\nu}(x, y)$, $(\nu = 1, 2, ..., n)$, die Greenschen Zahlie des Gittergebietes G' nennen¹).

Für alle Punkte im Innern von G' leiten wir die Ungleichung

$$0 < g_{\nu}(x, y) < 1$$
 (6.

her. Zu diesem Zweck greifen wir einen beliebigen innern Punkt P_0 heraus. Daubesagt die Gleichung l(u) = 0, der $g_{\nu}(x, y) = g_{\nu}(P)$ definitionsgemäss genüßt, nach einfacher Umformung:

¹⁾ Für den Spezialfall der Potentialgleichung wurden «Greensche Zahlen» schon mehrfach (geführt. H. Liebmann [11] und D. Moskovitz [13] geben ihre Werte für einfache quadratische (rechteckige Bereiche an. F. Wolf [24] spricht von «Gewichten» und verwendet sie für seinen Kit vergenzbeweis des Liebmannschen Verfahrens.

$$g_{\nu}(P_0) = \frac{4}{\beta} \cdot \frac{\alpha_1 g_{\nu}(P_1) + \alpha_2 g_{\nu}(P_2) + \alpha_3 g_{\nu}(P_3) + \alpha_4 g_{\nu}(P_4)}{4}. \tag{6.2}$$

a die vier Koeffizienten \mathfrak{x} nach (2,6) und (2,4) als positive Zahlen mit der imme 4 vorausgesetzt sind, so bedeutet der zweite Faktor rechts in (6,2) ein ithmetisches Mittel mit den Gewichten \mathfrak{x} . Diese Grösse liegt daher im Innern s von den Zahlen $\mathfrak{x}_i(P_1), \ldots, \mathfrak{x}_r(P_4)$ gebildeten Intervalls. Da ferner $\mathfrak{x}_r(x,y)$ ch Definition am Rande nur der Werte 0 und 1 fähig ist, so liegen sämtliche ittelwerte im Innern des Intervalls (0,1). An dieser Eigenschaft ändert der dere Faktor $4/\beta$ wegen (2,5) nichts, womit (6,1) bewiesen ist.

Wir betrachten jetzt alle Gitterfunktionen $g_{\nu}(x, y)$ ($\nu = 1, 2, ..., n$). Ihremme

$$G(x, y) = \sum_{\nu=1}^{n} g_{\nu}(x, y)$$
 (6.3)

eine Gitterfunktion, welche wiederum die homogene Gleichung l(u) = 0 bedigt. In jedem Randpunkt Q_i nimmt G(x, y) den Wert 1 an. Denken wir s in (6.2) $g_v(x, y)$ durch G(x, y) ersetzt, so folgt analog für jeden innernankt von G'

$$0 < G(x, y) \le 1. (6.4)$$

Im Spezialfall, wo in (1.1) der Koeffizient c verschwindet, wo also wegen 2) und (2.3) $\beta = 4$ ist, haben wir sogar $G(x, y) \equiv 1$.

7. Mit dem Gewonnenen sind wir imstande, zwei Hilfssätze herzuleiten, von nen wir in Abschnitt 18 Gebrauch machen werden.

Hilfssatz 6. Es sei u(x, y) = u(P) eine in G' definierte Gitterfunktion, che in den Randpunkten $Q_v(v-1, 2, ..., n)$, die vorgegebenen Werte U_v anut und welche im Innern der homogenen Differenzengleichung l(u)=0 genügt. Inn gilt

$$u(P) = \sum_{\nu=1}^{n} g_{\nu}(P) U_{\nu}. \tag{7.1}$$

Beweis. Nach Hilfssatz 3 existiert nur eine Gitterfunktion u(P), welche chzeitig l(u) = 0 befriedigt und am Rande die Werte U_r annimmt. Nun illt aber die Summe rechter Hand in (7,1) diese beiden Bedingungen und iss daher mit u(P) identisch sein, womit (7,1) bewiesen ist.

In Abschnitt 3 wurde jedem Randpunkt Q von G' ein gewisser Punkt S zurchnet, der nicht notwendig ein Gitterpunkt ist, der aber doch auf einer werseite liegt. Wir erweitern nun den Definitionsbereich von $g_{\nu}(P)$, indem wanalog wie in (3. 2) festsetzen:

$$g_{\nu}(S) = \lambda_1 g_{\nu}(P') + \lambda_2 g_{\nu}(P'')$$
 (7.2)

7.1) gilt offenbar auch dann noch, wenn man P durch S ersetzt.

Hilfssatz 7. Gegeben seien n Zahlen η_v mit $0 \le \eta_v \le 1$ ($\eta_v \ne 1$). Q bezeichm einen beliebigen Randpunkt von G' und S den zugeordneten inneren Punkt. Dan existiert eine von der Wahl von Q unabhängige Zahl Θ mit

$$0 \le \Theta < 1 \tag{7.3}$$

derart, dass

$$\sum_{r=1}^{n} \eta_r \, g_r(S) \le \Theta \tag{7.}$$

gilt.

Beweis. Wenigstens ein η_r ist nach Annahme kleiner als 1. Es sei dies etwa η_r Aus (6.4) und (6.1) folgt dann für einen beliebigen Gitterpunkt im Inner von G'

$$\sum_{\nu=1}^{n} \eta_{\nu} g_{\nu}(P) \leq \eta_{1} g_{1}(P) + g_{2}(P) + \dots + g_{n}(P) = G(P) + g_{1}(P) (\eta_{1} - 1)$$

$$\leq 1 - (1 - \eta_{1}) g_{1}(P) < 1.$$

Im Falle, wo P ein Randpunkt von G' ist, können wir dieselbe Abschätzundurchführen. Nur muss in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen zu gelassen werden, da ja $g_1(P)=0$ sein könnte. Wenden wir die Ungleichung au P' und P'' an und beachten, dass nach Abschnitt 3 wenigstens einer von ihme ein innerer Gitterpunkt ist, so folgt aus (7.2) wegen $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

sofort $\sum_{\nu=1}^{n} \eta_{\nu} g_{\nu}(S) \leq 1$. Da nur endlich viele Randpunkte Q mit je einem zugordneten Punkt S vorhanden sind, so existiert die im Hilfssatz 7 angegeber Schranke $\Theta \leq 1$.

8. In diesem Abschnitt rechtfertigen wir die Voraussetzung, wonach dRandkurve C von Ecken (und Spitzen) frei sein soll.

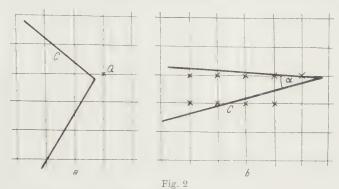
Die Schwierigkeiten, welche Ecken bieten, rühren nicht von der Randlldingung (1.2) her. Denn um eine samt ihren partiellen Ableitungen stetis Lösung v(x, y) zu ermöglichen, genügt es, den Koeffizienten k(s) und h(s) allfälligen Eckpunkten passende Unstetigkeiten beizulegen.

Auch wird der Rechner vor solchen Singularitäten der Randkurve kauzurückschrecken. Es wird ihm ohne Mühe gelingen, geeignete Gitterrandpunktund brauchbaren Ersatz für dahinfallende Randbedingungen in der Nähe von Ecken zu finden.

Vielmehr sehen wir uns deshalb gezwungen, Ecken in der Randkurve auszuschliessen, weil unsere Untersuchung der Approximation einer Gitterlösung die exakte Lösung vor noch nicht überwundene Schwierigkeiten gestellt würden zwei Beispielen der Figur 2 weisen wir auf die Besonderheiten hin, die Ecken vorliegen können:

In Figur 2a können wir vom Gitterrandpunkt Q kein Lot auf die Randkunfällen und daher eine Randbedingung zweiter oder dritter Art nicht approxi

eren. In Figur 2b ist eine Ecke mit kleinem Winkel α gezeichnet. Hier äufen» sich die Gitterrandpunkte derart stark, dass nicht einzusehen ist, wie erforderlichen Differenzengleichungen aufgestellt werden könnten.



Die Schwierigkeiten der Approximation, wenn die Randkurve C Ecken besitzt.

Während wir uns bei stetiger Tangente die eindeutige Zuordnung der Gitrandpunkte zu den Punkten von C dadurch sichern konnten, dass wir die terseite h hinreichend klein voraussetzten, versagt dieser Weg bei Ecken Ikommen. Denn wie fein wir auch ein Gitter wählen, so werden bei Ecken nerlei Erleichterungen eintreten.

Nur im Falle eines *Stufenrandes*, wo die Randkurve *C* stückweise parallel den Gitterseiten verläuft, bilden Eckpunkte für unsere Betrachtungen kein idernis.

§ 2. Der beim Übergang zu den Differenzengleichungen begangene Fehler

9. Bei der im folgenden durchzuführenden Fehlerabschätzung wird es sich im handeln, den Unterschied der Lösung v(x, y) der Differentialgleichung it) mit der Randbedingung (1. 2) gegenüber der Lösung u(x, y) des zugeorden Systems der Differenzengleichungen (4. 1) zu bestimmen. Für diese gerenz setzen wir

$$\delta(x, y) = v(x, y) - u(x, y). \tag{9.1}$$

y) kann natürlich nur in den Gitterpunkten von G' gebildet werden. Es su erwarten, dass sich $\delta(x, y)$ beim Übergang zu einem feineren Gitter vertert. Es wird unser wichtigstes Anliegen sein, zu prüfen, wie $|\delta(x, y)|$ von sach Null strebenden Gitterseite h abhängt.

Vorerst bestimmen wir die Restglieder, welche beim Übergang von der Difntialgleichung zu den Differenzengleichungen auftreten. Zu diesem Zweck sei w(x, y) eine beliebige Funktion, die in G samt ihren partiellen Ableitungerbis zur vierten Ordnung stetig ist. Wie in Figur 1 greifen wir einen inner Punkt P_0 und seine vier Nachbarpunkte im Gitter heraus und bezeichnen de Werte von w(x, y) und der Ableitungen in P_0 kurz mit w, $\partial w/\partial x$, ..., die Werte von w(x, y) in den Nachbarpunkten aber mit w_1, \ldots, w_4 . Dann haben wir

$$\begin{vmatrix}
w_1 \\
w_3
\end{vmatrix} = w \pm h \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\
\Psi_3 \\
\psi_4
\end{Bmatrix} = w \pm h \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \pm \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h^4}{4!} \begin{Bmatrix} \Psi_2 \\
\Psi_4
\end{Bmatrix} \qquad (9.$$

wo Ψ_1 , Ψ_3 und Ψ_2 , Ψ_1 gewisse mit P_0 variable Zwischenwerte der vierten partiellen Ableitung von w(x, y) nach x bzw. nach y bezeichnen. Bricht man (9, 2) schon bei Gliedern dritter Ordnung ab, so wollen wir die entsprechende Zwischenwerte der partiellen Ableitungen dritter Ordnung mit Φ_1 , Φ_3 bzymit Φ_2 , Φ_4 bezeichnen.

Durch passende Kombination der Relationen (9. 2) folgt

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 4 w) - \frac{h^2}{24} (\Psi_1 + \dots + \Psi_4)$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_1 - w_3}{2 \; h} \; - \; \frac{h^2}{12} \; (\varPhi_1 + \varPhi_3) \; , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_2 - w_4}{2 \; h} \; - \; \frac{h^2}{12} \; (\varPhi_2 + \varPhi_4) \; . \label{eq:delta_x}$$

Führen wir noch zur Abkürzung für den Differentialausdruck in (1. 1) abbezeichnung

$$\bar{l}(w) \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y} + c w \tag{9}$$

ein, so folgt

$$l(w) = \frac{1}{h^2} l(w) - \frac{h^2}{12} \left[\frac{1}{2} (\Psi_1 + \dots + \Psi_4) + a (\Phi_1 + \Phi_3) + b (\Phi_2 + \Phi_4) \right], (9.1)$$

wo l(w) den in (4. 1) definierten linearen Ausdruck bezeichnet. Das Restgliohne den Faktor h^2 bezeichnen wir mit

$$R_w = -\frac{1}{12} \left[\frac{1}{2} (\mathcal{Y}_1 + \dots + \mathcal{Y}_4) + a (\mathcal{\Phi}_1 + \mathcal{\Phi}_3) + b (\mathcal{\Phi}_2 + \mathcal{\Phi}_4) \right]. \tag{9}$$

 R_w ist ein lineares Funktional von w(x, y). Nunmehr kann (9.4) in der Gestel

$$h^2 \, \overline{l}(w) = l(w) + h^4 \, R_w \tag{91}$$

geschrieben werden¹).

¹) Mit anderen Bezeichnungen hat S. Gerschgorin [10], S. 375, die Relation (9. 6) zusam mit dem Restglied angegeben.

Wenden wir (9.6) auf die Lösung v(x, y) von (1.1) an, was wegen der in oschnitt 1 gemachten Annahmen zulässig ist, so folgt

$$h^2 g = l(v) - h^4 R_v$$

er nach Subtraktion der für u(x, y) gültigen Relation (4. 1) bzw. (2. 2) wegen (1)

$$l(\delta) = l(v - u) = -h^4 R_v. {(9.7)}$$

ese Relation gilt für jeden innern Gitterpunkt von G'. Der Faktor R_v ist von Γ r Gitterseite h indirekt abhäugig. Da aber alle in R_v eingehenden Koeffiziennund Ableitungen beschränkt sind, so existiert eine von h unabhängige, posize Schranke R_v^* , so dass

$$l(\delta) \mid \leq h^4 R_v^* \tag{9.8}$$

setzt werden darf.

10. Etwas mehr Mühe bereitet die Diskussion der Fehler, die durch Appromation des Randes C durch den Streckenzug C' zustande kommen. In Figur 3, diche einen kleinen Ausschnitt von Figur 1 wiedergibt, betrachten wir einen liebigen Gitterrandpunkt Q auf C'. Die durch Q laufende Normale von C lnet Q einen Punkt Q auf C zu sowie auch einen Punkt S auf der nächsten

n der Normalen geschnittenen tterseite im Innern von G'. Wie Abschnitt 3 seien die Endpunkte ser Gitterseite mit P' und P'' bechnet. Setzen wir $Q\bar{Q} = \varrho h$, so gilt gen der in Abschnitt 2 dargelegten nstruktion von C'

$$-\frac{1}{2} \le \varrho \le \frac{1}{2}, \qquad (10.1)$$

bei ϱ positiv zu nehmen ist, wenn ennerhalb von C liegt, und negativ tumgekehrten Fall. Über $QS = \sigma h$ it bereits die Ungleichung (3. 1) Γ . Ferner wird mit (3. 2) das Teilhältnis des Punktes S auf P'P''sigelegt, so dass $P'S = \lambda_2 h$ und $\Gamma = \lambda_1 h$ zu setzen ist.

Es sei w(x, y) wie in Abschnitt 9

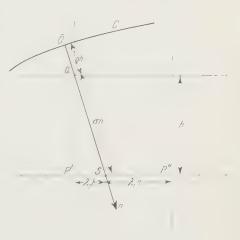


Fig. 3 Approximation der Normalableitung.

I stetige Funktion in G, deren Ableitungen passenden Beschränkungen verworfen sind. Die Werte, welche w(x, y) in den Punkten Q, Q und S mmt, seien der Reihe nach mit W, W und \overline{w} bezeichnet. Um mit w(x, y) is dem Gitterrand C' die in (4.1) vorkommende Linearform

$$L(W) = K w - H W \tag{10.2}$$

bilden zu können, haben wir zunächst zu beachten, dass w nicht mit \overline{w} über einstimmt, trotzdem sich beide Werte auf den Punkt S beziehen. Denn w mus nach Vereinbarung von Abschnitt 3 durch lineare Interpolation aus w(P') urc w(P'') bestimmt werden. Die Differenz $\overline{w} - w$ ist folglich der Interpolation fehler, der im Falle, dass P'P'' parallel zur x-Achse verläuft, lautet

$$\overline{w} - w = \frac{(x_S - x_{P'}) (x_S - x_{P''})}{2!} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=\xi}.$$

Berücksichtigen wir auch eine Interpolation in der y-Richtung, so folgt allgeme:

$$\overline{w} - w = h^2 \int_w , \qquad (10.$$

wo J_w eine variable Grösse ist, für die

$$|J_w| \le \frac{1}{8} \operatorname{Max} \left(\left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right| \right)$$
 (10.)

gilt. Diese obere, von h unabhängige Schranke sei mit J_w^* bezeichnet.

11. Um die in (1. 2) vorkommende Linearform

$$\overline{L}(\overline{W}) \equiv k(s) \frac{\partial \overline{W}}{\partial n} - h(s) \overline{W} , \qquad (11.)$$

die jetzt für den Randwert W im Punkte Q geschrieben ist, mit L(W) in Bezzhung bringen zu können, drücken wir W und \overline{w} mit einer Taylor-Entwicklung durch die Werte und Ableitungen am Rande aus:

$$W = \overline{W} + \varrho h \frac{\partial \overline{W}}{\partial n} + \frac{(\varrho h)^2}{2!} \chi_1 = \overline{W} + \varrho h \chi_3, \qquad (11.1)$$

$$\overline{w} = \overline{W} + \tau h \frac{\partial \overline{W}}{\partial n} + \frac{(\tau h)^2}{2!} \chi_2, \qquad (11.5)$$

WO

$$\tau = \varrho + \sigma$$

gesetzt ist und wo χ_1 , χ_2 gewisse Mittelwerte der Normalableitung zweiter Oil nung und χ_3 einen Mittelwert erster Ordnung bezeichnen.

Für Punkte auf C'_1 gewinnen wir wegen k(s) = 1 zunächst aus (10. ... (10. 3), (11. 2) und (11. 3)

$$L(W) = (1 - H) \overline{W} + (\tau h - H \varrho h) \frac{\partial \overline{W}}{\partial n} + h^2 \left[\frac{\tau^2}{2} \chi_2 - H \frac{\varrho^2}{2} \chi_1 - J_w \right].$$

Hierin ersetzen wir H durch den in (3.8) stehenden Ausdruck und $\partial \overline{W}^{ih}$ gemäss (11.1) durch L(W) + h(s) W. Ferner führen wir zur Abkürzung H

telle der eckigen Klammer die Grösse T_w ein. Dann folgt wegen $au=arrho+\sigma$

$$L(W) = \sigma h L(\overline{W}) - h^2 \left[\varrho \sigma h(s) L(\overline{W}) + \varrho \sigma h^2(s) \overline{W} - T_w \right] \text{ auf } C_1'. \quad (11.4)$$

Auf C_2' aber schliessen wir aus (10. 2) und (11. 2) wegen K=0 und $H=\sigma h$

$$L(W) = -\sigma h W = -\sigma h W - \varrho \sigma h^2 \chi_3$$

nd, wenn wir noch (11. 1) mit k(s) = 0, h(s) = 1 beiziehen,

$$L(W) = \sigma h L(\overline{W}) - \varrho \sigma h^2 \chi_3 \quad \text{auf } C_2'.$$
 (11.5)

Damit ist in beiden Fällen L(W) durch $L(\overline{W})$ ausgedrückt.

12. Wenden wir (11.4) und (11.5) auf die spezielle Funktion v(x, y) an, relche die Lösung der Gleichung (1.1) mit den Randbedingungen (1.2) beeichnet, so erhalten wir

$$L(V) = \sigma \, h \, f(s) \, - \, h^2 \left[\varrho \, \sigma \, h(s) \, f(s) \, + \, \varrho \, \sigma \, h^2(s) \, \, V \, - \, T_v \right] \quad \text{auf} \, \, C_1',$$

$$L(V) = \sigma h f(s) - h^2 \varrho \sigma \chi_3 \qquad \text{auf } C_2'.$$

ubtrahieren wir davon die in (3.5) für u(x, y) hergeleitete Randbedingung $(U) = F = \sigma h f(s)$, so erhalten wir wegen (9.1)

$$L(\delta) = -h^2 \left[\varrho \, \sigma \, h(s) \, f(s) + \varrho \, \sigma \, h^2(s) \, V - T_v \right] \text{ auf } C_1',$$
 (12. 1)

$$L(\delta) = -h^2 \varrho \sigma \chi_3 \qquad \text{auf } C_2'. \tag{12. 2}$$

ir die absoluten Beträge der mit h^2 multiplizierten Ausdrücke existiert, ähnh wie in (9, 8), eine von h unabhängige, gemeinsame obere Schranke S_{ε}^* , so

$$|L(\delta)| \le h^2 S_v^* \quad \text{auf } C' \tag{12.3}$$

reiben dürfen.

ss wir

13. Nach diesen Vorbereitungen gelingt es uns nun, das von S. Gerschern [10] für den Spezialfall der Randbedingungen erster Art geschaffene ajorantencerjahren auf Probleme mit anderen Randbedingungen zu verallimeinern.

Über die Fehlerfunktion $\delta(x, y)$, die in (9, 1) definiert wurde, haben wir bis zt die Ungleichungen (9, 8) und (12, 3) hergeleitet. Um von hier aus zu einer schätzung von ${}_{\parallel}\delta(x, y)$ zu gelangen, führen wir die Hilfsfunktion z(x, y) Lösung des folgenden Randwertproblems ein:

$$\bar{l}(z) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z = -1 \text{ in } G,$$

$$\hat{L}(z) \equiv k(s) \frac{\partial z}{\partial n} - h(s) z = -1 \text{ auf } C.$$
(13. 1)

Nach den in Abschnitt 1 getroffenen Voraussetzungen existiert eine eindeutil bestimmte Lösung $z_{i,V}$, w., die samt ihren partiellen Ableitungen bis zur vierter Ordnung in G stetig ist¹).

Wir versuchen nun, $\delta(x, y)$ durch eine von z(x, y) abgeleitete Hilfsfunktion

$$w(x, y) = m z(x, y) \tag{13.2}$$

nach oben abzuschätzen. Hierin bezeichnet m einen passend zu bestimmender von x, y unabhängigen, positiven Parameter. Wir stützen uns dabei auf de Hilfssatz 5, wonach

$$|\delta(x, y)| \le w(x, y) \tag{13.}$$

bereits aus den Ungleichungen

$$l(w) \leq -|l(\delta)|$$
 im Innern von G' , (13.

$$L(W) \le -|L(\delta)|$$
 auf C' (13...

folgt. Es wird also unsere Aufgabe sein, durch passende Wahl von m die Usgleichungen (13. 4) und (13. 5) zu erzwingen.

Um (13. 4) zu erfüllen, greifen wir auf die Formel (9. 6) zurück, welche auf die in (13. 2) definierte Funktion x(x,y) wegen der z(x,y) und ihren partielle Ableitungen zukommenden Stetigkeitseigenschaften anwendbar ist. Wir eihalten

$$l(w) = h^2 l(w) - h^4 R_w = m h^2 l(z) - m h^4 R_z$$

oder wegen (13. 1)

$$l(w) = - m h^2 (1 + h^2 R_z) .$$

Nun sei R_z^* eine obere Schranke für $|R_z|$ im Gebiet G und h bereits klein angenommen, dass

$$h^2 R_1^* \sim \frac{1}{2}$$

ist. Dann folgt

$$l(w) \le -\frac{1}{2} m h^2. \tag{13.}$$

Um also (13. 4) zu erhalten, genügt es, wegen (9. 8)

$$-\frac{1}{2} m h^2 \leq -h^4 R_v^*$$

oder

$$m \ge 2 h^2 R_v^* \tag{13.}$$

zu setzen.

¹⁾ In der Definition von z weichen wir von S. Gerschgorin ab, indem wir die Randbeding inhomogen ansetzen. Dadurch ersparen wir uns eine mühsame und unübersichtliche Abschätzung in (13. 2) eingeführten Faktors m.

14. Zur Herleitung von (13. 5) benützen wir (11. 4), (11. 5), (13. 1) und erlten

$$\begin{split} L(W) &= -m\,h\,\sigma\left\{\,1-h\,\left|\,\varrho\,h(s)-\varrho\,\,h^2(s)\,\bar{Z}\,+\,\frac{1}{\sigma}\,\,T_z\right]\right\} &\text{auf }C_1',\\ L(W) &= -m\,h\,\sigma\big\{\,1+h\,\,\varrho\,\,\chi_3(z)\,\big\} &\text{auf }C_2'. \end{split}$$

h sei bereits so klein gewahlt, dass die absoluten Beträge der belden gehweitten Klammern überall auf C_1' bzw. C_2' mindestens den Wert 1 2 betzen. Dann folgt wegen $\sigma \geq 1$ in beiden Fällen gemeinsam

$$L(W) \leq -\frac{1}{2} m h$$
.

amit (13. 5) erfüllt ist, haben wir wegen (12. 3) bloss

$$-\frac{1}{2} m h \leq -h^2 S_v^*$$

ı setzen.

$$m \ge 2 h S_v^* \tag{14. 1}$$

Mit (13. 7) zusammen müssen wir somit

$$m \ge h \operatorname{Max} (2 h R_v^*, 2 S_v^*)$$
 (14. 2)

rdern. Für hinreichend kleines h existiert somit eine von h unabhängige, posive Konstante M, so dass zur Erfüllung von (13.4), (13.5) und damit von 3.3)

$$m = h M \tag{14.3}$$

setzt werden darf.

Führen wir noch zur Abkürzung die von der Feinheit des Gitters unabhänge Funktion t(x, y) = M z(x, y) ein, so können wir das in (13. 3) erhaltene gebnis in dem folgenden Satz formulieren:

Satz 1. Lost man an Stelle der zezeh nin Dijferentialzleichung (1.1) mit den undbedingungen 1.2, das System der Dijferenzenzleichungen (4.1) für ein adratisches Gitter mit der Seite hauf, so gilt für den Unterschied $\delta(x, y)$ der den Lösungen in den Gitterpunkten die Ungleichung

$$|\delta(x, y)| \le h t(x, y), \qquad (14.4)$$

t(x, y) eine nur com zestellten Problem abhängige, in G stetige Funktion eutet.

Geht man demnach zu immer feinern Gittern über, so streht der Fehler der A. A. A. Gedestens linear mit h gezen Null, und die Gitterlösung kom erziert gleichmässig en die exakte Lösung des gestellten Problems.

15. Bei einem praktischen Beispiel wird man selten in der Lage sein, $t(x, \cdot)$ berlässig genug zu bestimmen. Überdies dürfte sich der Aufwand kaum lohnen.

Es ist jedoch nicht unwichtig, zu wissen, von welchen Parametern und Funktionen t(x, y) abhängt, um in Fällen schlechter Konvergenz die besten Massnahmen zur Beschleunigung der numerischen Rechnungen treffen zu können.

Sollte zum Beispiel eine quadratische Konvergenz erwünscht sein, das heisst in (14. 4) der Faktor h^2 an Stelle von h stehen, so ersieht man aus (14. 2), dass S_r^* linear mit h gegen Null streben müsste. Nun ist S_v^* eine gemeinsame obere Schranke für die Beträge der mit h^2 multiplizierten Ausdrücke in (12. 1) und (12. 2). Die erste dieser Relationen steht für eine Randbedingung dritter die zweite für eine solche erster Art. In beiden Fällen müsste man also die Approximation an die exakte Randbedingung (1. 2) verbessern. Dies ist au Kosten einer vermehrten Rechenarbeit ohne weiteres möglich. Für eine Randbedingung erster Art empfiehlt sich die von L. Collatz [1] vorgeschlagene Interpolationsmethode. Um das Ziel auch im Fall einer Randbedingung zweiter oder dritter Art zu erreichen, müsste man den in (3. 3) eingeführten Differen zenquotienten durch einen finiten Ausdruck zweiter Ordnung ersetzen. Geometrisch bedeutet dies: Man müsste die Ableitung am Rande durch eine Drei punkteformel der numerischen Differentiation approximieren¹).

Unser Ergebnis zeigt auch, dass die gelegentlich geäusserte Meinung, man müsse vor allem den Approximationsgrad der Differenzengleichungen (2. 3) im Innern des Gebietes erhöhen, jedenfalls dann nicht zu Recht besteht, wenn ei darum geht, den Abbrechfehler (truncation error) zu vermindern.

§ 3. Das numerische Verfahren zur angenäherten Auflösung des zugeordneten Systems von Differenzengleichungen

16. Das System von Differenzengleichungen (4.1) enthält ebenso viel. Gleichungen, wie das gewählte Gittergebiet G', einschliesslich des Randes C' Punkte besitzt. Diese Zahl ist in praktischen Beispielen ziemlich gross, und e ist daher keine Rede davon, das System algebraisch auflösen zu können. E wird nichts anderes übrigbleiben, als nach einem geeigneten Approximations verfahren zu suchen.

In dem Spezialfall, wo überall auf C' eine Randbedingung erster Art von liegt, fallen die auf den Rand bezüglichen Differenzengleichungen in (4. 1) fort da ja die Randwerte fest sind. Für diese spezielle Aufgabe empfiehlt sich dæ vor einigen Jahren von R. V. SOUTHWELL [21] ersonnene Relaxationsverfahren dessen Überlegenheit über frühere Methoden mehrfach bestätigt wurde, vg: [6], [7], [8], [22], [23]²).

¹⁾ Die von L. Fox [8] vorgeschlagene Dreipunkteformel eignet sich anscheinend nur für eine rechteckigen oder einen Stufenrand.

²) Wir sehen hier und im folgenden von der Verwendung von *Rechenautomaten* ab. Selbstverständlich ergeben sich für das Maschinenrechnen etwas andere Gesichtspunkte. Wir verweise hiezu auf die kürzlich von S. P. Frankel [9] und von E. Stiefel [22] erschienenen Arbeiten.

Zur numerischen Auflösung von (4.1) für den allgemeineren Fall, wo auch im Rande Differenzengleichungen auftreten, liegt es nun nahe, das Relaxaionsverfahren von Southwell in geeigneter Weise zu ergänzen. Dies ist der Grundgedanke unseres Vorgehens in Abschnitt 17.

Das Relaxationsverfahren geht wie jedes Iterationsverfahren von Rohverten war auf v. Julius, welche hier ganz beliebig sein dürfen. Die Differenzen-deichungen (4. 1) sind für die Rohwerte natürlich nicht erfüllt. Wir setzen aber

$$l(w) - \gamma = r \,, \tag{16.1}$$

$$L(W) - F = R. (16.2)$$

= r(x, y) ist eine Gitterfunktion, die für alle Punkte im Innern von G' defidiert ist. R = R(x, y) ist nur für Randpunkte erklärt. Die Zahlen r und R deissen die Residuen von z in den Gitterpunkten. Die Residuen der Funktion u(x, y), welche das Gleichungssystem (4, 1) löst, sind offenbar Null Umgeschrt kann man sich aus dem Wert der Residuen einer Versuchsfunktion v = w(x, y) ein ungefähres Bild von dem «Fehler» w - u machen.

Beim Randwertproblem erster Art können die Residuen R am Rande von orneherein als Null vorausgesetzt werden. Es handelt sich dann darum, die Absolutwerte der Residuen r in allen inneren Punkten schrittweise kleiner und leiner zu machen. Hiefür wurde eine Reihe konvergenzbeschleunigender Aunstgriffe geschaffen, die in der Literatur ausführlich beschrieben sind (vgl. 0), [21], [22], [23]). Die Reduktion der Residuen wird kurzweg Relaxation geannt. Dass dabei w(x, y) gegen u(x, y) konvergiert, ist unter verschiedenen oraussetzungen, bald über die Differentialgleichung, bald über die Reihenolge des Vorgehens, mehrfach bewiesen worden (siehe [3], [4], [11], [12], [15], 8], [22], [23], [24]).

17. Treten nun Randbedingungen zweiter oder dritter Art hinzu, so hat man isser den Residuen r auch die Residuen R in Randpunkten zu reduzieren, ach (4. 1) hängen r und R sowohl von den Funktionswerten w(x, y) in innern unkten als auch von denen in Randpunkten zugleich ab. Man kann somit die esiduen am Rande nicht unabhängig von den Residuen im Innern gegen Null reben lassen.

Es liegt nahe, in der Weise vorzugehen, dass man beim Abändern von x, y) in randnahen Punkten gleichzeitig die Randwerte so mitverändert, dass \cdot 0 erreicht wird. Der Rechner dürfte so am raschesten zum Ziele gelangen. In aber die Konvergenz des Verfahrens leichter beweisen zu können, empfiehlt ih für uns eher ein getrenntes Vorgehen, das sich auf den folgenden beiden

hritten aufbaut:

1. Schritt. Ausgehend von irgendeiner Gitterfunktion w(x, y) in G' bringe in die Residuen (16. 1) in allen inneren Punkten nach dem üblichen Relaxa-

tionsverfahren zum Verschwinden, lasse aber die Randwerte W(x, y) unverändert¹).

2. Schritt. Durch Anpassung der Randwerte W(x, y) mache man die Residuen (16. 2) in allen Randpunkten zu Null.

Beim ersten Schritt werden die Residuen im Innern zwar Null. Am Rande treten aber von Null verschiedene Residuen auf. Das Umgekehrte erfolgt beim zweiten Schritt. Daher hat man die beiden Schritte abwechslungsweise fortzusetzen. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass dieses alternierende Verfahren konvergent ist.

18. Satz 2. Bringt man, ausgehend von einer beliebigen Gitterfunktion w(x, y) abwechslungsweise die Residuen (16. 1) mit Hilfe des Relaxationsverfahrens und die Residuen (16. 2) durch geeignete Abänderung der Randwerte zum Verschwinden, so konvergiert die Gitterfunktion gegen die gesuchte Lösung u(x, y) des Gleichungssystems (4. 1).

Beweis. Beim ersten Schritt gehen beliebig angenommene Rohwerte w(x, y) mit den Randwerten W in eine neue Gitterfunktion $w_1(x, y)$ über, deren Randwerte W_1 mit W übereinstimmen. Nur ist jetzt r = 0 in (16. 1), das heisst es gilt

$$l(w_1) \rightarrow \gamma'$$
.

Für die Residuen am Rande haben wir zu setzen

$$R = L(W_1) - F = K w_1 - H W - F. (18.1)$$

Beim zweiten Schritt bringen wir die Residuen am Rande zum Verschwinden indem wir zu den Randwerten W passende Grössen ΔW addieren. Die so gewonnene neue Gitterfunktion sei mit $\omega_2(x,y)$ bezeichnet. Sie stimmt in allen inneren Punkten mit $w_1(x,y)$ überein, so dass wir

$$0 = L(W_2) - F = K w_2 - H W_2 - F = K w_1 - H (W + \Delta W) - F$$
 (18. 2)

haben. Ein Vergleich mit (18. 1) führt zu

$$R = H \Delta W. (18.3)$$

Für Punkte auf C_2' sind hierin ΔW und R gleich Null zu setzen.

Beim letzten Vorgang sind im Innern neue Residuen entstanden, welche be nochmaliger Anwendung des ersten Schrittes zwar verschwinden, jedoch gewisse Änderungen $\Delta w = \Delta w(x, y)$ an $w_2(x, y)$ in den inneren Gitterpunkten zw. Folge haben. Wir setzen daher

$$w_3(x, y) = w_2(x, y) + \Delta w = w_1(x, y) + \Delta w, \quad W_3 = W_2 = W + \Delta W.$$

¹) Praktisch muss man wegen der beschränkten Anzahl von Dezimalen die Reduktion de Residuen abbrechen, sobald sie, in der Einheit der letzten mitgeführten Dezimalen ausgedrück kleiner als 2 sind und keine Blöcke von vorwiegend positiven oder negativen Residuen vorhande sind. Man vergleiche hiezu die Betrachtungen von E. Stiefel [22].

Die Änderungen 1a lassen sich mit Hilfe der in Abschnitt 6 eingeführten Greenschen Zahlen folgendermassen berechnen:

Da w_1 mit den Randwerten W die Gleichungen $I(w) = \gamma$ erfüllt und dasselbe zuch von w_3 mit den Randwerten $W + \Delta W$ gilt, so muss die Differenz der beiden Gitterfunktionen eine neue Funktion sein, welche der homogenen Gleichung $(w_3 - w_1) = 0$ genügt. Ihre Werte im Innern sind gleich Δw , ihre Werte am Rande gleich ΔW . Bezeichnet man die Gitterpunkte von G mit Q_1, \ldots, Q_n und ordnet ihnen die Randwerte $\Delta W_1, \ldots, \Delta W_n$, zu, so folgt aus Hilfssatz 6 für jeden nern Gitterpunkt P

$$\Delta w(P) = \sum_{\nu=1}^{n} \Delta W_{\nu} g_{\nu}(P) . \qquad (18.4)$$

Schreibt man noch (18.3) mit dem Index u, so geht (18.4) wegen $H_
u>0$ in

$$\Delta w(P) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{R_{\nu}}{H_{\nu}} g_{\nu}(P)$$
 (18.5)

iber, wo für Punkte, die auf C'_2 liegen, $R_r = 0$ zu setzen ist.

Weiter berechnen wir nach Formel (18. 1) die neuen Residuen R', die beim bergang von $a_2 \angle a_2 + 1a = a_3$ am Rande entstehen müssen. Beachten wir, lass w_2 für alle inneren Punkte gleich w_1 und am Rande gleich $W + \Delta W$ ist, o folgt

$$R' = L(W_3) - F = K(w_1 + \Delta w) - H(W + \Delta W) - F$$

der wegen (18.1) und (18.3)

$$R' = K \Delta w . ag{18.6}$$

Für Randpunkte auf C'_2 verschwinden K und R'. Für Randpunkte auf C'_1 ist C=1 und $\exists \omega$ ein Betrag, der nach den Ausführungen von Abschnitt 3 folgenermassen zu berechnen ist: Jedem Randpunkt Q_{μ} von C'_1 ist ein Punkt S_{μ} ugeordnet, der nicht notwendig ein Gitterpunkt zu sein braucht. Entsprehend ist der Faktor $\exists \omega \in S_{\mu}$ in (18.6) nach (3.2) durch lineare Interolation aus den Werten von $\exists w$ in P' und P'' zu bestimmen. Benützen wir 18.5) mit $P=S_{\mu}$ (was nach der dem Hilfssatz 6 folgenden Bemerkung zussig ist), so besagt (18.6) für einen Punkt Q_{μ} von C'_1

$$R'_{\mu} = \Delta w(S_{\mu}) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{R_{\nu}}{H_{\nu}} g_{\nu}(S_{\mu}) . \qquad (18.7)$$

Mit R_k und R'_t bezeichnen wir dasjenige unter den Residuen R_r bzw. R'_μ it maximalem absolutem Betrag. Dann folgt aus (18.7), wegen (3.8) und .1),

$$|R'| \le \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|R_{\nu}|}{H_{\nu}} g_{\nu}(S_{l}) \le |R_{k}| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\delta_{\nu}}{H_{\nu}} g_{\nu}(S_{l}),$$
 (18.8)

wo δ_r gleich 1 oder 0 zu setzen ist, je nachdem ob Q_r zu C_1' oder zu C_2' gehört. Setzen wir noch

$$\frac{\delta_{v}}{H_{v}} = \eta_{v}, \qquad (v = 1, 2, ..., n)$$

ZAMP

so gilt wegen (3. 8) und (3. 9) $0 \le \eta_{\nu} \le 1$ ($\eta_{\nu} = 1$). Daher lässt sich Hilfssatz 7' auf die Summe rechter Hand in (18. 8) anwenden, so dass wir

$$|R'_l| \le \Theta |R_k|$$
, $(\Theta < 1)$ (18.9)

erhalten. Dies bedeutet: Das Maximum des absoluten Betrages der Residuen am Rande ist kleiner geworden. Nach N-maliger Anwendung der beiden Schritte hat es sich mindestens um den Faktor Θ^N verkleinert. Daher streben die Residuen am Rande gegen Null.

Dass gleichzeitig auch die Residuen im Innern gegen Null streben, schliessen wir aus (18. 3). Danach müssen die Änderungen ΔW proportional mit den Residuen am Rande gegen Null konvergieren. Diese ΔW sind es aber, welche gemäss (16. 1) in randnahen inneren Punkten gewisse Residuen erzeugen, die wegen der Beschränkungen, denen die Koeffizienten α_i in (16. 1) unterliegen, ebenfalls eine Nullfolge bilden müssen.

Schliesslich folgt aus der Eindeutigkeit und der Stetigkeit der Lösung vor (4.1), dass die Näherungsfunktion w(x, y) gegen die exakte Lösung u(x, y) konvergiert, womit der Satz 2 bewiesen ist.

- 19. Die im Beweis von Satz 2 gefundenen Relationen gestatten eine Diskussion darüber, mit welcher Geschwindigkeit das Approximationsverfahrer zur numerischen Auflösung des Gleichungssystems (4. 1) konvergiert. Offenbau ist die Geschwindigkeit um so grösser, je kleiner der in (18. 9) stehende Faktor 6 ist. Die Betrachtung von (18. 8) führt zu den folgenden Fällen, in denen Θ verhältnismässig klein ausfällt und in denen folglich die Geschwindigkeit der Konvergenz befriedigend ist:
- a) C_2' enthält einen nicht zu kleinen Anteil an Randpunkten von G', das heisst, es existieren genügend viele Randpunkte mit einer Randbedingung erster Art. Für solche Punkte verschwindet δ_r in (18. 8) und η_r in (7. 4), so dass die Behauptung über Θ unmittelbar folgt.
- b) Die in (6, 3) definierte Summe G(x, y) ist für innere Gitterpunkte wesent; lich kleiner als 1. In diesem Falle folgt die Kleinheit von Θ ohne weiteres aus dem Beweis von Hilfssatz 7. Damit aber G(x, y) hinreichend klein ausfälltt genügt es nach den Betrachtungen in Abschnitt 6, dass die in (2, 3) eingeführte Grösse $\beta 4 ch^2$ merklich grösser als 4 sei. Somit muss der Koeffizient c in der Differentialgleichung (1, 1) wesentlich kleiner als Null vorausgesetzt werden Man erkennt jedoch, dass der Vorteil bei kleiner Gitterseite h verlorengeht.
- c) Der in (3.6) eingeführte Koeffizient H ist in den Punkten von C_1' en heblich grösser als 1. Wegen (3.8) ist $H = 1 + \sigma h h(s)$. In diesem Fall muss also

r Koeffizient h(s) der Randbedingung (1, 2) auf C_1 wesentlich grösser als Null n. Wie bei b fällt aber der Vorteil der raschen Konvergenz dahin, wenn die tterseite h hinreichend klein ist.

Zusammenfassend kann man sagen: Bei grobem Gitter kann die Geschwingkeit der Konvergenz aus mehreren Gründen gut sein. Ist man aber zur Erhöhung Genauigkeit auf ein feineres Gitter angewiesen, so sinkt die Geschwindigkeit Konvergenz mit abnehmender Gitterseite h. Sie bleibt befriedigend, wenn der uteil der Randpunkte mit einer Randbedingung erster Art hinreichend gross ist. Bei einem konkret vorliegenden Beispiel lässt sich allerdings der Konvernzgrad durch geschickte Massnahmen erheblich steigern. Man verbessert im aufe des Verfahrens die Randwerte so, dass die Residuen R_r am Rande nach reduktion der Residuen im Innern nicht einseitig positiv oder negativ auslen. Dann lässt sich die Abschätzung in (18, 8) verschärfen, so dass sich ein einerer Wert für Θ ergibt.

20. Bis jetzt haben wir in § 3 mit einem festen Gitter gearbeitet. Bei einem merischen Beispiel wird man aber die Gitterseite schrittweise verkleinern. Ein obes Gitter mit bloss etwa 30 bis 60 Gitterpunkten dient dazu, dem Rechner die erste Orientierung über den Verlauf der Lösungsfunktion zu geben. Bei rapproximation der Randkurve sind die Regeln von Abschnitt 2 und 3, weit es die beschränkte Punktzahl zulässt, einzuhalten. Zur Erleichterung rud man anfänglich die Gitterfunktion bloss zwei- oder dreistellig wählen. Erseiduen sind zu reduzieren, bis sie nur noch eine oder zwei Einheiten der zten mitgeführten Dezimalen betragen und bis nirgends mehr egefährliche bicke mit vorwiegend positiven oder negativen Residuen vorhanden sind 1). Die Verfeinerung des Gitters wird am besten dadurch vorgenommen, dass en die Gitterseite halbiert. Auf diese Weise kommen zu den alten Gitterakten noch ungefähr dreimal so viele neue hinzu. Die Approximation der ladkurve hat von neuem zu erfolgen, wobei die Regeln von Abschnitt 2 und an allgemeinen leichter eingehalten werden können als beim gröberen Gitter.

Rohwerte für die neue Gitterfunktion benütze man in den alten Gitterbekten die bei der ersten Approximation erhaltenen Werte. In den neuen eren Gitterpunkten aber ermittle man die Rohwerte aus den schon bekannt durch Interpolation oder besser durch geschickte Benützung der Relation $\mathbf{e}_1 = \gamma$. Dann beginnt wieder die Reduktion der Residuen usw.

iBei fortschreitender Verfeinerung des Gitters muss die Rechengenauigkeit ich Hinzunahme weiterer Dezimalstellen erhöht werden, da sonst die Abschugsfehler eine verhängnisvolle Rolle spielen werden. In welchem Ausmass zu geschehen hat, wird in Abschnitt 22 noch untersucht werden.

21. Besonders günstig steht es um die Möglichkeit von Rechenkontrollen. Fürend der Reduktion der Residuen können sich Rechenfehler bei der besichtlichen Zahl der in den Rechenprozess eingehenden Werte verhältnis-

^{&#}x27;) Vgl. Fussnote 1 auf Seite 186.

mässig leicht einstellen. Zum Zweck ihrer Eliminierung berechne man von Zeit zu Zeit die Residuen aus (16.1) und (16.2) neu. Fast unfehlbar wird dabe jedes Versehen entdeckt.

Aus diesem Grunde zeichnet sich das Differenzenverfahren und das daraufussende Relaxationsverfahren vor anderen numerischen Verfahren dadurct aus, dass man im Laufe des Approximationsprozesses immer wieder von vormbeginnt und nicht auf schon erhaltenen, möglicherweise mit Fehlern behatteten Werten endgültig aufbauen muss.

22. Wie schon in Abschnitt 20 angedeutet wurde, spielen die Abrundung fehler eine erhebliche Rolle. Da man nur eine beschränkte Zahl von Dezimastellen mitführen kann, so wird jede Gitterlösung u(x, y) notwendig mit gewissen von Null verschiedenen Residuen (16.1) im Innern und von Residue (16.2) am Rande behaftet sein. Man kann aus deren Kleinheit nicht unmitte bar auf die Güte der Approximation schliessen, wie manche Autoren anzunelmen scheinen. Es können sich vielmehr trotz winziger Residuen unter Umständen Näherungslösungen einstellen, welche von der gesuchten Gitterlösung auffällig verschieden sind. Darauf hat schon F. Wolf [24] in anschaulich Weise aufmerksam gemacht.

Zur Beurteilung der zu erwartenden Fehler gehen wir ähnlich wie S. Gersc Gorin [10] vor. Es mögen im Gittergebiet G'u(x, y) die exakte und u'(x, y) die angenäherte Lösung des Gleichungssystems (4. 1) bezeichnen. Wir habe also unter Benützung der in (16. 1) und (16. 2) eingeführten Residuen

$$l(u) = \gamma$$
, $l(u') = \gamma + r$; $L(U) = F$, $L(U') = F + R$. (22.)

Daraus ergeben sich für die Differenz

$$\delta'(x, y) = u'(x, y) - u(x, y)$$
 (22.

die Relationen

$$l(\delta') = r$$
, $L(\delta') - R$. (22.)

Nun können wir auf δ' die in § 2 für andere Zwecke entwickelten Abschilzungen anwenden. Setzen wir nämlich

$$r^* = \operatorname{Max} | r |$$
, $R^* = \operatorname{Max} | R |$, (22.

so haben wir an Stelle von (9,8) und (12,3) die Ungleichungen $|l(\delta')| \le n$ $|L(\delta')| \le R^*$. Führt man ganz analog wie in (13,1) und (13,2) die Hils funktionen z(x,y) und w(x,y) ein, so gelangt man für eine hinreichend kleiv Gitterseite h zu der (13,3) entsprechenden Abschätzung

$$|\delta'(x, y)| \le m z(x, y). \tag{22}$$

ur hat hier m an Stelle von (14.2) der Ungleichung

$$m = \frac{1}{i \cdot 2} \operatorname{Max} (2 r^*, 2 h R^*)$$
 (22. 6)

genügen, weshalb wir

$$m = \frac{1}{12} r_{M} \tag{22.7}$$

it einer den maximalen Beträgen der Residuen proportionalen, aber von habhängigen Konstanten r_M setzen dürfen. (22. 5) geht damit in

$$\delta'(x, y) \mid \leq \frac{1}{h^2} r_M z(x, y)$$
 (22. 8)

er, wo z(x, y) die Lösung der von h unabhängigen Randwertaufgabe (13. 1) zeichnet.

Man wird in einem Zahlenbeispiel die Ungleichung (22.8) kaum für die oschätzung von $\delta'(x, y)$ heranziehen. Einerseits würde sich die Mühe nicht men. Anderseits wäre r_M zu gross und daher die Schranke (22.8) zu hoch. enn beim Relaxationsverfahren kann man die Approximation trotz benränkter Stellenzahl erheblich weitertreiben, als dies die Abschätzung dieses oschnitts erwarten liesse. Wie schon erwähnt, sorgt man ja dafür, dass die bleibenden minimalen Residuen von verschiedenen Vorzeichen sind, ja dass gends Blöcke mit vorwiegend positiven oder negativen Residuen stehen liben.

Dagegen kann man aus (22.8) den Einfluss der Verfeinerung des Gitters i den zu erwartenden Fehler $\delta'(x, y)$ erkennen. Er ist umgekehrt proportional n Quadrat der Gitterseite. Soll also bei Verfeinerung des Gitters der durch Abdung verursachte Fehler $\delta'(x, y)$ nicht vergrössert werden, so muss man gleichig die Anzahl der Dezimalen, mit denen man die Werte der Gitterfunktion reibt, erhöhen. Insbesondere ist beim Übergang zu einem Gitter mit halber gerseite die relative Genauigkeit der Gitterwerte zu vervierfachen.

Wenn man diese Vorsicht walten lässt, so können die Abrundungsfehler die avergenz bei Verfeinerung des Gitters nicht in Frage stellen. Deshalb dürfen das Differenzenverfahren mit Recht als abrundungsfest¹) bezeichnen.

LITERATURVERZEICHNIS

- L. Collatz, Bemerkungen zur Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren bei partiellen Differentialgleichungen, Z. angew. Math. Mech. 13, 56–57 (1933).
- L. COLLATZ, Über das Differenzenverfahren bei Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen, Z. angew. Math. Mech. 16, 239–247 (1936).
- ') Der Begriff der Abrundungsfestigkeit wurde von A. Ostrowski [14] geschaffen.

- 3] L. COLLATZ, Über die Konvergenzkriterien bei Iterationsverfahren für linear Gleichungssysteme, Math. Z. 53, 149–161 (1950).
- 4 R. COURANT, Über Randwertaufgaben bei partiellen Differenzengleichungen Z. angew. Math. Mech. 6, 322-325 (1926).
- 5 R. COURANT, K. FRIEDRICHS, H. LEWY, Über die partiellen Differenzenglei chungen der mathematischen Physik, Math. Ann. 100, 32-74 (1928).
- 6 H. W. Emmons, The Numerical Solution of Partial Differential Equations, Quart. appl. Math. 2, 173-195 (1944).
- L. Fox, Solution by Relaxation Methods of Plane Potential Problems wit Mixed Boundary Conditions, Quart. appl. Math. 2, 251-257 (1944).
- 87 L. Fox, The Numerical Solution of Elliptic Differential Equations when the Boundary Conditions Involve a Derivative, Philos. Trans. Roy. Soc. London [A 242, 345-378 (1950).
- S. P. Frankel, Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential Equations, MTAC 4, 65-75 (1950).
- 10 S. Gerschgorin, Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösur partieller Differentialgleichungen, Z. angew. Math. Mech. 10, 373-382 (1930)
- 11 H. Liebmann, Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen un konformer Abbildungen, Sitz.-Ber. bayr. Akad. Wiss. München, math.-phy Klasse, 1918, 385-416.
- 12] R. von Mises und H. Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Glechungsauflösung, Z. angew. Math. Mech. 9, 58-77, 152-164 (1929).
- 13 D. Moskovitz, The Numerical Solution of Laplace's and Poisson's Equation Quart. appl. Math. 2, 148-163 (1944).
- 14] A. Ostrowski, Über die Konvergenz und die Abrundungsfestigkeit des Newtonschen Verfahrens, Recueil Math. 2, 1073-1095 (1937).
- 15 H. B. Phillips und N. Wiener, Nets and the Dirichlet problem. J. Mat. Phys. Massachusetts 2, 105–124 (1923).
- 16 L. F. RICHARDSON, The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam, Phil. Trans. Roy. Soc. London [A] 2/3 307-357 (1910).
- 17 C. Runge, Über eine Methode, die partielle Differentialgleichung $\Delta u = constannumerisch zu integrieren, Z. Math. Phys. 56, 225–232 (1908).$
- 18 G. H. SHORTLEY und R. WELLER, The Numerical Solution of Laplace Equation, J. appl. Phys. 9, 334-348 (1938).
- 10] G. SHORTLEY, R. WELLER, P. DARBY und E. H. GAMBLE, Numerical Solution of Axisymmetrical Problems, with Applications to Electrostatics and Torsical J. appl. Phys. 18, 116-129 (1947).
- 20 R. V. SOUTHWELL und G. VAISEY, Relaxation Methods Applied to Engineeril Problems, VIII: Plane-Potential Problems Involving Specified Normal Gradiens Proc. Roy. Soc. London [A] 182, 129–151 (1943).
- 21 R.V. SOUTHWELL, Relaxation Methods in Theoretical Physics (Clarendon Presoxford 1946).
- 22] E. STIEFFL, Uber einige Methoden der Relaxationsrechnung, Z. angew. Maid Phys. 3, 1-33 (1952).
- 23. G. TEMPLE, The General Theory of Relaxation Methods Applied to Linear Stems, Proc. Roy. Soc. London [A], 169, 476-500 (1939).
- 24 F. Wolf, Über die angenäherte numerische Berechnung harmonischer ubiharmonischer Funktionen, Z. angew. Math. Mech. 6, 118-150 (1926).

Summary

Partial differential equations of the elliptic type are practically solved by nite-difference approximation. If the boundary conditions involve derivatives, the approximation by finite differences can be a serious problem. In this paper it is nown how the normal derivative may be approximated for a curved boundary ithout any corner. The finite-difference solutions converge to the exact solution the differential equation while the mesh-side tends to zero. This is proved inder certain conditions. The method used is similar to that given by S. Gersch-Drin. The convergence rate is discussed in detail. The final part of the paper concerned with the relaxation technique. It is proved that the residuals for inner and for boundary points converge to zero. Finally the rounding errors are discussed.

ingegangen: 25, 10, 1951.

Zur numerischen Bestimmung periodischer Lösungen bei nichtlinearen Schwingungen

Von Lothar Collatz, Hannover¹)

1. Die Randwertaufgabe

Bei der Bestimmung periodischer Lösungen bei nichtlinearen Schwingungen gen nichtlineare Randwertaufgaben vor. Man hat für eine oder allgemeiner n unbekannte Funktionen $x_1(t), ..., x_n(t)$ (etwa von einer unabhängigen ränderlichen t a Differentialgleichungen, welche entweder t explizit gar ht enthalten mögen oder, falls t explizit auftritt, in t die Periode T besitzen ogen, und Randbedingungen der Periodizität, etwa für Differentialgleichung zweiter Ordnung, angeschrieben:

$$x_j(t) = x_j(t+T), \quad \dot{x}_j(t) = \dot{x}_j(t+T). \quad (j=1,...,n)$$
 (1)

Periode T des Vorganges wird häufig (zum Beispiel bei erzwungenen inwingungen meistens, bekannt sein, andernfalls ist sie als weitere Unbekannte zuführen (vgl. Nr. 5).

Will man mit einem Näherungsansatz eine angenäherte Lösung ermitteln, erhält man im allgemeinen für die beim Näherungsansatz noch verfügbaren ameter ein System von etwa q nichtlinearen Bestimmungsgleichungen, eses zu lösen, ist meist eine mühsame Aufgabe, besonders bei grösseren erten von q. Daher sind möglichst genaue Verfahren erwünscht, bei denen

¹⁾ Lehrstuhl für höhere Mathematik der Technischen Hochschule.

man schon mit wenigen Parametern und also mit einem nicht zu grossen nicht linearen Gleichungssystem benutzbare Werte erhält. Die folgenden Verfahre wird man jedoch nur anwenden, wenn die in der Differentialgleichung aut tretenden Funktionen und die Lösungsfunktion genügend «glatt» sind um stetige Ableitungen so hoher Ordnung wie die des unterdrückten Restgliedsbesitzen.

2. Kollokation mit Relaxation

Zur Behandlung grösserer nichtlinearer Gleichungssysteme wird man c Iterationsverfahren benutzen; gute Erfolge zeigt dabei das Relaxationsverfahren. Durch einen vorläufigen gröberen Näherungsansatz mit wenigen Parmetern verschafft man sich einen Überblick über die Lösungen und hat dan bei der genaueren Rechnung bereits Ausgangswerte, die man iterativ verbessert. Das Verfahren sei im Zusammenhang mit der Kollokation, einem nahliegenden Näherungsverfahren, hier nochmals kurz beschrieben, da die Relaxition auch noch im nächsten Abschnitt gebraucht wird. Es sei $w_j(t)$ eine Nährungsfunktion für $x_j(t)$. Für w_j macht man zum Beispiel einen Ansatz einendlichen trigonometrischen Polynoms:

$$x_{j}(t) \approx w_{j}(t) = \sum_{\nu=0}^{p} \left(c_{\nu j} \cos \frac{2 \pi \nu}{T} t + s_{\nu j} \sin \frac{2 \pi \nu}{T} t \right) \quad (j = 1, ..., n)$$

(mit $s_{0j} = s_{pj} = 0$); für die 2 n p unbekannten Fourier-Koeffizienten c_{vi} un s_{vi} erhält man 2 n p Bestimmungsgleichungen, indem man verlangt, dass in Differentialgleichungen, wenn man w_i für x_j einsetzt, an 2 p Stellen, in Kollokationsstellen w

$$t=0$$
, $\frac{T}{2p}$, $\frac{2T}{2p}$, ..., $\frac{(2p-1)T}{2p}$,

erfüllt sind.

Beispiel: Es sei die Gleichung

$$\ddot{x} + \dot{x} + (x + x^3) = \cos t$$

(erzwungene Schwingung eines eingliedrigen gedämpften Schwingers mit nich linearer Rückstellkraft) vorgelegt. Der Ansatz [unter Ausnutzung der Schrisymmetrie $x(t+\pi) = -x(t)$]

$$x(t) \approx w(t) = c_1 \cos t + s_1 \sin t$$

führt mit den Kollokationsstellen 0 und $\pi/2$ auf

$$s_1 + c_1^3 = 1$$
, $-c_1 + s_1^3 = 0$

it der Lösung

$$c_1 = 0.560$$
, $s_1 = 0.825$. (5)

ei dem Ansatz mit vier Parametern

$$w(t) = c_1 \cos t + s_1 \sin t + c_3 \cos 3 t + s_3 \sin 3 t$$
 (6)

nd den Kollokationsstellen $t=0,\,\pi/4,\,\pi/2,\,3\,\pi/4$ erhält man das Gleichungsstem

er mit

$$c_{1} + c_{3} = \alpha; \qquad c_{1} + s_{1} - c_{3} + s_{3} = \beta;$$

$$s_{1} - s_{3} = \gamma; \qquad -c_{1} + s_{1} + c_{3} + s_{3} = \delta;$$

$$\alpha^{3} - 1 - 4\alpha + 3\beta - \gamma - \delta = 0,$$

$$\beta^{3} - 2 + 4\alpha - 8\beta + 12\gamma - 2\delta = 0,$$

$$\gamma^{3} + \alpha + \beta - 4\gamma + 3\delta = 0,$$

$$\delta^{3} + 2 - 12\alpha + 2\beta + 4\gamma - 8\delta = 0.$$
(8)

s folgende Schema (Tabelle 1) zeigt die Durchführung der Relaxationshnung. Es wird ausgegangen von den Werten

$$c_1 = 0.55$$
 , $s_1 = 0.8$, $c_3 = 0$, $s_3 = 0$,

nach (5) durch die gröbere Rechnung mit c_1 und s_1 nahegelegt werden; dann einet man jeweils die linken Seiten der Gleichungen (8), die «Funktions» te», aus und stellt fest, wo sie noch am stärksten vom Wert Null abweichen. In werden an den Ausgangswerten c_1 , s_1 , c_3 , s_3 kleine Änderungen (im Schema teklammert angegeben) angebracht und die neuen Funktionswerte und die legten «Änderungen der Funktionswerte» ausgerechnet. Diese Änderungen Funktionswerte erlauben es, die Dosierung der Änderungen der Ausgangstete geeignet vorzunehmen, so dass die Funktionswerte sich dem Wert Null dern. Ein grobes Gesamtmass für die Güte der Näherung ist die im Schema c: Spanne» bezeichnete Summe der Beträge der Funktionswerte.

Tabelle 1

α	β	γ	δ	· α ³	β3	γ^3	δ^3	A^{1})	B^2)
0,55	1,35	0,80	0,25	0,17	2,46	0,51	0,02	-0,20	-1,50
0,55	1,35	(0,05) 0,75	0,25	0,17	2,46	0,42	0,02	-0,15	-2,10
(-0,07) 0,48	1,35	0,75	0,25	0,11	2,46	0,42	0,02	0,13	-2,38
0,42	1,22	0,74	0,30	0,074	1,816	0,405	0,027	-0,06	-1,80
0,408	1,206	0,741	0,314	0,0679	1,7540	0,4069	0,0310	-0,069	-1,752
(-0,0001) 0,4079	1,206	(-0,0001) 0,7409		0,0679	1,7540	0,4067	0,0310	-0,0685	-1,7536
1) A = -	-1 4 0	$\alpha + 3 \beta - \gamma$	$-\delta$. 2) B	2 + 4 α —	· 8 β + 12	$2\gamma - 2\delta$.	1	

Ergebnis:

	Erste	Zweite Näherung	Dritte
	\min_{c_1, s_1}	bis c ₃ , s ₃	bis c_5, s_5
x(0)	0,56	0,408	0,392
$x\left(\frac{\pi}{4}\right)$	0,98	0,853	0,832
$x\left(\frac{\pi}{2}\right)$	0,825	0,741	0,759
$x\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	0,19	0,222	0,221

3. Gewöhnliches und verbessertes Differenzenverfahren

Bei allen Arten von Differenzenverfahren legt man eine Intervallteiler zugrunde, etwa eine Teilung des Periodenintervalls in m gleiche Teile Länge h T/m und stellt Bestimmungsgleichungen für Grössen $x_{j\varrho}$ auf, well Näherungswerte für $x_j(\varrho h)$ (für $\varrho=0,\,1,\,...,\,m-1$) sein sollen. Das gewößliche Differenzenverfahren erscheint für den vorliegenden Zweck wenig genet. Bei ihm werden die Differentialgleichungen für $t-\varrho h$ angeschrieben udabei alle in den Differentialgleichungen vorkommenden Differentialquotiert durch Differenzenquotienten ersetzt. Bei grosser Maschenweite h und geringsteile genetatie gegen der Großen der Großen gegen der Großen gegen gewen gegen geg

Tabelle

C ³)	D^4)	$A \doteq \alpha^3$	Funktio $B + \beta^3$		$D + \delta^3$	d	Änder ler Funkt	0	te	Spanne
0,55	-0,70	[-0,03	0,96	-0,04	-0,68					1.71
-0,35	-0,90	0,02	0,36	0,07	- 0,88	0,05	-0,60	0,11	0,20	1,33
-0,42	-0,06	0,24	0,08	0	- 0,04	0,22	-0,28	-0,07	0,84	0,36
0,42	- (),() ‡	0.014	0.010	0,015	0,013				• • • • • • •	0,058
-0,408	-0,032	-0,0011	0,0020	- 0,0011	-0,0010					0,0052
0,407	7 -0,0312	2 - 0,0006	0,0004 -	- 0,0010	-0,0002	0,0005	-0,0016	0,0001	0,0008	0,0022

3) $C = \alpha + \beta - 4\gamma - 3\delta$. 4) $D = 2 - 12\alpha + 2\beta + 4\gamma - 8\delta$.

nzahl von Unbekannten werden die erhaltenen Näherungen dabei oft viel zu rob (vergleiche das folgende Beispiel), und eine Maschenverfeinerung ist erade bei den nichtlinearen Aufgaben wegen des Anwachsens der Unbekannenzahl ungünstig.

Als eine der verschiedenen möglichen Verbesserungen des Differenzenverihrens wäre das Mehrstellenverfahren¹) zu nennen.

Wir beschränken uns bei der Beschreibung etwa auf eine unabhängige unktion x(t). Man verwendet Ausdrücke der Bauart

$$P = \sum_{\nu : i-p}^{i+p} a_{\nu} x_{(\nu)} + A_{\nu} x_{(\nu)}^{(k)}, \tag{9}$$

obei bei einer fest gewählten k-ten Ableitung die a_v und A_v so bestimmt erden, dass bei Taylor-Entwicklung der Werte $x_{iv} = x(v h)$ und Ableitungen $x_i^{(k)} = x^{(k)}(v h)$ und damit des Ausdrucks P an der Stelle $t_i = i h$ die Ableitungen bis zu möglichst hoher Ordnung den Faktor Null erhalten, das heisst is Restglied von möglichst hoher Ordnung wird. Für die erste und zweite bleitung zum Beispiel kann man so die Ausdrücke aufstellen

$$x_{(i-1)} - x_{(i+1)} + \frac{h}{3} (\dot{x}_{(i-1)} + 4 \dot{x}_{(i)} + \dot{x}_{(i+1)}) = \text{Restglied 5. Ordnung}$$
 (10)

$$\hat{x}_{(i-1)} - 2 x_{(i)} + x_{(i+1)} - h^2 (\ddot{x}_{(i-1)} + 10 \ddot{x}_{(i)} + \ddot{x}_{(i+1)}) = \text{Restglied 6. Ordnung}$$
(11)

¹⁾ Vergleiche zum Beispiel die zusammenfassende Darstellung bei L. Collatz, Numerische vandlung von Differentialgleichungen (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951), S. 116.

Kommen in der Differentialgleichung zum Beispiel die Grössen x, x, x vorso hat man für jede der m Stellen $t-\varrho$ h die Mehrstellengleichungen mit k=1 und 2 (wobei das Restglied durch Null und $x_{(j)}$ und $x_{(j)}^{(k)}$ durch Näherungen x_j , $x_i^{(k)}$ zu ersetzen sind) und die Differentialgleichung anzuschreiben und er hält so 3 m Gleichungen für die 3 m Unbekannten x_j , x_j , x_j . Im folgenden soll eine Modifikation beschrieben werden, nach der man in vielen Fällen unmittell bar auf ein Gleichungssystem von nur m Gleichungen für m Unbekannte geführt wird. Diese Modifikation ist stets durchführbar, wenn die Differentiall gleichung sich auf die Gestalt bringen lässt:

$$L[x] = N[x^{(l)}, t], \tag{12}$$

wobei L[x] ein linearer Differentialausdruck in x und seinen Ableitungen mit konstanten Koeffizienten und N eine beliebige (nichtlineare) Funktion von und einer festen Ableitung $x^{(l)}$ ist. Viele bei nichtlinearen Schwingungsauft gaben auftretende Differentialgleichungen lassen sich auf diese Form bringer Dann verwendet man Ausdrücke der Gestalt

$$P = \sum_{\nu=z-b}^{i+p} \left(a_{\nu} L[x_{(\nu)}] + A_{\nu} x_{(\nu)}^{(l)} \right) \tag{13}$$

und bestimmt wieder die a_r und A_r so, dass bei Taylor-Entwicklung von x_i an der Stelle $t_i \cdots i h$ das Restglied von möglichst hoher Ordnung wird. Be Unterdrückung des Restgliedes und Einsetzen der Differentialgleichung erhält man m Gleichungen für die m Unbekannten $x_0^{(l)}, x_1^{(l)}, \ldots, x_{m-1}^{(l)}$:

$$\sum_{
u=i-p}^{i+p} \left(a_{
u} \, N \left[x_{
u}^{(l)}, \, t
ight] + A_{
u} \, x_{
u}^{(l)}
ight) = 0 \; . \quad (i=0 \; , \, ..., \, m-1) \quad (14)$$

Bei Schwingungsaufgaben werden für L[x] oft Linearkombinationen aus \ddot{x} und \dot{x} oder \ddot{x} und x in Betracht kommen; daher seien hier als vielleicht wicktigste Fälle die beiden Formeln (15) und (18) angegeben, wobei wir i-0 wällen (die Ausrechnung der Taylor-Entwicklungen kann hier unterdrückt weiden):

Für
$$L[x] = \ddot{x} + s \dot{x}$$
 (beliebige Konstante s) gilt mit $s h = \sigma$

$$(72 - 36 \sigma + 3 \sigma^{3}) x_{-1} - 144 x_{0} + (72 + 36 \sigma - 3 \sigma^{3}) x_{1}$$

$$+ h^{2} \{ (-6 + 3 \sigma + \sigma^{2}) L[x]_{-1} + (-60 + 4 \sigma^{2}) L[x]_{0}$$

$$+ (-6 - 3 \sigma + \sigma^{2}) L[x]_{1} \} = \text{Restglied 5. Ordnung.}$$
(1.3)

Diese Formel ist geeignet für Schwinger mit linearer Dämpfung und nichtlinearer Rückstellkraft, also für Differentialgleichungen

$$\ddot{x} + s \dot{x} - f(x) = P(t) .$$

Für $s \to \infty$ und s = 0 sind hier die obigen Formeln (10) und (11) als Spezialille enthalten [allerdings zeigt sich dabei in (11), dass in der Taylor-Entwicking die Glieder 5. Ordnung fortfallen und das Restglied von 6. Ordnung fürd]. Für $\sigma = 2$ ergibt sich die nachher beim Beispiel gebrauchte Formel

$$(x_{-1} - 6 x_0 + 5 x_1) + h^2 \{L[x]_{-1} - 11 L[x]_0 - 2 L[x]_1\} = \text{Restglied 5. Ordnung.}$$
 (16)

 $\ddot{\text{ur}} L[x] = \ddot{x} + s \dot{x}$ lautet eine genauere Formel:

nit den Spezialfällen

$$\begin{split} \pmb{\sigma} &= 0 \colon \quad 3\; (x_{-2} + 16\; x_{-1} - 34\; x_0 + 16\; x_1 + \; x_2) - 4\; h^2 \; (2\; \ddot{x}_{-1} + 11\; \ddot{x}_0 + 2\; \ddot{x}_1) \\ &= \text{Restglied 8. Ordnung ,} \end{split}$$

⇒ ∞:
$$x_{-2} + 28 x_{-1} - 28 x_1 - x_2 + 12 h (\dot{x}_{-1} + 3 \dot{x}_0 + \dot{x}_1)$$

= Restglied 7. Ordnung.

erner sei genannt für $L[x] = \ddot{x} + s x$

$$(-12 + 4 s h^{2}) \dot{x_{0}} + (6 + s h^{2}) (\dot{x_{-1}} + \dot{x_{1}}) + 3 h \{ (\ddot{x} + s x)_{-1} - (\ddot{x} + s x)_{1} \} = \text{Restglied 5. Ordnung.}$$
 (18)

iese Formel ist brauchbar bei Schwingern mit nichtlinearer Dämpfung und nearer Rückstellkraft:

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + s x = P(t).$$

ir $s \to \infty$ erhält man wieder die obige Formel (10), für s=0 folgt

$$2(\vec{x}_{-1} - 2\vec{x}_0 + \vec{x}_1) + h(\vec{x}_{-1} - \vec{x}_1) = \text{Restglied 5. Ordnung.}$$

e vieluntersuchte Gleichung

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + c x = r(t) \tag{19}$$

t nicht unmittelbar die Gestalt (12), lässt sich aber auf diese Gestalt umareiben, indem man

$$x(t) = \dot{z}(t)$$
 und $\int_{x_0}^{x} f(x) dx = F(x)$, $\int_{t_0}^{t} r(t) dt = R(t)$

setzt. Die Gleichung

$$\ddot{z} = \frac{d}{dt} \left(F(\dot{z}) \right) + c \dot{z} - r(t) \tag{20}$$

lässt sich einmal integrieren:

$$\ddot{z} + F(\dot{z}) + c z = C + R(t)$$
, (21)

wobei die Konstante C belanglos ist, da eine additive Konstante bei z die Funktion x(t) nicht beeinflusst; man kann also zum Beispiel C 0 setzen. Gleichung (21) hat nun die Form (12) und kann mit der Formel (18) behandelt werden; in dieser Formel treten dann die Grössen \dot{z} , also die interessierenden Werte x, aber nicht z selbst auf.

4. Beispiel

Es werde die Anwendung auf ein System beschrieben:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + f(x) + x - y = 0$$
, $2\ddot{y} + y - x = \cos\frac{\pi}{2}t$ (22)

(Schwingungsanordnung nach Figur 1). Die Rückstellkraft werde hier durc



Fig. 1

Schematische Schwingungsanordnung zu dem Beispiel in Nr. 4.

 $f(x) - x + \varrho x^2$ festgelegt, wobei für $\varrho = 0$ eine lineare Aufgabe entsteht m. der periodischen Lösung:

$$x = 0,0055 \cos \frac{\pi}{2} t - 0,0805 \sin \frac{\pi}{2} t,$$

$$y = -0,2555 \cos \frac{\pi}{2} t + 0,0205 \sin \frac{\pi}{2} t.$$
(25)

Wir legen der Rechnung die (noch sehr grobe) Maschenweite h=1 zugrunde um haben dann für x und y jeweils vier unbekannte Funktionswerte, die wir hie kurz mit $a, b, ..., \delta$ bezeichnen:

$$v: \alpha \beta \gamma \delta \alpha$$

Das gewöhnliche Differenzenverfahren führt dann auf acht Gleichungen, wobei vir von jedem Satz von vier Gleichungen nur die zu t=0 gehörige Gleichung nschreiben:

$$(-2a+b+d)+(b-d)+(a+\varrho a^2)+a-\alpha=0,$$

$$(-2a+b+d)+(b-d)+(a+\varrho a^2)+a-\alpha=0.$$

aus den letzten vier linearen Gleichungen drücken wir α , β , γ , δ durch a, b, c, d us:

21
$$\alpha = -7 + a + 6b + 8c + 6d$$
,
21 $\beta = 6a + b + 6c + 8d$,
21 $\gamma = 7 + 8a + 6b + c + 6d$,
21 $\delta = 6a + 8b + 6c + d$

nd erhalten entsprechend vier Gleichungen für a, b, c, d:

a wir die Ergebnisse mit denen des genaueren Verfahrens vergleichen wollen, ihren wir gleich noch die Rechnung mit Benutzung der Formeln (15) und (18) pr. Auch hier hat man zwei Sätze von je vier Gleichungen, von denen wir weils die erste Gleichung hinschreiben:

Wieder drückt man zunächst die α , β , γ , δ durch a, b, c, d aus:

$$209 \alpha = -55 + 20 a + 57 b + 75 c + 57 d,$$

$$209 \beta = 57 a + 20 b + 57 c + 75 d,$$

$$209 \gamma = 55 + 75 a + 57 b + 20 c + 57 d,$$

$$209 \delta = 57 a + 75 b + 57 c + 20 d$$

$$(24)$$

d erhält einsetzend vier Gleichungen für a, b, c, d:

$$209 \ \varrho \ (11 \ a^2 + \ 2 \ b^2 - \ d^2) + 605 - 3203 \ a + 6514 \ b - \ 882 \ c + \ 79 \ d = 0 \ d^2 + 605 - 3203 \ a + 6514 \ b - 882 \ c + \ 79 \ d = 0 \ d^2 + 11 \ b^2 + \ 2 \ c^2) - 165 + \ 79 \ a - 3203 \ b + 6514 \ c - 882 \ d = 0 \ d^2 + 11 \ c^2 + \ 2 \ d^2) - 605 - 882 \ a + \ 79 \ b - 3203 \ c + 6514 \ d = 0 \ d^2 + 11 \ d^2 + 11 \ d^2 + 165 + 6514 \ a - 882 \ b + \ 79 \ c - 3203 \ d = 0 \ d^2 + 11 \ d^2 + 11 \ d^2 + 165 + 6514 \ a - 882 \ b + \ 79 \ c - 3203 \ d = 0 \ d^2 + 11 \ d^2 + 11 \ d^2 + 165 + 6514 \ a - 882 \ b + \ 79 \ c - 3203 \ d = 0 \ d^2 + 11 \ d^2 + 11 \ d^2 + 165 + 6514 \ a - 882 \ b + \ 79 \ c - 3203 \ d = 0 \ d^2 + 11 \ d^2 + 11 \ d^2 + 165 + 6514 \ d^2 + 11 \ d^2$$

es empfiehlt sich für die folgende Relaxation, diese Gleichungen nach a^2 , b^2 ; c^2 , d^2 aufzulösen. Dann erhält man

$$13585 \ \varrho \ a^2 + 3575 - 15512 \ a + 40185 \ b - 12399 \ c + 1311 \ d = 0 \ ,$$

$$13585 \ \varrho \ b^2 + 1311 \ a - 15512 \ b + 40185 \ c - 12399 \ d = 0 \ ,$$

$$13585 \ \varrho \ c^2 - 3575 - 12399 \ a + 1311 \ b - 15512 \ c + 40185 \ d = 0 \ ,$$

$$13585 \ \varrho \ d^2 + 40185 \ a - 12399 \ b + 1311 \ c - 15512 \ d = 0 \ .$$

$$(25)$$

Es wurde zunächst der lineare Fall ($\varrho=0$) durchgerechnet und die Werte mit der exakten Lösung verglichen. Die Tabelle

Linearer Fall ($\varrho = 0$) (Absolute Fehler in Klammern beigefügt)

	Exakter Wert	Gewöhnliches	Verbessertes Differenzenverfahren					
	Exakter Wert	Differenzenverfahren	nach (16)	nach (17)				
x(0)	0,00547	- 0,0270 (0,0324)	0,0073 (0,0018)	0,0073 (0,0018)				
x(1)	-0,08053	-0,1622 (-0,0817)	-0,0914 (-0,0109)	-0,0824 (-0,0019)				
y(0)	-0,25553	-0,3243 (-0,0688)	-0,2651 (-0,0096)	-0,2577 (-0,0022)				
y(1)	0,02047	0,0541 (0,0336)	0,0240 (0,0035)	0,0211 (0,0007)				

Tabelle 2

a	b	С	d	Hilfsspalten ($N = 13585$)				A ¹)	B ²)	
			LU .	$N a^2$	$N b^2$	$N c^2$	$N d^2$	21)	D^{-j}	
0	-0,1	0	0,1	0	135,85	0	135,85	-312,4	311,3	
0	-0.1	-0.01	0,1	0	135,85	1,4	135,85	-188,4	-90,6	
0	-0,1	-0,01	0,09	0	135,85	1,4	110,0	-201,5	33,4	
0,002	-0,095	-0,013	0,088	0,05	122,5	2,3	105,0	3,0	-137,3	
	-1,055 eite Lösu		-0,940	12338	15120	14750	12004	-12350	-15102	

¹⁾ $A = 3575 - 15512a + \cdots$ 2) $B = 1311a + \cdots$

eigt, dass dabei das gewöhnliche Differenzenverfahren recht schlechte Werte efert und dass die Mehrarbeit bei Aufstellung der Gleichungen (16) sich gelohnt at. Man wird daher wohl auch im nichtlinearen Fall zu den Formeln (15) und (8) mehr Vertrauen haben dürfen als zum gewöhnlichen Differenzenverfahren. Is ergeben sich zwei periodische Lösungen, das Schema zeigt für ϱ -- 1 die durchführung der Relaxation für die beiden Lösungen. Die Relaxation arbeitet ehr gut, wenn man sich erst einmal in das Verfahren hineingedacht hat. Da die Anlage der Rechnung ganz entsprechend wie beim vorigen Beispiel ist, rübrigt sich eine genauere Beschreibung (siehe Tabelle 2).

Ergebnis der Rechnung:

t	Erste l	Lösung	Zweite Lösung			
	x	У	x	у		
0	0,002	-0,269	-0,953	-1,272		
1	-0,095	0,020	-1,055	-0,982		
2	-0,013	0,260	-1,042	-0,721		
3	0,088	-0,029	-0,940	-1,012		

5. Beispiel: Periode unbekannt

Ist die Periode T nicht bekannt, so hat man sie als weitere Unbekannte eindühren. Dafür kann man, wenn in den Differentialgleichungen die Zeit t nicht plizit auftritt, den Zeitpunkt t=0 beliebig festlegen, zum Beispiel in einem zenblick maximaler Auslenkung einer Grösse etwa $\dot{x}_1(0)=0$ wählen. Ledigh zur Erläuterung der Methode werde folgendes einfache Beispiel behandelt:

$$\ddot{x} = (3 \dot{x} - \dot{x}^3) + x = 0$$
,

Tabelle 2

(C3)	D^4)	$A + Na^2$		onswerte $C + N c^2$	$D + N d^2$	de		ungen tionswer	te	Spanne
1467,5	- 324,4	-312 -188,4 -201,5	447 45,3 169,3	, .	-188,5					1246 890 495
	-123,8	3,0	-14,8	15,9	- 18,8					53
4752	_12000	-11	18	-3	4					36
3) C =	3) $C = -3575 - 12399a + \cdots$ 4) $D = 40185a + \cdots$									

welches so einfach ist, dass man es für technische Zwecke sonst wohl durch Zurückführung auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung und graphisch mit Hilfe der Liénardschen Konstruktion behandeln würde. Es werde also $\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$ gesetzt. Bei der ganz groben Maschenweite $h = T_1 4$ hat mar für die beiden Unbekannten h und $\dot{x}(h) = a$ nach (18) die beiden Gleichunger

$$6h(-3a+a^3)=0$$
, $(-12+4h^2)a=0$

mit der Lösung (die triviale Lösung h=a=0 lassen wir ausser Betracht $h=a=\sqrt{3}$ und T=4 $h\approx 6,93$. Diese Werte werden als Ausgangswerte für die Relaxation bei der kleineren Maschenweite $h=T_112$ benutzt. Für die sech Unbekannten $h, \ \dot{x}(h)=a, \ \dot{x}(2\ h)=b, \ \dot{x}(3\ h)=c, \ \dot{x}(4\ h)=d, \ \dot{x}(5\ h)=e$ (vgl Figur 2) lauten die Gleichungen nach (18)

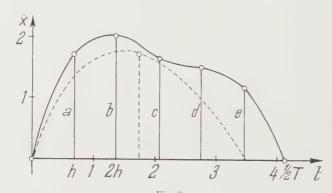


Fig. 2 Verschiedene Näherungen zu dem Beispiel in Nr. 5.

Im Relaxationsschema wird man h, b, d als drei Unbekannte einführen. Ars ihnen berechnen sich aus drei der angegebenen sechs Gleichungen die Grössota, c, e. Zu den jeweils gewählten Werten von h, b, d bestimmt man die zugehrrigen Werte a, c, e und stellt fest, wie weit die linken Seiten der restlichen dat Gleichungen dann die Zahl Null annähern. Durch Anbringen kleiner Variati:

en bei $h,\,h,\,d$ gelangt man schnell zu einer hinreichend genauen Näherungssung:

$$h = 0,689$$
, $a = 1,75$, $b = 2,02$, $c = 1,63$, $d = 1,54$, $e = 1,19$.

gur 2 zeigt den Verlauf dieser Näherungslösung und zum Vergleich gestrichelt ich die grobe Näherung mit h = T/4.

Summary

In order to solve a periodic problem, the solution of its boundary value roblem is needed. We ask for a method with a high order of accuracy and with onlinear equations containing only a few unknowns. In this case the use of dinary finite differences is not recommended. The "Mehrstellenverfahren" uses rms (9) and is always applicable, but gives a nonlinear system with a large timber of unknowns. The method described in this paper is applicable for quations (12) and uses the terms (13). A_{ν} and a_{ν} are evaluated from the fact at the remaining terms of Taylor's expansion are of an order as high as assible. Equations (15), (16), (17), and (18) are examples of such formulas. Some timerical examples are also given.

ingegangen: 29. 11. 1951.)

Schallgeschwindigkeit in porösen Medien

Von Heinrich Labhart, Zürich1)

1. Einleitung

Die Kenntnis der Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Porosität ter Körper ist von vielseitigem Interesse. Einerseits ist es dadurch möglich, ich rasche, serienmäßig durchführbare Messung der Schallgeschwindigkeit das Porenvolumen von Festkörpern, insbesondere von Gesteinen und keraschen Massen verschiedenster Art, zu schließen.

r Andrerseits ist die Kenntnis der Schallgeschwindigkeit unerläßlich für die rnensionierung der heute immer mehr an Stelle von Einkristallen als elektrochanische oder magnetomechanische Schwinger verwendeten keramischen terkörper, wie BaTiO₃ oder magnetostriktive Ferrite.

Kürzlich hat Gassmann²) den Einfluß einer Porenfüllung durch eine komcssible Flüssigkeit auf die elastischen Eigenschaften eines porösen Mediums bandelt. Über den Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul des pofin Materials und demjenigen der homogenen Gerüstsubstanz liegen bisher

⁽¹⁾ Abteilung für industrielle Forschung des Institutes für technische Physik an der ETH.

F. Gassmann, Vjschr. naturf. Ges. Zürich 96, Heft 1 (1951).

nur die Untersuchungen von SQUIRE¹) und BARTELS²) an Sintereisen, von Ryschkewitsch³) an keramischen Massen und die erst während der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit erschienenen Versuche an Ni-Zn-Ferrit von Weilt⁴) vor. In diesen Arbeiten finden sich jedoch keinerlei Ansätze für eine theoretische Deutung des Effektes.

2. Experimentelle Untersuchungen und Ergebnisse

Für die vorliegenden Experimente wurden magnetostriktive Ferrite des angenäherten stöchiometrischen Zusammensetzung Ni_{0.8} Zn_{0.2} Fe₂O₄ verwendet Dieses Material läßt sich durch gemeinsames thermisches Zersetzen der zusam men gemahlenen Metalloxalate als feines Pulver erhalten, das mit einem organischen Binder versetzt und in einer Matrize zu Stäbchen verpreßt wird. Durc: Sintern dieser Stäbchen bei Temperaturen zwischen 1100°C und 1280°C erhäl man Porenvolumina von 26° o bis 4° o. Die fertigen Stäbchen haben eine Läng von etwa 8 cm und einen annähernd quadratischen Querschnitt von etwe 0,3 cm². Für die Messung der Resonanzfrequenz werden die Stäbe in eine zylindrischen Spule, genau in der Mitte, wo bei Anregung in der Grundfrequer ein Schwingungsknoten liegt, mit vier spitzen Schrauben festgeklemmt. Af allen anderen Stellen schwingen sie frei. Dem erregenden Wechselstrom in de Spule wird zur Vormagnetisierung ein Gleichstrom überlagert. Da die Schwid gungsgüte Q dieser Stäbe fast immer erheblich größer als 1000 ist, zeichnet sid die Resonanzfrequenz durch ein sehr scharfes Maximum der Impedanz aus und kann genau festgelegt werden. Schwingt ein Stab der Länge I in seintiefsten Eigenfrequenz, so berechnet sich die Schallgeschwindigkeit zu

$$\Gamma - 2lf_{res}$$
.

Die Eigenfrequenz der verwendeten Stäbe liegt zwischen 25 und 45 kc. Die durch die Vormagnetisierung bedingte Änderung des Elastizitätsmoduls in größenordnungsmäßig kleiner als der Einfluß des Porenvolumens und mut daher nicht berücksichtigt werden. Die Bestimmung des Porenvolumens geschieht pyknometrisch.

In Figur 1 ist die Schallgeschwindigkeit von 30 Stäbchen von annäherregleicher chemischer Zusammensetzung in Funktion des Porenvolumens das gestellt.

Mit einer gewissen durch Inhomogenitäten und kleine Fehler der Stäbchit bedingten Streuung scheint zwischen Porenvolumen und Schallgeschwindigkeit eine eindeutige Abhängigkeit zu bestehen. Aus der Schallgeschwindigkeit

4) L. Weil, Ann. Inst. Fourier 2, 207 (1951).

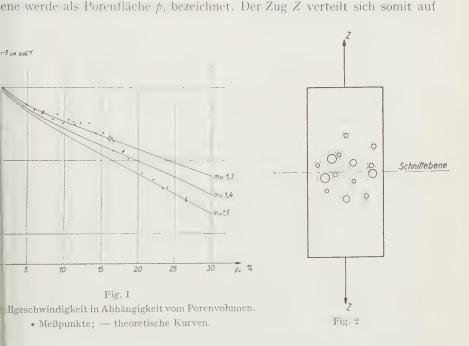
¹⁾ A. SQUIRE, Powder Metallurgy (Mapleton House, New York, 1947).

H.J. Bartels, Mitt. Kongr. Pulvermetallurgie Graz 1948.
 A. Ryschkewitsch, Ber. dtsch. keram. Ges. 25, 95 (1944).

nließt man für einen Ferrit mit einem Porenvolumen von 10°_{0} und einer chte von $4,80~{\rm g~cm^{3}}$ auf einen Elastizitätsmodul $E=1,46\cdot10^{12}~{\rm Dyn/cm^{2}}$, r mit demjenigen von Stahl ($E=2,2\cdot10^{12}~{\rm Dyn/cm^{2}}$) vergleichbar ist.

3. Theoretische Deutung

Der Spannungszustand eines porösen Körpers ist außerordentlich kompliert. Es ist daher unmöglich, durch eine strenge Rechnung aus den Elastizitskonstanten des Gerüstmaterials diejenigen des porösen Stoffes zu erhalten. Deshalb soll eine Näherung versucht werden, welche in Folgendem besteht: Man betrachte einen porösen Zylinder von 1 cm² Querschnitt, der unter m Zug Z steht (Figur 2). Die Poren sind durch Kugeln schematisiert. Legt an senkrecht zur Zugrichtung eine Schnittebene, so wird diese einige Poren hneiden und nahe bei anderen vorbeigehen. Die Summe der Projektionen der schnittenen und der Ebene unmittelbar benachbarten Poren auf die Schnittenen werde als Berenflichen der konziehret. Der Zug Z verteilt sieh semit auf



ë Fläche (1 - p_f) und bewirkt bei einem Elastizitätsmodul E_θ des Gerüsterials eine relative Dehnung des Zylinders um

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{Z}{(1 - p_f) E_0}.$$

Der effektive Elastizitätsmodul E des porösen Körpers beträgt demnach

$$E = E_0 (1 - p_f) .$$

Sind ϱ die mittlere Dichte des porösen Körpers, ϱ_0 die Dichte der Gerüstsubstanz und p_v das relative Porenvolumen, also

$$\varrho=\varrho_0\left(1-p_v\right)$$
 ,

so gilt für die Schallgeschwindigkeit in genügend schlanken Stäben

$$v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} = \sqrt{\frac{E_0}{\varrho_0}} \cdot \frac{1 - p_f}{1 - p_r} = v_0 \sqrt{\frac{1 - p_f}{1 - p_o}} ,$$

wo v_0 die Schallgeschwindigkeit in der homogenen Gerüstsubstanz bedeute

Es besteht nun die Aufgabe, die Porenfläche p_f aus dem Porenvolumen p_f zu berechnen. Offenbar darf man p_f nicht einfach gleich dem Mittelwert de Schnittfläche der betrachteten Ebene mit den Poren setzen. Auf diese Weitswürde man $p_f = p_v$ und somit eine vom Porenvolumen unabhängige Schalgeschwindigkeit $v = v_0$ erhalten, was durch das Experiment absolut nicht bistätigt ist. Diese Diskrepanz rührt natürlich davon her, daß dem komplizierte Spannungszustand, der sich in der Umgebung einer Pore ausbildet, auf keine lei Weise Rechnung getragen wurde. Mit anderen Worten: Die Wirkung einer Pore erstreckt sich nicht nur auf ihr Volumen, sondern auch auf ihre nähese Umgebung.

Im folgenden wird versucht, diesem Umstand Rechnung zu tragen.

Dazu soll angenommen werden, daß die Poren einzelne, im allgemeiner gegeneinander abgeschlossene Hohlräume bilden, deren Gestalt nicht allzs stark von der Kugelform abweiche. Ferner soll jede Pore von einer fiktiver Wirkungskugel umgeben gedacht sein (vergleiche Figur 2). Der Radius dieser Wirkungskugel sei so gewählt, daß das Volumen der Wirkungskugel is selben Verhältnis zum Volumen der Pore steht wie das Gesamtvolumen der Körpers zum Gesamtporenvolumen. Liegt der Mittelpunkt einer Pore nährt als R_i bei der Schnittebene, so ist die Projektion dieser Pore als Beitrag zur Porenfläche mitzuzählen. Alle Poren, die weiter weg von der Schnittebene liegen, werden vernachlässigt.

Die Poren seien entsprechend ihrem Volumen in verschiedene Sortin (Index i) eingeteilt. Existieren von einer Sorte n_i Poren pro Kubikzentimers und ist der Beitrag dieser Sorte zum Gesamtporenvolumen p_{iv} , so beträt offenbar das Volumen einer Pore dieser Sorte p_{iv}/n_i . Die Projektion σ_i diese kugelig angenommenen Pore auf die Schnittfläche wird somit

$$\sigma_i = \pi^{1/3} \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{p_{iv}}{n_i} \right)^{2/3}.$$

Der Radius R, der Wirkungskugel berechnet sich unter Berücksichtigung roben formulierten Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{n-4} \frac{\pi R_i^3}{3} = n - 1 \quad \text{und} \quad \frac{4\pi R_i^3}{3} = \frac{p_{iv}}{n_i} \cdot \frac{1}{p_i}$$
$$R_i = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{p_{iv}}{n_i p_v}\right)^{1/3}.$$

Die gesuchte Porenfläche p_f wird somit

$$\begin{split} \dot{p}_{t} &= \sum_{i} 2 \, R_{i} \, n_{i} \, \sigma_{i} - \sum_{i} 2 \left(\frac{3 \, \dot{p}_{i}}{4 \, \pi \, n_{i} \, \dot{p}_{x}} \right)^{1/3} \, n_{i} \, \pi^{1/3} \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{\dot{p}_{iv}}{n_{i}} \right)^{2/3} \\ \dot{p}_{f} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sum_{i} \dot{p}_{iv}}{\dot{p}_{v}^{1/3}} = \frac{3}{2} \, \dot{p}_{v}^{2/3}. \end{split}$$

Die Schallgeschwindigkeit wird damit

$$\tau = |v_0| \left| \begin{array}{c} 1 + (3/2) |p_c^{2/3}| \\ 1 + p_c \end{array} \right|.$$

Diese Ableitung kann leicht in zweierlei Beziehung verallgemeinert werden. 1. Für nicht kugelige Poren ist die mittlere Projektion σ_i der Poren der te i nicht mehr nach Gleichung (1) zu berechnen, sondern sie wird um en von der Porenform abhängigen Faktor δ größer.

$$ar{\sigma}_i = \delta \; \pi^{1/3} \left(rac{3}{4}
ight)^{2/3} \left(rac{\mathcal{P}_{iv}}{n_i}
ight)^{2/3}.$$

Für ein Parallelepiped der Kantenlängen a,b,c berechnet sich δ beispielsse zu

$$\delta = \frac{1}{\pi^{1/3}} \left(\frac{4}{3} \right)^{2/3} \frac{(a \ b + b \ c + a \ c)}{2 \ (a \ b \ c)^{2/3}} .$$

Man erhält somit

für die Kugel $\delta = 1,00$; für einen Würfel $\delta = 1,24$; für a = b = 1, c = 5 $\delta = 1,56$; für a = b = 1, c = 20 $\delta = 2,30$.

2. Durch die Zugrichtung ist im Material eine Richtung ausgezeichnet. Der läuführende Wirkungsbereich einer Pore ist daher nicht notwendig kugelmetrisch, sondern möglicherweise in Zugrichtung gedehnt oder zusammenückt. Um dieser Möglichkeit Rechnung zu tragen, können Rotationsellipma als Wirkungsbereiche eingeführt werden. Dabei soll immer angenommen

werden, daß die Lineardimension jeder Pore klein gegen die Lineardimension des zugehörigen Wirkungsbereiches sei und daß deshalb die Form der Pore die Form des Wirkungsbereiches nicht beeinflusse. Unter den gleichen Nebenbedingungen wie vorher erhält man für die in Zugrichtung liegende Halbachse

$$b_i = \left(\gamma^2 \, rac{3 \, p_{iv}}{4 \, n_i \, p_v}
ight)^{1/3}$$
 ,

wo γ gleich dem Verhältnis der Halbachse in Zugrichtung zu den zwei gleiche Halbachsen senkrecht zur Zugrichtung bedeutet. Für $\gamma > 1$ ist also das Ellisoid gestreckt, für $\gamma < 1$ dagegen abgeplattet.

Führt man die Berechnung der Schallgeschwindigkeit wie vorher, jedoc

unter Benützung von $\bar{\sigma}_i$ und b_i statt σ_i und R_i durch, so ergibt sich

$$V_0 = V_0 \sqrt{\frac{1 - (3/2) \delta \gamma^{2/3} p_v^{2/3}}{1 - p_r}}$$

oder mit $m = \frac{3}{2} \delta \gamma^{2/3}$

$$V = V_0 \sqrt{\frac{1 - m \, p_v^{2/3}}{1 - p_v}} \,.$$

4. Vergleich der Experimente mit der theoretischen Formel

In Figur 1 sind unter Annahme von $V_0 = 6.18 \cdot 10^5$ cm s die theoretischt Kurven für m = 1.5, m = 1.4 und m = 1.3 mit den Meßpunkten von 30 Stäbtzusammen eingetragen.

Man sieht, daß diese einfache Theorie die Größe des beobachteten Effekts durchaus richtig trifft. Für kleine Porenvolumen liegen jedoch die Werte näß an der Kurve für m-1,3, während für große Porenvolumen die Übereinstig mung mit der Kurve für m-1,5 besser ist. Dies kann dadurch erklärt werden daß bei kleinen Porenvolumen die Sintertemperatur höher war und somit die Poren im allgemeinen kugeliger wurden. Dadurch wird δ und somit auch kleiner als bei den großen Porenvolumen, wo infolge der niedrigen Sintertemperatur die Poren stärker von der Kugelgestalt abweichen.

Es ist bemerkenswert, daß die Werte von δ und γ beide nahe bei eins liegund somit eher als Korrekturen wirken.

Setzt man nämlich unter Annahme von Kugelporen bei kleinen Poren volumen $\delta=1$, so erhält man sofort aus m=1,3 für das Achsenverhältnis et etwas abgeplatteten Wirkungsellipsoide $\gamma=0.81$. Mit diesem Wert für γ erhilman bei großen Porenvolumen $\delta=1,15$, was Poren entsprechen dürfte, det Gestalt wenig von der Kugelform abweicht.

Der Wert für den Elastizitätsmodul E_0 des porenfreien Ferrits ergt sich aus unserer theoretischen Extrapolation mit $V_0=6,18\cdot 10^5$ cm/s bei r

hme der aus den Röntgendaten berechneten Dichte $q_0 = 5{,}33 \,\mathrm{g}$ cm³ zu $= 2{,}04 \cdot 10^{12} \,\mathrm{Dyn/cm^2}$, was mit dem Wert $2{,}0 \cdot 10^{12} \,\mathrm{Dyn/cm^2}$ von Weil in sgezeichneter Übereinstimmung steht.

5. Diskussion

Aus diesen Ausführungen geht hervor, daß sich unter den gemachten, sehr nen Annahmen (Querschnittsverringerung durch Porenfläche und Einführig von Wirkungsbereichen der einzelnen Poren; die experimentell gefundene shängigkeit der Schallgeschwindigkeit vom Porenvolumen recht gut theoisch wiedergeben läßt. Es ist aber nach den bisherigen Überlegungen auch erwarten, daß die Schallgeschwindigkeit nicht nur vom Porenvolumen, somm auch, allerdings in geringerem Ausmaß, von der Porenform und wahrneinlich von der Größenverteilung der Poren abhängt.

Daher wäre es interessant, Versuchsreihen mit möglichst konstanter Porenm und variablem Porenvolumen in der Weise durchzuführen, daß alle Stäbe der gleichen Temperatur gesintert, aber mit verschiedenem Preßdruck gemt werden.

Weitere Daten über das elastische Verhalten könnten aus der Messung von geschwingungen an diesen Stäben gewonnen werden.

Durch oszillographische Messung der Abklingdauer frei schwingender Fertäbe haben wir die innere Dämptung ermittelt. Unsere Versuche lassen noch ne einheitliche Interpretation zu. Die Verhältnisse werden durch das Auften von magnetomechanischer Hysterese kompliziert.

Summary

Measurements made show the very close relation between sound velocity and volume in a Ni-Zn ferrite of fixed composition. Schematizing the complical state of stress and strain in a porous medium in a rough manner, a theoretical ression for the sound velocity is derived that fits the experimental curve nishingly well.

regangen: 25, 10, 1951.)

Bending of a Thin Elliptic Plate of an Orthotropic Materia under Uniform Lateral Load

By Yosio Ohasi, Tokyo, Japan¹)

In this paper, the bending problem of a thin elliptic plate of an acolotrop material subjected to a uniform load has been treated. The material of which is assumed to have two orthogonal axes of symmetry with respect to its elast properties. Recently the solution for a circular plate was obtained by Okubo. In the case treated by him, however, the direction of the symmetrical axes the material are out of the question. While in cases of an elliptic plate, it directions of the symmetrical axes come into question, because of the unsymetrical shape of the plate with respect to its center.

We shall assume the plate to be of uniform thickness h, and shall take x-, y-axes in the plane of the plate before bending, the directions of which a chosen in the directions of the symmetrical axes of the material. Then the deflection of the plate satisfies the differential equation³)

$$D_1\,rac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\,(D_2+D_4)\,\,rac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+D_3\,\,rac{\partial^4 w}{\partial y^4}=q$$
 ,

where q is the intensity of a uniformly distributed load, S_{11} , S_{12} , S_{22} , and are elastic constants defined by

$$e_{xx} = S_{11}\,\sigma_x + S_{12}\,\sigma_y\,, \quad e_{yy} = S_{12}\,\sigma_x + S_{22}\,\sigma_y\,, \quad e_{xy} = S_{66}\,\tau_{xy}\,,$$

and

$$\begin{split} D_1 = & \frac{h^3 \; S_{22}}{12 \; (S_{11} \; S_{22} - \; S_{12}^2)} \,, \quad D_3 = \frac{h^3 \; S_{11}}{12 \; (S_{11} \; S_{22} - \; S_{12}^2)} \,, \\ D_2 = & - \; \frac{h^3 \; S_{12}}{12 \; (S_{11} \; S_{22} - \; S_{12}^2)} \,, \quad D_4 = \frac{h^3}{6 \; S_{65}} \;. \end{split}$$

If x', y', and ϑ represent the axes of the ellipse and the angle between x and x', respectively, then

$$x' + i y' = e^{i\vartheta} (x + i y).$$

¹⁾ The Railway Technical Laboratory.

²) H. Okubo, J. appl. Phys. 20, 1151 (1949).

 $^{^3)}$ S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells (McGraw-Hill Book Company, Inc., New Y 10 1940), p. 189.

ransform the Cartesian coordinates x', y' into the curvilinear coordinates by

$$x' + iy' = c \cosh(\alpha + i\beta), \tag{3}$$

hen $\alpha=$ const represents a family of confocal ellipses and $\beta=$ const represents family of hyperbolas orthogonal to the former. Assuming that $\alpha=\alpha_0$ represents the periphery of the plate, we have

$$a = c \cosh \alpha_0, \quad b = c \sinh \alpha_0,$$
 (4)

here a and b represent the half lengths of the major and minor axes of the liptic plate, respectively.

The general solution of the differential equation (1) can be written in the orm¹)

$$w = w_0 + R [f_1(x + i k_1 y) + f_2(x + i k_2 y)],$$
 (5)

here w_0 is a particular solution of (1), f_1 , f_2 are arbitrary functions, R denote ne real part of a complex function and

$$\begin{split} k_1 &= \frac{D_1^{1/2}}{\sqrt{D_2 + D_4 + \{(D_2 - D_4)^2 - D_1 D_3\}^{1/2}}} \ , \\ k_2 &= \frac{D_1^{1/2}}{\sqrt{D_2 + D_4 - \{(D_2 - D_4)^2 - D_1 D_3\}^{1/2}}} \ . \end{split}$$

1. Built-in Edge

First, we shall consider an elliptic plate clamped at its periphery. We shall see for deflection the expression

$$w = A \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 \right)^2. \tag{6}$$

e see that w satisfies the boundary conditions $w = \partial w/\partial \alpha = 0$, and also the eferential equation (1) provided

$$A = \frac{q}{L_{1}\cos^{4}\vartheta + 2L_{2}\cos^{2}\vartheta\sin^{2}\vartheta + L_{3}\sin^{4}\vartheta},$$

$$L_{1} = \frac{24D_{1}}{a^{4}} + \frac{16(D_{2} + D_{4})}{n^{2}b^{2}} + \frac{24D_{3}}{b^{4}},$$

$$L_{2} = \frac{24D_{1}}{a^{2}b^{2}} + 8(D_{2} + D_{4})\left(\frac{3}{a^{4}} - \frac{4}{a^{2}b^{2}} + \frac{3}{b^{4}}\right) + \frac{24D_{3}}{a^{2}b^{2}},$$

$$L_{3} = \frac{2+D_{1}}{b^{4}} + \frac{16(D_{2}}{a^{2}b^{2}} + \frac{D_{1}}{a^{4}} + \frac{2+D_{3}}{a^{4}}.$$

$$(7)$$

⁾ H. Ōкиво, J. appl. Phys. 20, 1151 (1949).

If q be the angle which the normal to the curve α const makes with the axes of α' , the normal makes an angle $\alpha - \theta$ with the axis of α , and so the bending moments can be written in the forms

$$\begin{split} M_{\alpha} &= -\frac{1}{2} \left\{ D_1 + D_2 + (D_1 - D_2) \cos 2 \left(\varphi - \vartheta \right) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &- \frac{1}{2} \left\{ D_2 + D_3 + (D_2 - D_3) \cos 2 \left(\varphi - \vartheta \right) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \\ &- D_4 \sin 2 \left(\varphi - \vartheta \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \,, \\ M_{\beta} &= -\frac{1}{2} \left\{ D_1 + D_2 - (D_1 - D_2) \cos 2 \left(\varphi - \vartheta \right) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &- \frac{1}{2} \left\{ D_2 + D_3 - (D_2 - D_3) \cos 2 \left(\varphi - \vartheta \right) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \\ &+ D_4 \sin 2 \left(\varphi - \vartheta \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \,, \\ M_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(D_1 - D_2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(D_2 - D_3 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \sin 2 \left(\varphi - \vartheta \right) \\ &+ D_4 \cos 2 \left(\varphi - \vartheta \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \,, \end{split}$$

where

$$\begin{split} \frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}} &= 2 A \Big\{ \Big(\frac{2 x' \cos\vartheta}{a^{2}} + \frac{2 y' \sin\vartheta}{b^{2}} \Big)^{2} + 2 \Big(\frac{\cos^{2}\vartheta}{a^{2}} + \frac{\sin^{2}\vartheta}{b^{2}} \Big) \Big(\frac{x'^{2}}{a^{2}} + \frac{y'^{2}}{b^{2}} - 1 \Big) \Big\} \\ \frac{\partial^{2}w}{\partial v^{2}} &= 2 A \Big\{ \Big(\frac{2 x' \sin\vartheta}{a^{2}} - \frac{2 y' \cos\vartheta}{b^{2}} \Big)^{2} + 2 \Big(\frac{\sin^{2}\vartheta}{a^{2}} + \frac{\cos^{2}\vartheta}{b^{2}} \Big) \Big(\frac{x'^{2}}{a^{2}} + \frac{y'^{2}}{b^{2}} - 1 \Big) \Big\} \\ \frac{\partial^{2}w}{\partial x \partial y} &= 2 A \Big\{ \Big(\frac{2 y' \cos\vartheta}{b^{2}} - \frac{2 x' \sin\vartheta}{a^{2}} \Big) \Big(\frac{2 x' \cos\vartheta}{a^{2}} + \frac{2 y' \sin\vartheta}{b^{2}} \Big) \\ &+ \Big(\frac{x'^{2}}{a^{2}} + \frac{y'^{2}}{b^{2}} - 1 \Big) \Big(\frac{1}{b^{2}} - \frac{1}{a^{2}} \Big) \sin 2\vartheta \Big\} \,. \end{split}$$

As an example, we consider an oak plate cut parallel to the grain of wool-The axis of y is taken in the direction of the fibres, then it becomes y (y) (y) (y) (y) assumed to be unity),

$$D_1 = 10.19$$
, $D_2 = 6.687$, $D_3 = 22.62$, $D_4 = 6.667$,

from which

$$k_1^2 = 0.3428 - 0.2279 i$$
, $k_2^2 = 0.3428 + 0.2279 i$.

¹⁾ H. Hörig, Ing.-Arch. 6, 8 (1935).

l. III, 1952

The maximum deflection is at the center of the plate, and from equation, we obtain

$$w_{max} = \frac{q}{L_1 \cos^4 \vartheta + 2 L_2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + L_3 \sin^4 \vartheta} . \tag{9}$$

Taking the ratio of the major and minor axes as 3:1, the amounts of the aximum deflection for three different cases of $\theta = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$ are calculated on (9). They are

$$w_{max} = 0.1755$$
, 0.2542 and 0.3636 (unit $10^{-2} q b^4$).

 $_{\alpha} = -4 A \left\{ \left\{ D_1 + D_2 + (D_1 - D_2) \cos 2 \left(\varphi - \vartheta \right) \right\} \right\}$

When a plate is clamped at the periphery, the maximum moment will be ere, and so it becomes essential to find the values of the moments at the undary, from equation (8) it becomes

$$\times \left(\frac{\cos\vartheta\cos\beta}{a} + \frac{\sin\vartheta\sin\beta}{b} \right)^{2}$$

$$\cdot \left\{ D_{2} + D_{3} + (D_{2} - D_{3})\cos2(\varphi - \vartheta) \right\}$$

$$\times \left(\frac{\sin\vartheta\cos\beta}{a} - \frac{\cos\vartheta\sin\beta}{b} \right)^{2} - 2D_{4}\sin2(\varphi - \vartheta)$$

$$\times \left(\frac{\cos\vartheta\cos\beta}{a} + \frac{\sin\vartheta\sin\beta}{b} \right) \left(\frac{\sin\vartheta\cos\beta}{a} - \frac{\cos\vartheta\sin\beta}{b} \right) \right],$$

$$= -4A \left[\left\{ D_{1} + D_{2} - (D_{1} - D_{2})\cos2(\varphi - \vartheta) \right\}$$

$$\cdot \left(\frac{\cos\vartheta\cos\beta}{a} + \frac{\sin\vartheta\sin\beta}{b} \right)^{2}$$

$$+ \left\{ D_{2} + D_{3} - (D_{2} - D_{3})\cos2(\varphi - \vartheta) \right\}$$

$$\times \left(\frac{\sin\vartheta\cos\beta}{a} - \frac{\cos\vartheta\sin\beta}{b} \right)^{2} + 2D_{4}\sin2(\varphi - \vartheta)$$

$$\times \left(\frac{\cos\vartheta\cos\beta}{a} + \frac{\sin\vartheta\sin\beta}{b} \right) \left(\frac{\sin\vartheta\cos\beta}{a} - \frac{\cos\vartheta\sin\beta}{b} \right) \right],$$

$$= -4A \left[\left\{ (D_{1} - D_{2}) \left(\frac{\cos\vartheta\cos\beta}{a} + \frac{\sin\vartheta\sin\beta}{b} \right)^{2}$$

$$+ (D_{2} - D_{3}) \left(\frac{\sin\vartheta\cos\beta}{a} - \frac{\cos\vartheta\sin\beta}{b} \right)^{2} \right\} \sin2(\varphi - \vartheta)$$

$$+ 2D_{4}\cos2(\varphi - \vartheta) \left(\frac{\cos\vartheta\cos\beta}{a} + \frac{\sin\vartheta\sin\beta}{b} \right)$$

$$\times \left(\frac{\sin\vartheta\cos\beta}{a} - \frac{\cos\vartheta\sin\beta}{b} \right) \right],$$

where

$$\sin 2 \varphi = \frac{2 a b \sin 2\beta}{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \cos 2\beta}, \quad \cos 2 \varphi = \frac{(a^2 + b^2) \cos 2\beta - a^2 + b^2}{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \cos 2\beta}$$

The bending moments at the periphery are calculated from equation (1, and are shown in figures 1, 2, and 3. For the convenience of comparison, the corresponding values for the isotropy are also shown by dotted lines in the same figures (Poisson's ratio is assumed to be 0.3).

In the foregoing calculations, we treated only the case of a uniform load but when the distribution of load is expressed by a polynomial of x', y', similar procedure can be used by assuming A in (6) as a polynomial of x', y'

2. Supported Edge

The analysis for this case is more complicated. We transform the Cartesis coordinates into the following systems of curvilinear coordinates

$$x + i y = c e^{-i\theta} \cosh(\alpha + i \beta),$$

$$x + i k_1 y = c' e^{-i\theta'} \cosh(\alpha' + i \beta' + i \beta_1),$$

$$x + i k_2 y = c'' e^{-i\theta''} \cosh(\alpha'' + i \beta'' + i \beta_2),$$

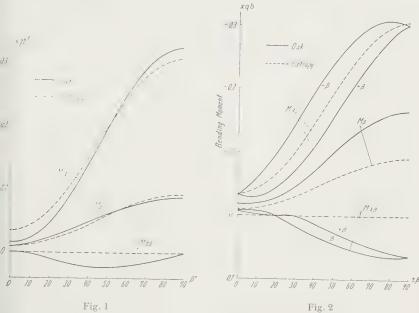
where c', c'', ϑ' , β'' , β_1 , and β_2 are arbitrary constants. In the transformation (11), from the conditions that the curve $\alpha' = \alpha'_0$, represents the periphery the plate and that $\beta = \beta'$ at the boundary, we have

$$\begin{split} c\cosh\alpha_0\cos\vartheta &= c'\cosh\alpha_0'\cos\vartheta'\cos\beta_1 + c'\sinh\alpha_0'\sin\vartheta'\sin\beta_1,\\ c\sinh\alpha_0\sin\vartheta &= c'\cosh\alpha_0'\cos\vartheta'\sin\beta_1 + c'\sinh\alpha_0'\sin\vartheta'\cos\beta_1,\\ k_1c\sinh\alpha_0\cos\vartheta &= c'\sinh\alpha_0'\cos\vartheta'\sin\beta_1 - c'\cosh\alpha_0'\sin\vartheta'\cos\beta_1,\\ -k_1c\cosh\alpha_0\sin\vartheta &= c'\sinh\alpha_0'\cos\vartheta'\cos\beta_1 + c'\cosh\alpha_0'\sin\vartheta'\sin\beta_1, \end{split}$$

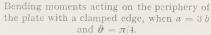
from which

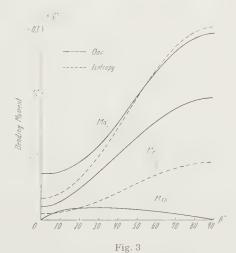
$$\begin{split} &(k^2-1)\sinh 2\,\alpha_0\sin 2\,\vartheta\,\tan^2\beta_1\\ &-4\left\{k_1^2\left(\cosh^2\alpha_0\sin^2\vartheta-\sinh^2\alpha_0\cos^2\vartheta\right)\,+\cosh^2\alpha_0\cos^2\vartheta\right.\\ &-\sinh^2\alpha_0\sin^2\vartheta\right\}\tan\,\beta_1-(k_1^2-1)\sinh 2\,\alpha_0\sin 2\,\vartheta=0. \end{split}$$

Solving the equation (13), we have two solutions for $\tan \beta_1$, but the difference of the corresponding values of β_1 is $\pi/2$, and so it is sufficient for furter calculations if we take only one value of the two.



ending moments acting on the periphery of e plate with a clamped edge, when $a=3\,b$ and $\vartheta=0$.





ing moments acting on the periphery of the plate with a clamped edge, when $a=3\ b$ and $\vartheta=\pi/2.$

Substituting the one value of β_1 into (12), we can find α'_0 , ϑ' , and c'.

In the same manner, we can determine β_2 , α_0'' , ϑ'' , and c'' so as to satisf the cognate conditions. If we determine the constants in this way, $\alpha = \alpha_0' = \alpha_0'$, and $\alpha'' = \alpha_0''$ represent respectively the periphery of the plate an moreover

$$\beta = \beta' = \beta'', \tag{14}$$

at the boundary.

Taking the deflection of the plate in the expression

$$w = R \left[f_{1}(x + i k_{1} y) + f_{2}(x + i k_{2} y) \right]$$

$$+ C_{1} x'^{4} + C_{2} x'^{3} y' + C_{3} x'^{2} y'^{2} + C_{4} x' y'^{3}$$

$$+ C_{5} y'^{4} + C_{6} x'^{2} + C_{7} x' y' + C_{8} y'^{2} + C_{9},$$

$$(1)$$

and

$$f_1''(x+i k_1 y) = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n + i A_n') \cosh 2 n (\alpha' + i \beta'),$$

$$f_2''(x+i k_2 y) = \sum_{n=2}^{\infty} (B_n + i B_n') \cosh 2 n (\alpha'' + i \beta''),$$

we have

$$w = \frac{c'^{2}}{4} \sum_{n=2}^{\infty} A_{n} \left[\frac{\cosh(2n+2)\alpha'}{(2n+2)(2n+1)} \cos(2n+2)\beta' - \left\{ \frac{1}{(2n+1)2n} + \frac{1}{2n} (\frac{1}{2n-1}) \right\} \cosh 2n\alpha' \cos 2n\beta' + \frac{\cosh(2n-2)\alpha'}{(2n-1)(2n-2)} \cos(2n-2)\beta' \right]$$

$$- \frac{c'^{2}}{4} \sum_{n=2}^{\infty} A'_{n} \left[\frac{\sinh(2n+2)\alpha'}{(2n+2)(2n+1)} \sin(2n+2)\beta' - \left\{ \frac{1}{(2n+1)2n} + \frac{1}{2n(2n-1)} \right\} \sinh 2n\alpha' \sin 2n\beta' + \frac{\sinh(2n-2)\alpha'}{(2n-1)(2n-2)} \sin(2n-2)\beta' \right]$$

$$+ \frac{c''^{2}}{4} \sum_{n=2}^{\infty} B_{n} \left[\frac{\cosh(2n+2)\alpha''}{(2n+2)(2n+1)} \cos(2n+2)\beta'' - \left\{ \frac{1}{(2n+1)2n} + \frac{1}{2n(2n-1)} \right\} \cosh 2n\alpha'' \cos 2n\beta'' + \frac{\cosh(2n-2)\alpha''}{(2n-1)(2n-2)} \cos(2n-2)\beta'' \right]$$

(19)

$$-\frac{c''^{2}}{4} \sum_{n=2}^{\infty} B'_{n} \left[\frac{\sinh(2n+2)\alpha''}{(2n+2)(2n+1)} \sin(2n+2)\beta'' - \left\{ \frac{1}{(2n-1)2n} + \frac{1}{2n(2n-1)} \right\} \sinh 2n\alpha'' \sin 2n\beta'' \right] + \frac{\sinh(2n-2)\alpha''}{(2n-1)(2n-2)} \sin(2n-2)\beta'' + C_{1} x'^{4} + C_{2} x'^{3} y' + C_{3} x'^{2} y'^{2} + C_{4} x' y'^{3} + C_{5} y'^{4} + C_{6} x'^{2} + C_{7} x' y'^{2} - C_{9}.$$

$$(17)$$

To satisfy the differential equation (1), we have

$$C_{1} D_{1} + 3 C_{5} D_{3} + C_{3} (D_{2} + D_{4}) \cos^{4} \vartheta
3 \{C_{2} (D_{1} - D_{2} - D_{4}) - C_{4} D_{3} \cos^{3} \vartheta \sin \vartheta
\{3 C_{1} (D_{1} + D_{2} + D_{3} + D_{4}) + (D_{2} + D_{4}) (6 C_{1} - 7 C_{3} + 6 C_{5}) \}
\epsilon^{2} \vartheta \sin^{2} \vartheta + 3 \{C_{2} (D_{2} - D_{3} + D_{4}) + C_{4} D_{1} \} \sin^{3} \vartheta \cos \vartheta
\{3 C_{5} D_{1} + 3 C_{1} D_{3} + C_{3} (D_{2} + D_{4}) \} \sin^{4} \vartheta = \frac{q}{8}.$$
(18)

From the condition that w vanishes at the boundary, we find

$$\begin{split} C_1 \, c^4 \cosh^4 \alpha_0 + \, C_3 \, c^4 \sinh^2 \alpha_0 \cosh^2 \alpha_0 + 3 \, C_5 \, c^4 \sinh^4 \alpha_0 \\ & + 4 \, C_6 \, c^2 \cosh^2 \alpha_0 + 4 \, C_8 \, c^2 \sinh^2 \alpha_0 + 8 \, C_9 = 0, \\ c^4 \cosh^4 \alpha_0 - \, C_5 \, c^4 \sinh^4 \alpha_0 + \, C_6 \, c^2 \cosh^2 \alpha_0 - \, C_8 \, c^2 \sinh^2 \alpha_0 \\ & \cdot + \frac{A_2}{12} \, c'^2 \cosh 2 \, \alpha'_0 + \frac{B_2}{12} \, c''^2 \cosh 2 \, \alpha''_0 = 0, \\ c^4 \sinh \alpha_0 \cosh^3 \alpha_0 + \, C_4 \, c^4 \sinh^3 \alpha_0 \cosh \alpha_0 + 2 \, C_7 \, c^2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \\ & - \frac{A'_2}{6} \, c'^2 \sinh 2 \, \alpha'_0 - \frac{B'_2}{6} \, c''^2 \sinh 2 \, \alpha''_0 = 0, \end{split}$$

$$\begin{split} &c^4 \cosh^4 \alpha_0 - C_3 \, c^4 \sinh^2 \alpha_0 \cosh^2 \alpha_0 + C_5 \, c^4 \sinh^4 \alpha_0 \\ &+ \left(\frac{A_3}{10} - \frac{4 \, A_2}{15} \right) c'^2 \cosh 4 \, \alpha_0' + \left(\frac{B_3}{10} - \frac{4 \, B_2}{15} \right) c''^2 \cosh 4 \, \alpha_0'' = 0, \end{split}$$

 $^4 \sinh \alpha_0 \cosh^3 \alpha_0 - C_4 c^4 \sinh^3 \alpha_0 \cosh \alpha_0$

$$-\left(\frac{A_3'}{10} - \frac{4A_2'}{15}\right)c'^2\sinh 4\alpha_0' - \left(\frac{B_3}{10} - \frac{4B_2'}{15}\right)c''^2\sinh 4\alpha_0'' = 0,$$

$$\left(\frac{A_{2}}{120} - \frac{A_{3}}{70} + \frac{A_{4}}{168}\right) c'^{2} \cosh 6 \alpha''_{0} + \left(\frac{B_{2}}{120} - \frac{B_{3}}{70} + \frac{B_{4}}{168}\right) c''^{2} \cosh 6 \alpha''_{0} = 0,$$

$$\left(\frac{A_{2}'}{120} - \frac{A_{3}'}{70} + \frac{A_{4}'}{168}\right) c'^{2} \sinh 6 \alpha''_{0} + \left(\frac{B_{2}'}{120} - \frac{B_{3}'}{70} + \frac{B_{4}'}{168}\right) c''^{2} \sinh 6 \alpha''_{0} = 0,$$

$$\left(\frac{A_{n-1}}{2n-1} - \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) A_{n} + \frac{A_{n+1}}{2n+1}\right) \frac{c'^{2} \cosh 2 n \alpha'_{0}}{8 n} + \left(\frac{B_{n-1}}{2n-1} - \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) B_{n} + \frac{B_{n+1}}{2n+1}\right) \frac{c''^{2} \sinh 2 n \alpha'_{0}}{8 n} = 0,$$

$$\left(\frac{A_{n-1}'}{2n-1} - \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) A_{n}' + \frac{A_{n-1}'}{2n+1}\right) \frac{c''^{2} \sinh 2 n \alpha'_{0}}{8 n} + \left(\frac{B_{n-1}'}{2n-1} - \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) A_{n}' + \frac{B_{n+1}'}{2n+1}\right) \frac{c''^{2} \sinh 2 n \alpha'_{0}}{8 n} + \left(\frac{B_{n-1}'}{2n-1} - \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) B_{n}' + \frac{B_{n+1}'}{2n+1}\right) \frac{c''^{2} \sinh 2 n \alpha'_{0}}{8 n} = 0,$$

and from the condition that M_{α} vanishes at the boundary, we have the relation

$$\left\{ (D_1 + D_2) + (D_1 - D_2) \cos 2 (\varphi - \vartheta) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$+ \left\{ (D_2 + D_3) + (D_2 - D_3) \cos 2 (\varphi - \vartheta) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$+ 2 D_4 \sin 2 (\varphi - \vartheta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$(20)$$

where

$$\cos 2 (q - \vartheta) = \frac{\cosh 2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \cos 2 \beta}{\cosh 2 \alpha_0 - \cos 2 \beta},$$

$$\sin 2 (\varphi - \vartheta) = \frac{\sinh 2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \sin 2 \beta - \cosh 2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta \cos 2 \beta + \sin 2 \vartheta}{\cosh 2 \alpha_0 - \cos 2 \beta},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cosh 2 n \alpha_0' + B_n \cosh 2 n \alpha_0'') \cos 2 n \beta$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty} (A'_n \sinh 2 n \alpha_0' + B'_n \sinh 2 n \alpha_0'') \sin 2 n \beta + 6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta$$

$$+ 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + C_3 c^2 (\sinh^2 \alpha_0 + \sin^2 \vartheta)$$

$$+ 3 C_4 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + 6 C_5 \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta + 2 C_6 \cos^2 \vartheta +$$

$$+ 2 C_7 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 C_8 \sin^2 \vartheta + \left\{6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta + 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + C_3 c^2 (\cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta - \sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta) - 3 C_4 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta - 6 C_5 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta \right\} \cos 2 \beta$$

$$+ \left(3 C_2 \cos^2 \vartheta + 4 C_3 \sin \vartheta \cos \vartheta - 6 C_5 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta \right) \cos 2 \beta$$

$$+ \left(3 C_2 \cos^2 \vartheta + 4 C_3 \sin \vartheta \cos \vartheta + 3 C_4 \sin^2 \vartheta \right) c^2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \sin 2 \beta ,$$

$$\frac{2w}{y^2} = -\sum_{n=2}^{\infty} \left(A_n k_1^2 \cosh 2 n \alpha_0' + B_n k_2^2 \cosh 2 n \alpha_0'' \right) \cos 2 n \beta$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(A_n' k_1^2 \sinh 2 n \alpha_0' + B_n' k_2^2 \sinh 2 n \alpha_0'' \right) \sin 2 n \beta$$

$$+ 6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta - 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$+ 6 C_3 c^2 (\sinh^2 \alpha_0 + \cos^2 \vartheta) - 3 C_4 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$+ C_3 c^2 (\sinh^2 \alpha_0 + \cos^2 \vartheta) - 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$+ \left\{6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta - 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 C_8 \cos^2 \vartheta \right\}$$

$$+ \left\{6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta - 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 C_8 \cos^2 \vartheta \right\}$$

$$+ \left\{6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta - 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 C_8 \cos^2 \vartheta \right\}$$

$$+ \left\{6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta - 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 C_8 \cos^2 \vartheta \right\}$$

$$+ \left\{6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta - 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta \right\} \cos 2 \beta$$

$$+ \left\{6 C_1 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta - 6 C_5 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta \right\} \cos 2 \beta$$

$$+ \left\{3 C_2 \sin^2 \vartheta - 4 C_3 \sin \vartheta \cos \vartheta + 3 C_4 \cos^2 \vartheta \right\} \cos^2 \vartheta \right\} \cos 2 \beta$$

$$+ \left\{\frac{2}{9} \left[-6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + C_3 c^2 \sin 2 \vartheta + 2 C_7 \cos 2 \vartheta \right] \right\} \cos 2 \beta$$

$$+ \left\{\frac{2}{9} \left[-6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 2 C_3 \cos^2 \vartheta + 3 C_4 c^2 \sin^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \right] \right\} \cos 2 \beta$$

$$+ \left\{6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta + 2 C_3 \cos^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \right\} \right\} \cos 2 \beta$$

$$+ \left\{6 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta + 2 C_3 \cos^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \right\} \right\} \cos 2 \beta$$

$$+ \left\{6 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \right\} \cos 2 \vartheta$$

$$+ \left\{6 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \right\} \right\} \cos 2 \vartheta$$

$$+ \left\{6 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \right\} \cos 2 \vartheta$$

$$+ \left\{6 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 3 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \right\} \right\} \cos 2 \vartheta$$

$$+ \left\{6 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 3 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \right\} \right\} \cos 2 \vartheta$$

$$+ \left\{6 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 3 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \right\} \right\} \cos 2 \vartheta$$

$$+ \left\{6 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 3 C_3 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \right\} \right\} \cos 2 \vartheta$$

 $+\{-3 C_2 c^2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 4 C_3 c^2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \cos 2 \vartheta \}$

 $+3 C_4 c^2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \sin 2 \vartheta \} \sin 2 \beta$].

Mathematical difficulties are encountered for the determination of the constants C_1 , C_2 , ..., C_9 , A_2 , B_2 , A'_2 , B'_2 , ... to satisfy the equations (18), (19) and (20), under the condition that the functions f_1 and f_2 converge, so we shalf find an approximate solution by a method as shown in the following examples

We consider the same plate as in the foregoing example, and treat first the case of $\vartheta = \pi/4$, since the procedure is quite similar in other cases. As the first approximation, assuming

$$A_2 = B_2 = A_2' = B_2' = A_3 = B_3 = A_3' = B_3' = \cdots = 0,$$

we find from equations (18), (19), and (20)

$$\begin{split} &C_1 = 0.0000824 \ q, \quad C_4 = 0.000218 \ q, \\ &C_2 = 0.0000242 \ q, \quad C_5 = 0.002361 \ q, \\ &C_3 = 0.001013 \ q, \quad C_6 = -0.001985 \ q \ b^2, \quad C_9 = 0.012291 \ q \ b^4. \end{split}$$

At the boundary, w vanishes but M_{α} does not vanish, and the boundary condition is not fully satisfied. The residual bending moment at the boundary i

$$M_{\alpha} = - \; \frac{0 \cdot 0074 \, \cos 4 \, \beta + \, 0 \cdot 0046 \, \sin 4 \, \beta}{1 \cdot 250 - \, \cos 2 \, \beta} \; q \; b^2.$$

As the second approximation, assuming

$$A_3 = B_3 = A_3' = B_3' = A_4 = B_4 = A_4' = B_4' = \cdots = 0,$$

we have

$$\begin{split} &C_1 = 0.0000935 \ q, \quad C_4 = 0.000219 \ q, \qquad C_7 = -0.000224 \ q \ b^2, \\ &C_2 = 0.0000249 \ q, \quad C_5 = 0.002332 \ q, \qquad C_8 = -0.013406 \ q \ b^2, \\ &C_3 = 0.001060 \ q, \qquad C_6 = -0.002088 \ q \ b^2, \quad C_9 = 0.011194 \ q \ b^4, \end{split}$$

$$A_2 = (0.0004465 - 0.0003158 \ i) \ q \ b^2, \qquad B_2 = (0.0004465 + 0.0003158 \ i) \ q \ b^2,$$

$$A_2' = (-0.0000297 - 0.0000198 \ i) \ q \ b^2,$$

$$A_2' = (-0.0000297 - 0.0000198 \ i) \ q \ b^2,$$

and the residual moment is

$$M_{\alpha} = \frac{0.0052 \cos 6 \, \beta - \, 0.0040 \sin 6 \, \beta}{1.250 - \cos 2 \, \beta} \cdot q \; b^2.$$

In the same manner, we have the residual bending moments for the second approximation, in the cases of $\vartheta = 0$ and $\pi/2$,

$$M_{\alpha} = - \, rac{0 \cdot 0037 \cos 6 \, eta}{1 \cdot 250 - \cos 2 \, eta} \, q \, b^2$$
, and $M_{\alpha} = - \, rac{0 \cdot 0078 \cos 6 \, eta}{1 \cdot 250 - \cos 2 \, eta} \, q \, b^2$,

pectively. The bending moments at the center of the plate, where

$$z = z' - z = 0, \quad \beta = \beta' - \beta' - g = \frac{\pi}{2}$$
.

$$= -\frac{1}{2} \left\{ D_{1} + D_{2} - (D_{1} - D_{2}) \cos 2 \vartheta \right\} \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}}$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ D_{2} + D_{3} - (D_{2} - D_{3}) \cos 2 \vartheta \right\} \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} - D_{1} \sin 2 \vartheta \frac{\partial^{2} u}{\partial x \partial y},$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ D_{1} + D_{2} + (D_{1} - D_{2}) \cos 2 \vartheta \right\} \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}}$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ D_{2} + D_{3} + (D_{2} - D_{3}) \cos 2 \vartheta \right\} \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} + D_{4} \sin 2 \vartheta \frac{\partial^{2} w}{\partial x \partial y},$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ (D_{1} - D_{2}) \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + (D_{2} - D_{3}) \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} \right\} \sin 2 \vartheta$$

$$- D_{4} \cos 2 \vartheta \frac{\partial^{2} w}{\partial x \partial y},$$

$$(21)$$

hich

$$\begin{split} \frac{\sigma^2 w}{\partial x^2} &= 2 \, C_6 \cos^2 \vartheta + 2 \, C_7 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 \, C_8 \sin^2 \vartheta + A_2 + B_2, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 2 \, C_6 \sin^2 \vartheta - 2 \, C_7 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 \, C_8 \cos^2 \vartheta - A_2 \, k_1^2 - B_2 \, k_2^2, \\ \frac{\sigma^2 w}{\partial x \, \partial y} &= - \, C_6 \sin 2 \, \vartheta + C_7 \cos 2 \, \vartheta + C_8 \sin 2 \, \vartheta - A_2' \, k_1 - B_2' \, k_2. \end{split}$$

Substituting the numerical values of the constants for the second approxion into (21), we have the bending moments for $\vartheta = \pi/4$, as

$$M_{\alpha} = 0.4241 \; q \; b^2, \quad M_{\beta} = 0.2764 \; q \; b^2, \quad M_{\alpha\beta} = - \; 0.0956 \; q \; b^2.$$

In the same manner, we have the bending moments for $\vartheta=0$ and $\pi/2$, as

$$\begin{split} & M_{\alpha} = 0.4572 \ q \ b^2, \quad M_{\beta} = 0.1607 \ q \ b^2, \quad M_{\alpha\beta} = 0, \quad (\vartheta = 0), \\ & M_{\alpha} = 0.4088 \ q \ b^2, \quad M_{\beta} = 0.3689 \ q \ b^2, \quad M_{\alpha\beta} = 0, \quad \left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right). \end{split}$$

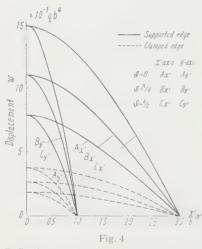
From the foregoing calculations, it may be seen that the residual moment smaller quantity compared with the maximum moment, and it decreases the according as we take more terms in the series in (17), and so if we take a few terms of the series we can find an approximate solution with sufficient racy.

Next, we shall find the deflections on the axes of x' and y', using the solution for the second approximation. On the axis of x', we have

$$w = \frac{4}{15} \left(\frac{A_2}{c'^4} + \frac{B_2}{c''^4} \right) x'^6 + \left\{ C_1 - \frac{2}{3} \left(\frac{A_2}{c'^2} + \frac{B_2}{c''^2} \right) \right\} x'^4 + \left\{ C_6 + \frac{1}{2} \left(A_2 + B_2 \right) \right\} x'^2 + C_9 - \frac{1}{12} \left(A_2 c'^2 + B_2 c''^2 \right),$$
 (2)

and on the axis of v', it becomes

$$w = -\frac{4}{15} \left(\frac{A_2 k_1^6}{c'^4} + \frac{B_2 k_2^6}{c''^4} \right) y'^6 + \left\{ C_5 - \frac{2}{3} \left(\frac{A_2 k_1^4}{c'^2} + \frac{B_2 k_2^4}{c''^2} \right) \right\} y'^4 + \left\{ C_8 - \frac{1}{2} \left(A_2 k_1^2 + B_2 k_2^2 \right) \right\} y'^2 - C_9 - \frac{1}{12} \left(A_2 c'^2 + B_2 c''^2 \right).$$
 (Z



Deflections on the axes of an oak plate with a supported or clamped edge, when a = 3 b.

The deflections on the axes of and y', calculated from equations (2) and (23), are shown in figure 4. For t convenience of comparison, the defle tions for a plate with a clamped edit are also shown by dotted lines in the same figure.

Acknowledgement

The writer takes this opportunity to express his hearty thanks to Prof Dr. H. Okubo of the Tohoku University for his kind guidance throughout the investigation.

Zusammentassung

Der Verfasser löst das Biegeproblem für eine dünne elliptische Platte als orthotropem Material unter einer gleichmässigen Querlast. Er gibt Lösung für zwei Hauptfälle an, nämlich für eingespannten und aufgelegten Rand, vid zwar unter der Voraussetzung, dass die Symmetrieachsen des Materials nicht rid den Ellipsenachsen zusammenfallen.

Als Beispiel wird eine Eichenplatte numerisch durchgerechnet, die para is zu den Fasern geschnitten ist und das Achsenverhältnis 3:1 besitzt; die Erg. nisse werden mit denjenigen der isotropen Platte verglichen.

(Received: October 17, 1951.)

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes

Von Max Beck, Zürich¹)

1. Einleitung

Damit, dass die Zahl der nichtkonservativen Stabilitätsprobleme viel kleiner als die der konservativen und dass sie in der Praxis relativ selten auftreten, et es sich wohl erklären, dass sie meist ziemlich stiefmütterlich behandelt werden. ist zum Beispiel die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrück-Stabes (Figur 1) noch nie einwandfrei berechnet worden. Dieses Stabilitätsblem wird zwar mehrfach erwähnt²), wobei das Resultat, dass hier keine ickgefahr bestehe, den Leser überrascht. Die vorliegende Arbeit wird nun er zeigen, dass eine endliche Knicklast existiert.

Die Anregung, dieses Stabilitätsproblem wieder aufzugreifen, gab eine Unterhung von H. Ziegler³), in der er zeigt, dass nichtkonservative Stabilitätsbeleme nur mit dem kinetischen Stabilitätskriterium behandelt werden dürfen, ich diesem ist die kritische die kleinste Last, unter der nicht mehr jede kleine Grung zu einer Bewegung in der nächsten Umgebung der Gleichgewichtslage art. Das statische Kriterium, das nach der kleinsten Last fragt, für die eine httriviale Gleichgewichtslage existiert, kann hier zu ganz falschen Resultaten aren, während es bei konservativen Problemen mit dem kinetischen Kriterium uivalent ist. Diese Tatsache wurde bis jetzt nicht beachtet, und so ist auch der gential gedrückte Stab nur statisch untersucht worden.

2. Die Differentialgleichung

Für das Studium der kleinen Bewegungen des ursprünglich vertikalen Stabes Figur 2 dürfen die Funktion y(x,t), die die elastische Linie wiedergibt, und Ableitungen als von erster Ordnung klein angenommen werden, und es ist aubt, von höherer Ordnung kleine Glieder zu vernachlässigen. Die Differentialchung der elastischen Linie lässt sich gleich wie in der Statik ableiten, wenn der Ermittlung der Beanspruchung der Stabquerschnitte auch die Trägheitsfte berücksichtigt werden:

$$dT(\xi) = \ddot{y}(\xi, t) \varrho F d\xi.$$

Dichte ϱ soll im folgenden längs des Stabes konstant sein, ebenso die Biegefigkeit α . Mit den Bezeichnungen von Figur 2 wird nach der Festigkeitslehre Stabkrümmung y'' bestimmt durch die Beziehung:

$$\alpha \ y'' = P'[y(l) - y(x)] - H(l-x) - \int_{x}^{r} \dot{y}(\xi, t) \ (\xi - x) \ \varrho \ F \ d\xi. \tag{1}$$

¹⁾ Assistenz für technische Mechanik, ETH.

L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (Geest & Portig, Leipzig 1949),
 A. O. PELÜGER, Stabilitätsprobleme der Elastostatik (Springer, Berlin, Göttingen und Heidelberg

³⁾ H. Ziegler, Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ing.-Arch. 20, 49 (1952).

P' ist in erster Näherung gleich der tangentialen Druckkraft P; in den Knich fällen der Figuren 3a und 3b liefert auch die Lagerreaktion einen Beitrag zu P Leitet man (1) zweimal nach x ab, so erhält man für die kleinen Schwingunge des Stabes die Differentialgleichung

$$\alpha y^{IV} + P y'' + \varrho F \ddot{y} = 0.$$

Da sie H nicht enthält, gilt sie auch für den durch eine axiale Kraft belastete Stab. Die Lagerung der Stäbe der Figuren 3a und 3b liefert die gleichen Randbedingungen für eine axiale wie für eine tangentiale Druckkraft, so dass d Eigenschwingungen dieselben sind. Die bekannten Eulerschen Knicklasten gelte hier also auch für die entsprechenden nichtkonservativen Knickfälle.

Im freien Stabende verschwindet bei tangentialer Belastung sowohl de Querkraft Q als auch das Biegemoment, während bei axialem Druck Q von Nu verschieden ist. Die Lösungen von (2) müssen für den Stab der Figur 1 also de Randbedingungen

y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0

erfüllen.

3. Bestimmung der Knicklast; Diskussion

In der partiellen Differentialgleichung (2) lassen sich mit dem Produktansals

$$y(x, t) = Y(x) T(t)$$

die Variablen trennen, wobei man mit einem Exponentialansatz sowohl für wie T die allgemeine Lösung findet:

$$y(x, t) = A_0 e^{\lambda x} e^{i\omega t}.$$

Damit wird (2) zur charakteristischen Gleichung:

$$\alpha \lambda^4 + P \lambda^2 - \varrho F \omega^2 = 0.$$

Mit den Abkürzungen

$$p = \frac{P}{\alpha}; \quad a = \frac{\varrho F}{\alpha}; \quad \lambda_1 = \sqrt{\sqrt{4 \ a \ \omega^2 + p^2 - p}} \ ; \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{4 \ a \ \omega^2 + p^2 + p}}{2}}$$

lautet die allgemeine Lösung für Y:

$$Y(x) = A \cosh(\lambda_1 x) + B \sinh(\lambda_1 x) + C \cos(\lambda_2 x) + D \sin(\lambda_2 x).$$

Zur Ermittlung der vier Konstanten A, B, C und D geben die Randbedingung n (3) vier homogene lineare Gleichungen, die nur dann eine nichttriviale Lösu besitzen, wenn sie voneinander linear abhängig sind. Das ist der Fall, wenn de Eigenwertgleichung

$$0 = f(\omega^{2}, p) = (2 \ a \ \omega^{2} + p^{2}) + 2 \ a \ \omega^{2} \cosh(\lambda_{1} \ l) \cos(\lambda_{2} \ l) + \sqrt{a \ \omega^{2}} \ p \sinh(\lambda_{1} \ l) \sin(\lambda_{2} \ l)$$

erfüllt ist. Sie ordnet jeder Belastung P unendlich viele diskrete Eigenfrequenzen in Nimmt P von Null an zu, so ist die kritische Belastung dann erreicht, we zum erstenmal $\omega=0$ die Gleichung (4) erfüllt oder wenn (4) für ω eine Doppelwurzel besitzt. Im ersten Fall existiert eine Lösung

$$y(x, t) = y(x),$$



Fig. 1 Der einseitig eingespannte, im freien Ende Zur Berechnung des Biegemoments im

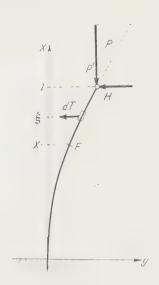


Fig. 2 Stabquerschnitt F.



Fig. 3 Zwei weitere Knickfälle ter tangentialem Druck.

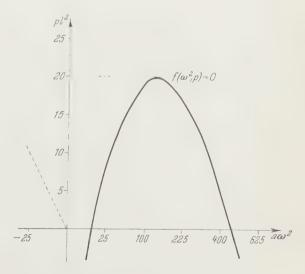


Fig. 4 Bestimmung der Knicklast aus der Eigenwertgleichung.

also eine nichttriviale Gleichgewichtslage. Die so gefundene Knicklast hätte auch statisch ermittelt werden können. Im Falle einer Doppelwurzel kann y die Form

 $y(x, t) = Y(x) t \sin(\omega t)$

annehmen. Die nichtkonservative Druckkraft leistet bei dieser Bewegung Arbeit, so dass die Amplitude der Schwingung immer grösser wird. Eine solche Knicklast kann nur mit dem kinetischen Kriterium gefunden werden.

Gleichung (4) besitzt für kein endliches P eine Lösung mit $\omega=0$. In einem Koordinatensystem mit ω^2 als Abszisse und p als Ordinate (Figur 4) wird (4) durch eine unendliche Zahl von Kurvenästen wiedergegeben, die aus dem vierten Quadranten aufsteigen, im ersten Quadranten ein Maximum erreichen und wieder in den vierten zurückfallen. Das der Ordinatenachse nächste Maximum, das in Figur 4 wiedergegeben ist, besitzt den kleinsten p-Wert und bestimmt damit die Knicklast. Die numerische Auswertung von (4) ergibt:

$$P_{L} = 20.05 \frac{\alpha}{l^2}$$
.

Beim einseitig eingespannten, im freien Ende tangential gedrückten Stab ist also die Knickkraft achtmal grösser als die entsprechende Eulersche Knicklast. Lässt man die axiale Druckkraft über gemischte Belastungen stetig in eine tangentiale übergehen, so wird dieser hohe Wert verständlich.

Das hier gefundene Resultat gilt vorläufig nur für einen idealen, dämpfungsfreien Stab. H. Ziegler!) hat gezeigt, dass bei nichtkonservativen Systemen die geringste Dämpfung die Knicklast unter Umständen erheblich verkleinern kann. Es wird beim vorliegenden Problem aber nicht ganz einfach sein, einen physikalisch einwandtreien Ansatz für die Dämpfung zu finden, der die mathematischen Schwierigkeiten nicht beträchtlich erhöht.

Summary

The author calculates the buckling load of a built-in free rod subjected to tangential end-thrust. As this stability problem is nonconservative, it cannot be solved by the usual static methods. Investigation of the free vibrations under F yields the buckling load $P_k = 20{,}05~\alpha/l^2$ (α : flexual rigidity, l: length). (Damping forces are not taken into account; they might diminish the actual critical load). (Eingegangen: 28.1.1952.)

Bergmans Integraloperator erster Art und Riemannsche Funktion

Von Peter Henrici, Washington, D. C.²)

Zur Integration linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus hat St. Bergman den Begriff der vollständigen Lösungssysteme entwickelt³). Darunter werden Systeme von Partikulärlösunger

¹⁾ H. Ziegler, Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ing.-Arch. 20, 49 (1952).

²) American University. Die folgenden Untersuchungen wurden gemäss einem Vertrage zwischen der American University und dem National Bureau of Standards. Washington, mit Förderung des Flight Research Laboratory, U.S. Air Force, ausgeführt.

³⁾ Vgl. St. Bergman, The Kernel Function and Conformal Mapping, Amer. Math. Soc. 1954 S. 112 ff., sowie die dort angegebene Literatur.

der vorgelegten Differentialgleichung verstanden mit der Eigenschaft, dass sich jede regulare Lösung der Gleichung durch eine endliche Anzahl dieser Partikulär-

lösungen beliebig genau approximieren lässt.

Die Existenz solcher vollständiger Lösungssysteme kann durch die Betrachtung gewisser Minimalprobleme bewiesen werden. Dieser Beweis enthält jedoch keine explizite Vorschrift zur effektiven Konstruktion der Systeme. Bergman behebt diesen Nachteil im Falle eines einfach zusammenhängenden Grundgebietes \mathfrak{G} , indem er gewisse lineare Integraloperatoren $\Omega[f]$ angibt, die die Gesamtheit der in \mathfrak{G} regulären Funktionen einer komplexen Variablen auf die Gesamtheit der in \mathfrak{G} regulären reellen Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung abbildien. Aus der Vollständigkeit der Funktionen \mathbb{S}^n $(n=0,1,2,\ldots)$ für die analytischen Funktionen einer Variablen folgt dann die Vollständigkeit der Funktionen $\Omega[\mathfrak{S}^n]$ für die Lösungen der Differentialgleichung.

Insbesondere definiert Bergman den Integraloperator erster Art durch die folgende Eigenschaft: Das Urbild einer Lösung u(x, y) der Differentialgleichung

sei, wenn

$$z = x + i y$$
, $z^* = x - i y$ und $u(x, y) = U(z, z^*)$

gesetzt wird, gegeben durch U(z, 0). Für diesen Operator erster Art werden verschiedene Reihendarstellungen gegeben.

Im folgenden wird darauf hingewiesen, dass dieser Operator auf das engste mit der Riemannschen Integrationsmethode hyperbolischer Differentialgleichungen zusammenhängt und sich ausserdem in einfacher Weise durch die Grundlösung der betrachteten Differentialgleichung ausdrücken lässt.

Die gegebene Differentialgleichung sei

$$[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = 0.$$
 (1)

Wir setzen mit Bergman voraus, dass a, b und c ganze analytische Funktionen des Punktes P=(x,y) sind. Nach klassischen Sätzen existiert zu (1) für jeden Punkt $Q=(\xi,\eta)$ eine Grundlösung von der Form

$$v(P, Q) = r(P, Q) \log P\overline{Q} + s(P, Q), \quad PQ = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$
 (2)

welche als Funktion von P der zu (1) adjungierten Differentialgleichung

$$m = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial (a \, v)}{\partial x} - \frac{\partial (b \, v)}{\partial y} + c \, v = 0 \tag{3}$$

genügt. Mit den Koeffizienten von (1) sind auch r und s ganze analytische Funktionen von P und Q; ferner ist

r(P, P) = 1. (4)

Mit Hilfe der Grundlösung lässt sich jede in einem elementaren Gebiet der reellen (x, y)-Ebene zweimal stetig differenzierbare Lösung von (1) darstellen durch

 $u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathfrak{G}} \left\{ \left[v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} + a u v \right] \cos(n, \xi) + \left[v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} + b u v \right] \cos(n, \eta) \right\} ds_{Q},$ (5)

vo u = u(Q) und v = v(Q, P) gesetzt ist und der Punkt Q den Rand $\partial \mathfrak{G}$ von \mathfrak{G} mit der innern Normalen n) durchläuft. Aus (5) folgt, dass u(P) in \mathfrak{G} analytisch

ist. Darüber hinaus leistet (5) auch die analytische Fortsetzung von u in jenes Gebiet des komplexen (x, y)-Raumes, in welches die analytische Fortsetzung des logarithmischen Faktors $\log QP$ von v für alle Punkte Q auf $\partial \mathfrak{G}$ möglich ist. Führen wir die Variablen

$$z = x + i y$$
, $\zeta = \xi + i \eta$, $z^* = x - i y$, $\zeta^* = \xi - i \eta$, (6)

ein, so wird

$$\log PQ = \log \sqrt{(z - \zeta)} (z^* - \zeta^*),$$

und wir erkennen, dass der Logarithmus nur für $z\in\partial\mathfrak{G}$ oder $z^*\in\partial\mathfrak{G}$ singulär wird. Damit gewinnen wir

Satz I^1): Die analytische Fortsetzung von u ist möglich nach allen Punkten (z, z^*) des kartesischen Produktes $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ des Gebietes \mathfrak{G} und seines konjugiert komplexen Gebietes \mathfrak{G}^2).

És liegt nun nahe, die Transformation (6) schon in (1) vorzunehmen. Eine kurze Rechnung ergibt, dass, wenn

$$u(x, y) = U(z, z^*), \quad a(x, y) = A(z, z^*), \dots$$

und

$$\frac{1}{4}(A + i B) = D$$
, $\frac{1}{4}(A - i B) = E$ und $\frac{1}{4}C = F$

gesetzt wird, (1) dann übergeht in

$$L[U] \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial z^*} + D \frac{\partial U}{\partial z} + E \frac{\partial U}{\partial z^*} + F U = 0.$$
 (7)

D, E und F sind wieder ganze Funktionen von z und z*. Eine entsprechende Rechnung ergibt für (3) die zu (7) adjungierte Gleichung

$$M[V] \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial z^*} - \frac{\partial (D V)}{\partial z} - \frac{\partial (E V)}{\partial z^*} + F V = 0.$$
 (8)

(7) ist eine in z und z^* hyperbolische Differentialgleichung. Beschränken wir uns für den Augenblick auf reelle Werte von z und z^* , so können wir sie mit Hilfe der Riemannschen Integrationsmethode integrieren. Insbesondere können wir so das charakteristische Problem lösen, das heisst diejenige Lösung von (7) bestimmen, die auf je einer Charakteristik der beiden Scharen die in der Normalform (7) durch z= const und $z^*=$ const gegeben sind] gegebene Werte annimmt Verlegen wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Schnittpunkt der Anfangscharakteristiken und schreiben wir

$$U(z, 0) = f(z), \quad U(0, z^*) = f^*(z^*) \quad [f(0) = f^*(0)]$$

vor, so ist die Lösung³) des charakteristischen Problems gegeben durch

¹⁾ Vgl. St. Bergman, Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichum befriedigen, Recueil math. [nouv. s.] 2, 1169-1198 (1939).

²) \mathfrak{G} bedeutet jetzt das dem soeben betrachteten Gebiet \mathfrak{G} der reellen (x, y)-Ebene vermög der Abbildung $(x, y) \rightarrow z = x + i \ y$ entsprechende Gebiet der Gaussschen Ebene.

³⁾ R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. 2 (Springer, Berlii 1937), S. 316.

$$U(\zeta, \zeta^*) = F(0, 0; \zeta, \zeta^*) = f(0) + \int_0^{\zeta} F(z, 0; \zeta, \zeta^*) \left[\frac{\partial f}{\partial z} + E(z, 0) f \middle| dz \right]$$

$$\int_0^{\zeta} F(0, z^*; \zeta, \zeta^*) \left[\frac{\partial f^*}{\partial z^*} + D(0, z^*) f^* \right] dz^*$$

$$\equiv \Omega^{\zeta} f, f^{*\zeta}.$$
(10)

Hier bedeutet $F(z, z^*; \zeta, \zeta^*)$ die sogenannte Riemannsche Funktion der Gleichung (7), die den folgenden Bedingungen genügt:

(a)
$$M[F] = 0$$
 in bezug auf z und z^* ;
(b) $\frac{\partial F}{\partial z}(z, z^*; \zeta, z^*) - E(z, z^*) F(z, \zeta^*; \zeta, \zeta^*) \equiv 0$ in z , ζ und ζ^* ;
(c) $\frac{\partial F}{\partial z^*}(\zeta, z^*; \zeta, \zeta^*) - D(\zeta, z^*) F(\zeta, z^*; \zeta, \zeta^*) \equiv 0$ in z^* , ζ und ζ^* ;
(d) $F(\zeta, \zeta^*; \zeta, \zeta^*) \equiv 1$ in ζ und ζ^* .

Diese Riemannsche Funktion ist aber, wie schon Hadamard¹) bemerkt hat, identisch mit dem gemäss (6) transformierten Koeffizienten des Logarithmus in der Grundlösung (2) von (1), das heisst, es gilt

$$F(z, z^*; \zeta, \zeta^*) \equiv R(z, z^*; \zeta, \zeta^*) \equiv r(x, y; \xi, \eta) . \tag{12}$$

Der Beweis dieses überraschenden Sachverhaltes fliesst sehr einfach aus dem Umstand, dass kraft (3) und (6) $V(z,z^*;\zeta,\zeta^*)=v(x,y;\xi,\eta)$ der Differentialgleichung (8) genügt:

$$\begin{split} M[V] &= M[R] \log \sqrt{(z-\zeta)} \, \left(z^* - \zeta^*\right) + \frac{1}{2 \, (z-\zeta)} \left[\frac{\partial R}{\partial z^*} - D \, R \right] \\ &+ \frac{1}{2 \, (z^* - \zeta^*)} \left[\frac{\partial R}{\partial z} - E \, R \right] + \text{reguläre Funktion} = 0 \; . \end{split}$$

Durch Vergleich der Singularitäten auf beiden Seiten und unter Berücksichtigung von (4) folgen hieraus für R die Bedingungen (11). Wegen der (klassischen) eindeutigen Bestimmtheit der Riemannschen Funktion folgt hieraus (12). Insbesondere ist damit auch gezeigt, dass die Riemannsche Funktion der Gleichung (7) eine ganze Funktion ist. Damit ergibt sich

Satz II. Wählt man f(z) und $f^*(z^*)$ als in \mathfrak{G} bzw. \mathfrak{G} analytische Funktionen, so ist die durch (10) (mit F=R) definierte Funktion $U(\zeta,\zeta^*)$ in $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ analytisch. Speziell ist sie auch für $\zeta^*=\zeta$, das heisst im reellen Gebiete \mathfrak{G} , regulär.

Aus den Sätzen I und II ergibt sich, dass die Formeln (9) und (10) eine eineindeutige Abbildung der Menge der in $\mathfrak G$ regulären Lösungen von (1) auf die Menge der Paare (f,f^*) von in $\mathfrak G$ bzw. $\mathfrak G$ regulären Funktionen einer Variablen [mit $f(0)=f^*(0)$] liefern. Da gemäss (10) $\Omega[f,f^*]$ stetig und linear von f und f^* abhängt, folgt damit auch die Vollständigkeit des Systems

$$\{\Omega[z^n, 0], \Omega[0, z^{*m}]\}.$$
 $(n = 0, 1, 2, ...; m = 1, 2, ...)$

¹⁾ COURANT-HILBERT, l. c., S. 431.

Wenn die Grundlösung von (1) bekannt ist – und das ist bei vielen physikalischen Problemen der Fall –, so kann der Operator (10) in geschlossener Form dargestellt werden. Ist u(x, y) für reelle x und y reell, so ist $U(0, z^*) = U(z^*, 0)$, und (9) wird mit der Umkehrformel für den Operator erster Art identisch. Daraus folgt die Identität von (10) mit diesem Operator¹).

Es ist sehr instruktiv, die geschilderten Verhältnisse am Beispiel der Wellengleichung zu verfolgen. Wir hoffen, diese Diskussion an anderer Stelle geben zu

können.

Summary

St. Bergman transforms by means of the so-called Integral Operator of the first kind analytic functions of one complex variable into solutions of a given partial differential equation of elliptic type. It is shown in the present paper that this transformation can be interpreted as the solution of a certain hyperbolic equation by Riemann's method. Furthermore, Bergman's operator is expressed in terms of the fundamental solution of the considered elliptic equation.

(Eingegangen: 26. 2. 1952.)

Zum Ergodenproblem

Von Rudolf Kurth, Bern²)

Übersicht

Auf die Frage nach der Ersetzbarkeit des Zeitmittels einer Phasenfunktion durch ihr Phasenmittel (§ 1) wird eine elementare, aber für die konkreten Anwendungen noch am ehesten brauchbare Antwort gegeben (§§ 2 und 3). Der Erwartungswert der mittleren Verweilzeit ist dem durchlaufenen Volumen zwar proportional, aber die individuellen Abweichungen können relativ gross sein (§ 4).

§ 1. Die Fragestellung

Es liege ein mechanisches System von endlich vielen Freiheitsgraden vor. Seine Hamilton-Funktion sei von der Zeit t unabhängig. Die Hamiltonschen Gleichungen mögen bei beliebig vorgegebenen Anfangswerten für alle t eine eindeutige, stetig differenzierbare Lösung besitzen. Sie definieren dann im Phasenraume Γ eine einparametrige Transformationsgruppe – anschaulich gesprochen: eine stationäre Strömung. J schliesslich sei eine dieser Gruppe gegenüber invariante Teilmenge des Phasenraumes; sie sei (Lebesgue) messbar und von beschränktem positivem Masse.

2) Astronomisches Institut der Universität Bern.

¹⁾ Bergmans Operator zweiter Art (vgl. etwa St. Bergman, The Approximation of Functions: Satisfying a Linear Partial Differential Equation, Duke math. J. 6, 537–561 [1940]) kann in folgender: Weise als Modifikation des Operators erster Art gedeutet werden: Die Menge der Paare (f, f^*) wird nicht direkt auf die Menge (L) der Lösungen von (1), sondern zunächst in nichttrivialer Weise auf sich selbst und erst dann auf (L) abgebildet, was gelegentlich (zum Beispiel im Falle der Differentialgleichung der kompressiblen Flüssigkeiten) rechnerische Vereinfachungen mit sich bringt.

Übrigens genügt es für das folgende, wenn die Gruppe nur für fast alle An-

fangspunkte $x \in I$ definiert ist.

 $f_0(x), x \in J$, sei nun irgendeine in J definierte und summable Funktion (eine «Phasenfunktion»). Bedeutet x(t) das von der Gruppe zur Zeit t erzeugte Bild des Anfangspunktes x und f(x,t) die Funktion $f_0[x(t)]$, so lautet eine Folgerung aus dem Liouvilleschen Satze: f(x,t) ist über J summierbar, und es ist

$$\int_{\dot{J}} f(x, t) dx = \int_{\dot{J}} f_0(x) dx.$$

Darin ist enthalten: Die Strömung ist inkompressibel. Ferner gilt der Satz von Віккногг: Das «Zeitmittel»

$$\hat{f} = \lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} f(x, \tau) d\tau$$

existiert für fast alle $x \in I$.

Vielfach ist es üblich, J auf einer Fläche konstanter Energie zu wählen. Begriffe und Sätze sowie der folgende Satz übertragen sich auf diesen Fall ohne weiteres bei Einführung eines invarianten Flächenmasses.

Die Ergodenhypothese besagt nun: Das Zeitmittel ist für fast alle $x \in J$

gleich dem «Phasenmittel» fo, definiert durch

$$I_0 = \frac{\int_J f_0(x) \, dx}{\int_J dx} \, .$$

Es ist bekannt: Die Hypothese gilt dann und nur dann, wenn J «metrisch unterlegbar» (metrisch transitiv) ist. Metrische Unzerlegbarkeit bedeutet: Für jede nessbare invariante Teilmenge $J' \subset J$ ist entweder J' oder J - J' Nullmenge.

Indessen kennt man kein allgemeines Kriterium für metrische Unzerlegbareit. So scheint durch die neue Formulierung der zu beweisenden Behauptung venigstens bis jetzt kaum etwas gewonnen zu sein.

§ 2. Zur Antwort

Zunächst: Die Ergodenhypothese gilt sicherlich nicht allgemein – und vor llem nicht in den für die Anwendung wichtigen Fällen: Für die meisten «verünftigen» mechanischen Systeme gelten die Sätze von der Erhaltung des mpulses und des Drehimpulses, und für deren Komponenten trifft die Behaupung $\hat{f} = f_0$ im allgemeinen nicht zu. Die entsprechenden invarianten Teilmengen nd metrisch zerlegbar.

Vergegenwärtigen wir uns den Zweck der Ergodenhypothese: Es soll die rsetzung des in der statistischen Mechanik benötigten, gewöhnlich aber unbeunnten Zeitmittels durch das leichter zu berechnende Phasenmittel gerechtfertigt erden. In der erstrebten Weise ist das allgemein also nicht möglich. Aber in

iderer. Der folgende Satz gibt hierüber Auskunft:

Satz: 1. Der Erwartungswert des Zeitmittels (das ist sein Phasenmittel) ist gleich m Phasenmittel der Phasenfunktion selbst. 2. Die mittlere Abweichung der Zeitmittel gegen ihren Erwartungswert ist höchstens gleich der mittleren Abweichung der Phasenfunktion gegen ihr Phasenmittel.

3. Diese Abschätzung kann allgemein nicht mehr verschärft werden.

In Zeichen:

1.
$$\hat{f} = f_0$$
 für alle f_0 ;
2. $(\hat{f} - \hat{f})^2 \le (f_0 - f_0)^2$ für alle f_0 ;
3. $(\hat{f} - \bar{f})^2 = \overline{(f_0 - f_0)^2}$ für mindestens ein f_0 .

Der Satz ermöglicht also die Anwendung der naturwissenschaftlichen Methode: Ersetzung eines unbekannten Individualwertes durch den bekannten Erwartungswert und Abschätzung des mittleren Fehlers.

Beweis: Alle hingeschriebenen Mittelwerte existieren auf Grund der Voraussetzungen und den Sätzen von Liouville und Birkhoff zufolge. Es ist nun

1.
$$\hat{\bar{f}} = \hat{f} = \hat{f_0} = f_0$$

nach dem Liouvilleschen Satze.

2.
$$(\hat{f} - \bar{f})^2 = (\hat{f} - \overline{f_0})^2 = \hat{f}^2 - \overline{f_0}^2$$

nach 1. Mittels der Schwarzschen Ungleichung folgt weiter

$$\begin{split} \hat{f}^2 & \leq \hat{f^2} \;, \\ \hat{f}^2 & \leq \hat{f^2} = f_0^2 \;, \\ (\hat{f} - \hat{f})^2 & \leq f_0^2 - f_0^2 = (f_0 - f_0)^2 \;. \end{split}$$

3. Man wähle für f_0 ein zeitunabhängiges erstes Integral der Hamiltonsche Gleichungen, etwa eine Komponente des Drehimpulses.

§ 3. Korollar

Der bewiesene Satz gilt wörtlich auch für Zeitmittel über beliebige beschränk-Zeitintervalle. Ferner auch für Phasenmittel, die mit irgendeiner in J definierte positiven summierbaren invarianten Belegungsfunktion $\mu(x)$ gebildet werder für die Invarianz ist hinreichend und unerlässlich, dass μ allein von zeitunabhärgigen ersten Integralen der Hamiltonschen Gleichungen abhängt.

Die erste Bemerkung schränkt die Bedeutung des Birkhoffschen Satzes f die Anwendungen ein. Die zweite kann wichtig werden, wenn es nicht geling eine in Betracht kommende invariante Teilmenge $J \subset \Gamma$ mit beschränkte positivem Masse wirklich zu bestimmen. Dann suche man mittels einer geeignet Belegungsfunktion dem ganzen Phasenraume I ein endliches Mass zu geben unsetze $J = \Gamma$.

§ 4. Anwendung

M sei eine messbare Teilmenge von J und $\varphi_M(x)$ ihre charakteristische Furtion:

$$\varphi_M(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für} & x \in M \;, \\ 0 & \text{für} & x \in J - M \;. \end{array} \right.$$

Dann ist für $f_0(x) \equiv q_M(x)$

$$t_0 = \frac{\text{Mass von } M}{\text{Mass von } J} = \frac{|M|}{|J|} = p$$

die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Punkt $x \in J$ zu M gehört. Ferner ist

$$\hat{f} \qquad \text{Zeitdauer, für die } t \in T \text{ und } \varkappa(t) \in M \\ |T| = \tau$$

die relative Verweilzeit des auf der Bahnkurve durch x laufenden Phasenpunktes x(t) in der Menge M; |T| bedeutet hierbei die Länge des bei der Zeitmittelung zugrunde gelegten Zeitintervalls T. Der Satz in § 2 liefert für die relative Verweilzeit unmittelbar die beiden Aussagen

$$\tau - f$$
, $(\tau - \tau)^2 \leq f(1 - f)$.

Die Behauptung " $\tau = p$ für fast alle $x \in J$ " trifft nur in Sonderfällen zu, zum Beispiel bei Systemen mit nur einem Freiheitsgrade und fest vorgegebener Energie. Im allgemeinen ist sie durch die soeben gemachten Aussagen zu ersetzen.

Die Fehlerabschätzung lässt sich nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen verschärfen, wie das Beispiel des harmonischen Oszillators zeigt: Für J und M wählen wir das Innere je einer Bahnellipse, und zwar so, dass

$$M = \frac{1}{2} / .$$

Dann ist

$$\begin{split} \tau &= \varphi_M(x) \, \neq \not p \text{ für alle } x \in J \;, \\ \bar{\tau} &= \; \frac{1}{2} \quad = \not p \;, \\ |\tau - \bar{\tau}| &= \; \frac{1}{2} \;, \\ I'(\overline{\tau - \bar{\tau}})^{\frac{1}{2}} &= \; \frac{1}{2} \; = \not | \not p \; (1 - \not p) = \underset{0 < \, q \leq 1}{\operatorname{Max}} \not | \not q \; (1 - q) \;. \end{split}$$

LITERATURVERZEICHNIS

A. J. KHINCHIN, Mathematical Foundations of Statistical Mechanics (Verlag, New York 1949).

E. Hopf, Ergodentheorie (Verlag, Berlin 1937). Hier auch weitere Literaturhinweise.

Summary

Let J be a measurable invariant part of the phase space of a given mechanical system, and let J habe the positive finite measure |J|. For J the following elementary statements are proved: (1) The mathematical expectation of the time average of any phase function coincides with its phase average. (2) The dispersion of the time average is not larger than that of the phase function. (3) The mathematical expectation of the time τ of running through a measurable set $M \subseteq J$ equals p = |M|/|J|. (4) The dispersion of τ is $\leq \sqrt{p} (1-p)$. (5) Generally the limits (2) and (4) cannot be reduced.

Eingegangen: 15, 1, 1952.)

Varia - Miscellaneous - Divers

International Union of Pure and Applied Physics

Under the patronage of the International Union of Pure and Applied Physics the two following meetings will be held during September 1952:

"β and γ Radioactivity" at Amsterdam, from September 1st to 6th incl.

Subjects

(1) Beta desintegrations. Allowed and forbitten transitions; K-capture.

(2) Gamma transitions and internal conversion.

(3) Systematics of the beta and gamma decay and the shellmodel.

(4) Angular and polarization correlation.

(5) Instruments for beta and gamma spectroscopy.

(6) Energy calibration of beta and gamma spectroscopes.

(7) Measurements of beta particles of small energy.

(8) Coincidence method for the analysis of complex spectra and for the determination of correlations.

(9) Experiments of nuclear recoil and the detection of the neutrino.

Detailed information can be obtained from the Secretary, Prof. Dr. J. DE BOER, Institute für Theoretical Physics, Roetersstraat 1A, Amsterdam, Netherland.

"Structure and Properties of Solid Surfaces" at Chicago, Ill., from September 29th to October 1st incl.

Subjects

(1) Structure of crystal surfaces.

(2) The thermodynamics of crystal surfaces; surface free energy, entropy and tension.

(3) Atomic mobility and reaction on surfaces.

(4) Crystal growth from vapor, nelt, and solution.

(5) Electrical properties of surfaces of metals, semi-conductors and insulators.

(6) Surfaces of non-crystalline solids, particularly glasses.

(7) Cohesion and friction.

(8) Influence of surface on deformation of crystals.

Detailed information can be obtained from the Secretary of the Organizing Committee: C. S. Smith, Institute for the Study of Metals, Chicago 37, Ill., U.S.A.

A. Perrier, Swiss National Committee of Physics

International Contest

The Institute for the Unity of Science is offering a prize of \$500 for the best essay on the theme Mathematical Logic as a Tool of Analysis: Its Uses and Achievements in the Sciences and Philosophy. Two additional prizes of \$200 each will be given for the next best two essays. It is an International Contest and illopen to everyone. Essays must not exceed 25,000 words. They may be written in English, French or German and must be submitted before January 1st, 1953 Further information can be obtained from the Institute for the Unity of Science American Academy of Arts and Sciences, 28 Newbury Street, Boston 16, Massachusetts.

Philipp G. Frank, Harvard University,

3. Österreichischer Mathematikerkongress, Salzburg, 9. bis 14. September 1952

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft veranstaltet anlässlich des 3. Österreichischen Mathematikerkongresses wiederum ein *Internationales Mathe-*

matikertreffen in Salzburg, in der Zeit vom 9. bis 14. September 1952.

Die wissenschaftliche Arbeit des Kongresses wird sich in die folgenden Sektionen gliedern: Analysis; Geometrie und Topologie; Algebra und Zahlentheorie; Angewandte Mathematik; Geschichte und Philosophie. Bereits haben sich über 400 Vertreter aus folgenden Ländern angemeldet: Algerien, Belgien, Brasilien, Dänemark, Deutschland, England, Finnland, Frankreich, Griechenland, Italien, Jugoslawien, Kanada, Niederlande, Nigeria, Norwegen, Polen, Schweden, Spanien, Schweiz, Südafrika, Tschechoslowakei und den USA.

Anmeldungen und Anfragen sind zu richten an das Sekretariat der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Technische Hochschule, Karlsplatz 13, Wien IV.

R. Inzinger

Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik

Zeitschrift für das Gesamtgebiet der Werkstoffkunde und der Werkstoffprüfung

Seit Beginn dieses Jahres ist das Schweizer Archiv in neuer Aufmachung erschienen. Im Geleitwort zur ersten Nummer des neuen Jahrganges wird darauf hingewiesen, dass die Zeitschrift sich in Zukunft auf das Gebiet der Werkstoffforschung und Werkstoffprüfung beschränken und konzentrieren will. Da dieses Gebiet der angewandten Wissenschaften sich in den letzten Jahren auch in der Schweiz stark entwickelt hat, ist es sehr zu begrüssen, dass dieser Forschungszweig sein eigenes Publikationsmittel gefunden hat. Zu unserer lebhaften Genugtuung ist es damit automatisch auch zu einer besseren Abgrenzung der Sachgebiete mit der ZAMP gekommen, die sicherlich nur zum Nutzen beider Zeitschriften gereichen wird.

Die Schriftleitung des Schweizer Archivs verbleibt auch weiterhin in den Händen von PD. Dr. H. STÄGER; ihm zur Seite steht eine Redaktionskommission nit einem Redaktionsausschuss, dessen Präsidium Direktor A. IMHOF inne hat.

Die Redaktion

Errata

Sur la thermodynamique des processus irréversibles. Par Kyrille. Popoff (ZAMP 3, Fasc. 1, 42 [1952]).

Au lieu de X_k des formules (4), (5), (10) lire $-X_k$, c'est-à-dire

$$\delta(\varDelta S) = -\textstyle\sum_k X_k \; \delta x_k \; , \quad \varDelta \dot{S} = -\textstyle\sum_k X_k \; \dot{x}_k \;$$

iu lieu de

$$\delta(\Delta S) = \sum_{k} X_{k} \delta x_{k}, \quad \Delta \dot{S} = \sum_{k} X_{k} \dot{x}_{k}$$

et

$$\frac{|x_1|^2 - |x_2'|^2 + \dots + |x_r'|^2}{2} \quad AS = C$$
 (11)

au lieu de

$$x_1'^2 - x_2'^2 + \dots - x_r'^2 = 1S - C$$
. (11)

Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques

Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. III: Elektrodynamik. Vor A. Sommerfeld (Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948). 367 S. 48 Abb.; DM. 15.—.

Inhalt: I. Grundlagen und Grundbegriffe der Maxwellschen Elektrodynamik II. Ableitung der Erscheinungen aus den Maxwellschen Gleichungen; III. Relativitätstheorie und Elektronentheorie; IV. Die Maxwellsche Theorie für bewegts Körper und andere Ergänzungen.

Im I. Teil werden die Maxwellschen Gleichungen (in Integral- und Differential form) axiomatisch an die Spitze gestellt und vor allem die prinzipiellen unpraktischen Vorzüge des Giorgischen Maßsystems herausgearbeitet.

Im II. Teil werden die klassischen Anwendungen der Maxwellschen Gleichur gen von den einfachsten elektrostatischen Problemen bis zur Dipolstrahlung un den Drahtwellen durchgerechnet.

Teil III bringt vor allem eine sehr klare Ableitung der speziellen Relativitäts theorie aus der Forderung der relativistischen Invarianz der Maxwellschen Glechungen, Teil IV neben der Elektrodynamik bewegter Körper eine fast elementare Behandlung wichtiger Sätze der allgemeinen Relativitätstheorie.

Den Schluss bilden 25 sehr instruktive Übungsaufgaben aus allen vier Teile des Buches.

Weder der Name Sommerfeld noch die berühmte Buchserie seiner Vorlsungen über theoretische Physik bedürfen einer Empfehlung; beide sind schlechthig «klassisch». Der Praktiker wird vor allem den klaren, deduktiven Aufbau den Hauptteils: «Ableitung der Erscheinungen aus den Maxwellschen Gleichungen sowie die konsequente Anwendung des Giorgischen Maßsystems schätzen; der Theoretiker dagegen wird hauptsächlich die glänzende Ableitung der speziellen Relativitätstheorie aus der Invarianz der Maxwellschen Gleichungen mit Begesterung lesen. Das Buch ist weder textlich noch drucktechnisch als Nachschlag werk geeignet; es ist ein klassisches Lehrbuch, sicher das beste, das je über dies Gebiet geschrieben worden ist. Es stellt an den Leser hohe Anforderungerbringt ihm aber grossen Gewinn.

P. Scherre

Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der höher Analysis für Physiker, Mathematiker und Ingenieure. Von F. Schwar (B. G. Teubner, Leipzig 1951), 406 S., 147 Abb.; DM. 22.50.

Das Buch kann den Ingenieuren und Physikern, die in möglichst einfach Weise in die Behandlung von Randwertproblemen und von verwandten Angaben eingeführt zu werden wünschen, warm empfohlen werden. Der Verfasshat sich bemüht, die mathematischen Ableitungen einfach und ausführlich dizustellen; auf Existenz- und Konvergenzbeweise hat er im allgemeinen verzicht.

Nach der mathematischen Seite hin setzt die Lektüre des Buches nur die Kenntnis der Grundlagen der Differential- und Integralrechnung voraus; bei der Behandlung von physikalischen und technischen Beispielen wird die Kenntnis der betreffenden Grundgesetze ebenfalls vorausgesetzt.

Das erste Kapitel gibt eine Einführung in die Darstellung und Lösung der Randwertprobleme der schwingenden Saite und des schwingenden Stabes. Im zweiten Kapitel ist die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen bis zu den Anwendungen des Cauchyschen Integralsatzes entwickelt. Ein drittes Kapitel behandelt an Hand konkreter Aufgaben aus der Potentialtheorie, der Theorie der Membran- und Plattenschwingungen und der Theorie der Wärmeleitung die wichtigsten vorkommenden Differentialgleichungen und ihre Lösungen (Legendresche Polynome, Kugelfunktionen, Besselsche Funktionen usw.). Das vierte Kapitel führt in die Theorie der Integralgleichungen und ihrer Anwendungen ein, das fünfte in die Variationsrechnung und das sechste in die Theorie und Praxis der Differenzengleichungen. Literaturangaben sind am Ende jedes Kapitels gegeben; in einem Anhang findet der Leser eine kurze Rekapitulation der Hauptsätze über Determinanten, lineare Gleichungssysteme, Kurvenintegrale, unendliche Reihen, lineare Differentialgleichungen, die im Buch zur Verwendung kommen. M. Planchevel

Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems. By J. J. Stoker (Interscience Publishers, Inc., New York 1950), 273 pp., \$5.—.

Das Buch ist aus Vorlesungen und Seminarien des Verfassers an der New York University entstanden und stellt den zweiten Band der von ihm zusammen mit H. Bohr und R. Courant herausgegebenen Reihe «Pure and Applied Mathematics» dar. Es ist als Lehrbuch für Ingenieure und Physiker konzipiert und führt in vorbildlich klarer Weise sowie in ständiger Fühlung mit praktischen Beispielen in die Theorie der nichtlinearen Schwingungen mit einem Freiheitsgrad ein. Was das Werk vor anderen Publikationen auf diesem Gebiet auszeichnet, ist die Kunst des Verfassers, bei aller Fülle des Stoffes die Akzente auf das Wesentliche zu setzen, ferner die strenge Systematik, mit der die Differentialgleichung

$$m \dot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = F \cos \omega t$$

nach ihren praktischen Erscheinungsformen zergliedert und im Hinblick auf die besonderen Merkmale ihrer Lösungen diskutiert wird.

Die einzelnen Kapitel umfassen: I. lineare Schwingungen $(\varphi = c \ \dot{x}, f = k \ x)$, II. freie, ungedämpfte nichtlineare Schwingungen $(\varphi = 0, F = 0)$, III. freie, gedämpfte Schwingungen (F = 0), erzwungene Schwingungen mit IV. nichtlinearer Rückstellkraft $(\varphi = c \ \dot{x})$ und V. nichtlinearer Dämpfung $(f = k \ x)$ sowie VI. quasilineare Schwingungen $[\varphi = p(t) \cdot \dot{x}, f = q(t) \cdot x, F = 0]$; eine Reihe von Existenz- und Eindeutigkeitsbeweisen sind im Anhang zusammengefaßt. H. Ziegler

Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. I, Theorie der Laplace-Transformation. Von G. Doetsch (Verlag Birkhäuser, Basel 1950). 581 S., .-0 Abb.; sFr. 78.-.

Es handelt sich um die zu einem Handbuch erweiterte und verbesserte Aussabe des 1937 erschienenen Werkes *Theorie und Anwendungen der Laplace-Trans-ormation* des gleichen Verfassers. Der vorliegende erste Band korrespondiert abei im wesentlichen mit den Teilen I, II, und III der alten Ausgabe, beschränkt ich aber auf die Theorie, die indessen erschöpfend behandelt wird. Insbesondere

sind neben anderem die Parsevalsche Gleichung, die Erweiterung der Laplace-Transformation durch arithmetische Mittelbildung und die Umkehrung der Transformation durch Reihenentwicklung in der neuen Ausgabe weit ausführlicher behandelt. Die Anwendungen werden gesamthaft im zweiten Band zu finden sein.

Inhaltsübersicht von Band 1: 1. Teil: Grundlegende analytische und funktionentheoretische Eigenschaften der Laplace-Transformation. Hier werden unter anderem behandelt: Konvergenzeigenschaften, Abbildung der Differentiation und Integration, Faltung; ferner auch Verhalten der Bildfunktion bei Annäherung an $s=\infty$. 2. Teil: Umkehrung der Fourier- und Laplace-Transformation, die Parsevalsche Gleichung, Umkehrung durch Reihenentwicklung, Darstellungsproblem. 3. Teil: Die Cesaroschen arithmetischen Mittel des Laplace-Integrals und die \mathfrak{L}^K -Transformation. 4. Teil: Die Laplace-Transformation spezieller Klassen von Funktionen (insbesondere von ganzen Funktionen vom Exponentialtypus). 5. Teil: Abelsche und Taubersche Sätze (Theoretische Grundlagen de Asymptotik). Am Schluß folgen ein Anhang mit Hilfssätzen und historischen Bemerkungen sowie ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Dieses umfassende Werk wird der Theorie und Praxis gleichermaßen wert volle Dienste leisten und kann als Nachschlagewerk für alle theoretischen Frage

über die Laplace-Transformation wärmstens empfohlen werden.

H. Rutishause

An Essay toward a Unified Theory of Special Functions, Based upoothe Functional Equation

 $\frac{\partial}{\partial z} F(z,\alpha) = F(z,\alpha+1).$

By C. Truesdell (Princeton University Press, 1948). 188 pp.; \$3.00.

Les fonctions classiques de la physique mathématique (fonctions Beta Gamma, fonctions hypergéométriques, fonctions de Legendre, de Jacobi, Gegenbauer, de Laguerre, d'Hermite, de Weber, fonctions de Bessel et de Hanke etc.) satisfont à un grand nombre de relations, disparates au premier abord. Cofonctions peuvent être obtenues à partir de fonctions génératrices relativement simples; elles s'expriment par suite par des intégrales de contour ou des intégrales définies et elles satisfont à des équations aux différences.

L'auteur montre que toutes ces relations découlent du fait que ces fonction

sont des solutions d'équations aux différences du type général

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y, \alpha) = A(y, \alpha) f(y, \alpha) + B(y, \alpha) f(y, \alpha + 1)$$

où A et B sont des fonctions données et $B \not\equiv 0$. Par une transformation covenable, cette équation aux différences se ramène au type

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z, \alpha) = F(z, \alpha + 1).$$

L'ouvrage est consacré à l'étude systématique de cette dernière équation. Cer étude permet non seulement de retrouver les formules connues en unifiant théories des diverses fonctions citées plus haut; elle donne aussi plusieurs relation nouvelles et pose des problèmes qui attendent encore leur solution.

M. Planche

Flugbahnen von Leitstrahlraketen mit Gasstrahlsteuerung

Einführender Bericht

Von Eduard Perret¹), Ernst Roth²), Raymund Sänger²) und Hans R. Voellmy¹), Zürich

1. Einleitung

Die Leitstrahlrakete ist dadurch gekennzeichnet, dass sie sich entlang eines seine Richtung willkürlich ändernden, gebündelten elektromagnetischen Strahles, dem sogenannten Leitstrahl, bewegt. Wird dabei der Leitstrahl von einem Radargerät so gesteuert, dass er stets nach einem bestimmten Flugzeug zeigt, so muss es notwendigerweise zur Begegnung von Rakete und Flugzeug kommen. Dabei wird angenommen, dass sich die Rakete jederzeit in der Mitte dieses Leitstrahls befinde, was einen idealen Servomechanismus der Steuerung voraussetzt.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit drei verschiedenen Arten der Gasstrahlsteuerung. In den zwei ersten Fällen (1 und 2) wird die zur Steuerung erstorderliche, normal zur Flugbahntangente stehende Kraft durch den gegen die Flugbahntangente geneigten Gasstrahl erzeugt. Bei der ersten Steuerungsart nandle es sich um eine überstabile Rakete, deren Rumpfachse also stets mit der Bahntangente übereinstimmt. Der Gasstrahl wird dabei um den Steuerwinkel β_1 zur Rumpfachse schräggestellt. Im zweiten Fall sei die Rakete aerodynamisch ndifferent. Der um den Steuerwinkel β_2 gegenüber der Rumpfachse ausgelenkte Gasstrahl dreht die ganze Rakete und damit auch den Gasstrahl in die zewünschte Schrägstellung zur Flugbahntangente. Ein drittes Steuersystem (3) verwendet aerodynamische Tragflächen zur Erzeugung der Querkraft. Diese eien fest mit dem Raketenrumpf verbunden, so dass zur Auftriebserzeugung lie Raketenachse gegen die Flugbahntangente angestellt werden muss. Dem um den Steuerwinkel β_3 ausgelenkten Gasstrahl fällt die Aufgabe zu, das rücktellende aerodynamische Moment zu überwinden.

Die im Bereich kleiner Anstell- und Steuerwinkel berechtigte Annahme, ass zwischen der Drehbewegung der Rakete um Querachsen und der Vortratsbewegung kein Zusammenhang bestehe, ermöglicht die Berechnung der lugbahnen, unabhängig von der Wahl des Steuersystems.

¹⁾ Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon, Bührle & Co.

²) Eidgenössische Technische Hochschule.

An Hand der nun gegebenen Flugbahnen können die Steuerbewegungen der erwähnten Systeme berechnet werden. Wirkungstote Räume ergeben sich dort, wo die erforderlichen Steuerbewegungen den Arbeitsbereich der Steuersysteme überschreiten oder wo andere Grenzen erreicht werden. Die Rakete fällt dann vom Strahl ab und wird zum steuerlosen Flugkörper.

Es wäre ein zu mühsames Unterfangen, wollten wir das Problem in seiner allgemeinsten Form in Rechnung ziehen, und es ist daher angezeigt, von möglichst einfachen Voraussetzungen auszugehen, die aber dennoch erwarten lassen, ein zuverlässiges Bild über die Bahngestaltung und ihre Bedingungen zu gewinnen. In diesem Sinne setzen wir voraus, dass sich das Flugzeug auf einer horizontalen Geraden mit konstanter Geschwindigkeit bewege und der Abschussort der Rakete senkrecht unter der Bahngeraden liege. In den Rechnungen erscheint neben Flughöhe und Flugzeuggeschwindigkeit der Startzeitpunkt hinsichtlich der horizontalen Flugzeugentfernung als Parameter.

Als Unterlagen für die numerischen Rechnungen werden die charakteristi schen Daten eines als Z-Rakete bezeichneten Konstruktionstyps verwendet wobei zur weiteren Vereinfachung der Rechnungen die Abhängigkeit der aerodynamischen Koeffizienten von der Mach-Zahl nicht berücksichtigt wird.

Kräfte und Momente, die an der Rakete angreifen

a) Schubkraft

Für die durch ein Strahltriebwerk erzeugte Schubkraft gilt

$$S = \dot{m} v_e + q \left(\phi_e - \phi_a \right) \,, \tag{2.1}$$

worin m = dm/dt die pro Zeiteinheit mit der Geschwindigkeit v_e (relativ zum Düsenausgang) ausgestrahlte Gasmenge bedeutet, q die Düsenaustrittsfläch und p_e bzw. p_a den Gasstrahldruck in der Austrittsfläche bzw. den atmosphä rischen Druck bezeichnet. Es ist zweckmässig, die effektive Gasstrahlgeschwin digkeit v_E einzuführen, in welcher der statische Druckanteil $g(p_e - p_a)$ der Schubes miteinbezogen ist, indem wir schreiben

$$S = \dot{m} v_E . ag{2.2}$$

Wir nehmen an, dass die Düsenmündung drehbar im Raketenende gelagen ist, so dass der Gasstrahl bis zu einem maximalen Winkel

$$\beta = \beta_{gr}$$

ausgelenkt werden kann. Die Einstellung des Steuerwinkels erfolgt durch da Steuergerät der Rakete.

b) Gewicht der Rakete

Mit Rücksicht auf den konstanten Treibstoffverbrauch schreiben wir für die Masse der Rakete

$$M = M_0 - \int_0^{\infty} \dot{m} \, dt = M_0 - \dot{m} \, t \,, \tag{2.3}$$

wo M_0 die Anfangsmasse der Rakete bezeichnet. Damit wird das Gewicht der Rakete

$$G = Mg = M_0 g - \dot{m} g t. {(2.4)}$$

c) Aerodynamische Kräfte und Momente

Die Resultierende aller aerodynamischen Kräfte bei einem auftrieberzeugenden Raketenkörper geht normalerweise nicht durch den Schwerpunkt, sondern schneidet die Raketenlängsachse im Abstand l vom Schwerpunkt im sogenannten Druckmittelpunkt.

Die auf den Schwerpunkt bezogene Dyname weist somit folgende Kräftekomponenten und Momente auf:

Den Luftwiderstand W in Richtung der Bahntangente

$$W = -K_W \varrho d^2 v^2. (2.5)$$

Wegen des ungefähr quadratischen Verhaltens des Koeffizienten $K_{\rm B}$ als Funktion des Anstellwinkels δ darf für kleine δ der Widerstand W als eine von δ unabhängige Grösse betrachtet werden.

Den Auftrieb A senkrecht zur Bahntangente

$$A = K_A \varrho \, d^2 \, v^2 \, \delta = A' \, \delta \,. \tag{2.6}$$

Das aerodynamische Moment JR um den Schwerpunkt

$$J_R = -K_R \, \varrho \, d^3 \, v^2 \, \delta \, , \qquad (2.7)$$

vobei sich K_R aus den aerodynamischen Koeffizienten K_R und K_A berechnen exsst. Für kleine δ gilt

$$K_R = (K_W + K_A) \sim K_A \frac{l}{u}, \text{ da } K_W \ll K_A.$$
 (2.8)

Die Grösse l folgt somit leicht aus den beiden Koeffizienten K_R und K_A oder zuch aus den Momenten und Kräften selbst

$$l = \frac{K_R d}{K_A} = \frac{J_R}{A}.$$
 (2.9)

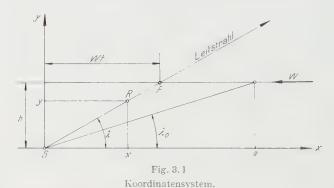
ZAME

Bei aerodynamisch stabilen Geschossen liegt der Druckmittelpunkt hinter dem Schwerpunkt, gegensätzlich zu Artilleriegeschossen, die deshalb des Dralls bedürfen. Die aerodynamische Stabilität ist um so besser, je grösser bei gleichem Auftrieb die Grösse l ist.

3. Bewegungsgleichungen

a) Koordinatensystem

Da wir, wie eingangs erwähnt, nur geradlinige Flugwege des Zieles voraus setzen, denken wir uns durch den Flugweg und den Leitstrahlsender eine Ebene gelegt. Der Leitstrahl bewegt sich bei der Verfolgung des Zieles nur in dieser Ebene, und somit tritt eine ideal gesteuerte Rakete nicht aus dieser Ebene heraus. Unser Problem der Raketenbahn wird also zweidimensional.



In der eingeführten Ebene nehmen wir ein Koordinatensystem an mit der Nullpunkt im Sender. Die x-Achse sei parallel zur Flugrichtung des Zieles, di y-Achse senkrecht dazu und nach oben gerichtet (vgl. Figur 3.1).

Wir könnten auch ein mit dem Leitstrahl bewegtes Koordinatensystem ein führen. Das hätte wohl den Vorteil, dass aus der Rechnung sofort der Abstan vom Sender bekannt wäre, aber den Nachteil, dass die Raketenbewegung at ein erdfestes System umgerechnet werden müsste, da einige Koeffizienten Funktionen der Höhe sind. Ausserdem träten im bewegten System Trägheitskräft auf, die eine besondere Rechnung erfordern würden. Aus Gründen der eir facheren Darstellung wählen wir das feste Koordinatensystem.

Die eingeführte (x, y)-Ebene steht senkrecht, wenn das Flugzeug den Sende im Zenit überfliegt. Diesen speziellen Fall wollen wir unsern Bahnberecll nungen zugrunde legen. Die allgemeine Lage würde keine wesentlich davor abweichende Raketenbahnen ergeben, da allein die in der (x, y)-Ebene liegenc Gewichtskomponente sich mit der Neigung der Ebene ändert.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein (vgl. Figur 3.1 und 3.2):

 λ = Neigung des Leitstrahls gegenüber der x-Achse,

 $\psi = \text{Winkel zwischen Leitstrahl und Bewegungsrichtung},$

 φ = Winkel zwischen Bewegungsrichtung und x-Achse,

 δ = Anstellwinkel der Rakete,

 β – Steuerwinkel, das heisst Auslenkwinkel des Schubvektors gegenüber der Raketenachse.

T = t - a/w =Zeit vom Zenit an gerechnet.

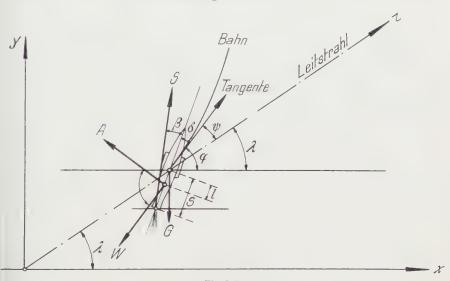


Fig. 3.2 Kräfte, welche an der Rakete angreifen.

b) Differentialgleichungen der Raketenbahn

Aus Figur 3.2 ergeben sich in der x- und y-Richtung die Bewegungsleichungen

$$m\ddot{x} = S\cos(\beta + \delta + \varphi) - W\cos\varphi - A\sin\varphi$$
, (3.1)

$$m \ddot{y} = S \sin(\beta + \delta + \varphi) - W \sin \varphi + A \cos \varphi - G. \tag{3.2}$$

tus Figur 3.1 ergibt sich ferner die einfache Beziehung

$$x = \frac{w}{h} \ y \ T. \tag{3.3}$$

ie Daten des Flugzeugkurses sind daher in einer einzigen Funktion enthalten ad gehen in sehr einfacher Weise in das Differentialgleichungssystem ein.

Wir benötigen im folgenden die Differentialquotienten

$$\dot{x} = \frac{w}{h} \left(y + \dot{y} \ T \right) \,, \tag{3.4}$$

$$\ddot{x} = \frac{w}{h} \left(2 \, \dot{y} + \ddot{y} \, T \right) \,. \tag{3.5}$$

Ferner entnehmen wir der Figur 3.2 die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.\tag{3.6}$$

Mit den Gleichungen (3. 1) bis (3. 6) haben wir alle Beziehungen aufgestellt die zur Berechnung einer Raketenbahn bei idealer Steuerung erforderlich sind sie lassen sich noch etwas vereinfachen.

Zunächst multiplizieren wir (3.1) mit $\cos \varphi$ und (3.2) mit $\sin \varphi$ und addie ren beide

$$m \ddot{x} \cos \varphi + m \ddot{y} \sin \varphi = S \cos(\beta + \delta) - W - G \sin \varphi$$
. (3.3)

Damit haben wir eine Relation gewonnen, welche den Auftrieb nicht melt enthält. Entsprechend erhalten wir aus (3.1) und (3.2) mit vertauschter Mult plikation

$$-m\ddot{x}\sin\varphi + m\ddot{y}\cos\varphi = S\sin(\beta + \delta) + A - G\cos\varphi. \tag{3.8}$$

Durch Einsetzen von (3. 5) in (3. 7) wird

$$m\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{w}{h}T\right)\ddot{y} + 2m\frac{w}{h}\dot{y} = \frac{S\cos(\beta + \delta) - W}{\cos\varphi} - G\operatorname{tg}\varphi. \tag{3.9}$$

Eliminieren wir noch in (3. 6) \dot{x} mit (3. 4)

$$\operatorname{tg} q = \frac{h}{h} \cdot \frac{\dot{y}}{v - \dot{y}} T, \qquad (3.1)$$

so haben wir ein Differentialgleichungssystem (3.9) und (3.10) gewonne welches uns bei gewissen Vernachlässigungen gestattet, die Raketenbahn in ei facher Weise zu berechnen. Diese Vernachlässigungen bestehen in der Annahnt β und δ seien kleine Winkel, so dass $\cos{(\beta-\delta)}\approx 1$ gesetzt werden darf. Ausse dem können wir bei kleinem δ den Luftwiderstand W als von δ unabhängig $\mathbb C$ trachten. Mit diesen Vernachlässigungen treten in unserem Gleichungssystemur die zwei Unbekannten y und q auf; somit lassen sich aus diesen beid Gleichungen allein die Raketenbahnen durch schrittweise Integration ermittel

Für die eingangs beschriebenen drei verschiedenen Arten der Steuerubelegen wir die Winkel β und δ mit den Indizes 1, 2 und 3.

Die Annahme, β_1 sei klein bei der Steuerung mit schräggestellter Brennkammer, ist nicht ohne weiteres erlaubt, da, wie wir sehen werden, bisweilen grosse Steuerwinkel β_1 des Gasstrahles zur Erzeugung der notwendigen Schubkomponente quer zur Flugbahn erforderlich sind. Hingegen ist der Anstellwinkel δ_1 sehr klein, weil grosse aerodynamische Stabilität vorausgesetzt wird.

Zur Integration muss somit die Gleichung (3, 8) herangezogen werden, welche für $\delta_1=0$ lautet

$$-m\ddot{x}\sin\varphi + m\ddot{y}\cos\varphi = S\sin\beta_1 - G\cos\varphi. \tag{3.11}$$

 \ddot{x} kann nach (3, 5) eliminiert werden, so dass die Gleichungen (3, 9), (3, 10) und (3, 11) ein System für die Funktionen v,q und β_1 bilden. Die Berücksichtigung von β_1 führt auf eine Verkleinerung der Schubkomponente in Richtung der Bahntangente.

Bei der Steuerung mit schräggestellter indifferenter Rakete kann β_2 klein angenommen werden, sofern der Abstand s (Figur 3.2) zwischen Raketenschwerpunkt und Drehpunkt der Brennkammer genügend gross gewählt wird, so dass schon eine geringe Auslenkung der Brennkammer die Rakete zu drehen vermag. Hingegen kann δ_2 nicht vernachlässigt werden, da, wie im ersten Fall, zur Erzeugung der notwendigen Querkraft eine erhebliche Schrägstellung des Schubvektors zur Flugbahntangente und daher der Rakete erforderlich ist.

Zur Integration des Differentialgleichungssystems muss somit auch hier die Gleichung (3, 8) herangezogen werden. Wegen $\beta_2 \approx 0$ entsteht wieder die Gleichung (3, 11), mit δ_2 an Stelle von β_1 . Die Berücksichtigung von δ_2 bedingt hier nicht nur eine Verminderung der Schubkomponente in Richtung der Bahntangente, sondern auch eine Vergrößserung des Luftwiderstandes W, da dieser bei merklichen Anstellwinkeln gegensätzlich zu unserer Annahme (2, 5) von δ abhängig wird.

Bei der dritten Art der Steuerung sind sowohl β_3 wie δ_3 zum vornherein klein, zum mindesten bei grossen Geschwindigkeiten. Wird nämlich die erforderliche Querkraft durch grosse Flügel erzeugt, so genügen zur Steuerung kleine Anstellwinkel δ_3 . Wird ferner die Rakete sehr wenig stabil angenommen, so reichen kleine Steuerwinkel β_3 des Gasstrahles aus, um der Rakete einen endlichen Anstellwinkel zu geben.

Die dritte Art der Steuerung gestattet somit die beschriebene einfache Integration mit (3. 9) und (3. 10).

c) Erforderliche Querkräfte

Die normal zur Flugbahn stehenden Kräfte nennen wir im folgenden kurz Querkräfte. Durch Auslenkung des Gasstrahls entsteht nach Figur 3.2 die Querkraft $S\sin(\beta-\delta)$. Der Auftrieb als weitere Querkraft entsteht indirekt eben-

falls durch Auslenkung des Gasstrahls. Die zur Steuerung der Rakete verfügbaren Querkräfte sind somit allgemein

$$Q = S\sin(\beta + \delta) + A. \tag{3.12}$$

Aus Gleichung (3.8) können diese Querkräfte berechnet werden, wenn nach der Berechnung der Flugbahn x, y und q als Funktionen der Zeit bekannt sinc

$$Q = -m\ddot{x}\sin\varphi + m\ddot{y}\cos\varphi + G\cos\varphi. \tag{3.13}$$

4. Numerische Integration des Differentialgleichungssystems der Flugbahnen

Wir wollen im folgenden vier verschiedene Raketenbahnen wiedergeben denen die untenstehenden Zahlenwerte zugrunde liegen.

Die Bewegung des Zieles ist charakterisiert durch:

Flughöhe h = 5 km.

Geschwindigkeit des Flugzeuges w = 200 m/s.

Horizontaldistanz zur Zeit des Abschusses

Flug Nr. I II III IV
$$a = 10\,000\,\,\mathrm{m} \qquad \qquad 4000\,\,\mathrm{m} \qquad \qquad 0 \qquad \qquad -4\,000\,\,\mathrm{m} \,.$$

In der Rechnung tritt nur das Verhältnis w/h auf, das heisst, es entsteht die gleiche Raketenbahn, wenn das Flugzeug zum Beispiel in doppelter Flughöhmit doppelter Geschwindigkeit fliegt.

Für die Z-Rakete nehmen wir folgende Zahlenwerte an:

Widerstandskoeffizient $K_W = 0.086$.

Auftriebskoeffizient $K_A = 9.9$.

Raketendurchmesser $d = 0.28 \text{ m} (K_W d^2 = 0.00674 \text{ m}^2)$.

Anfangsmasse $m_0 = 25.5 \text{ kg}^* \text{ m}^{-1} \text{ s}^2 = 250 \text{ kg}.$

Sekundlicher Triebstoffverbrauch $\dot{m} = 0,204 \text{ kg}^* \text{ m}^{-1} \text{ s} = 2 \text{ kg s}^{-1}$.

Schub $S = 550 \text{ kg*} = 5400 \text{ kg m s}^{-2}$.

Luftdichte auf Starthöhe $\varrho_0=0.119~\mathrm{kg^*\,m^{-4}\,s^2}=1.17~\mathrm{kg~m^{-3}}.$

In den nachfolgenden Tabellen 1 bis 4 sind die Ergebnisse der numerische Integration zusammengestellt¹).

¹) Der Abstand vom Sender ist mit r bezeichnet. Ferner ist zu bemerken, dass die Flugbahnes streng unter Annahme der ersten Art der Steuerung mit Berücksichtigung des Gliedes S cos β ($\delta=a$ in (3.7) berechnet sind. Sie gelten aber mit guter Näherung auch für die zweite und dritte Art da Steuerung, solange β_1 kleiner als etwa 25° ist. Dieser Wert wird nur beim ersten Flug überschritten während zum Beispiel beim dritten Flug nicht einmal 8° erreicht werden.

Tabelle 1 $a = 10000 \text{ m}, \quad w = 200 \text{ m/s}$

t	r	y	Q	β_1	ψ
S	m ·	m	kg*	P1	Ψ'
0	0	0	230	24°	0°
2	31	14	234	24°25′	0°30′
4	123	59	240	25°	1°
6	276	136	247	25°40′	1°40′
8	490	250	254	26°30′	2°25′
10	762	404	265	27° 35′	3°15′
12 .	1090	600	278	29°	4°10′
14	1480	842	293	30°30′	5°20′
16	1910	1130	312	32°30′	6°40′
18	2400	1480	333	34°40′	8°10′
20	2930	1880	356	37°10′	9° 50′
22	3490	2330	387	40°20′	12°
24	4090	2840	421	43°50′	14°25′
26	4720	3410	460	48°	17°20′
27	5030	3710	485	50° 30′	18° 50′
28	5350	4020	509	53°	20°40′
29	5670	4340	555	57°45′	22°40′
30	5990	4680	625	65°	25°
31	6300	5020		_	27°35′

Tabelle 2 $a = 4000 \text{ m}, \quad w = 200 \text{ m/s}$

<i>t</i>	r m	y m	Q kg*	β_1	Ψ
0	0	0	158	16°30′	0° 1°30′ 3°16′ 5°17′ 7°33′ 10° 3′ 12°45′ 15°30′ 18°15′ 20°45′ 22°55′ 24°40′ 25°55′ 26°40′ 27° 26°50′ 26°30′
2	26	21	168	17°30′	
4	103	87	179	18°35′	
6	230	200	190	19°50′	
8	404	365	204	21°20′	
10	625	580	218	22°45′	
12	889	846	230	24°	
14	1195	1162	235	24°30′	
16	1540	1520	237	24°40′	
18	1930	1920	230	24°	
20	2350	2350	218	22°45′	
22	2820	2810	200	20°50′	
24	3330	3280	177	18°25′	
26	3880	3780	154	16°	
28	4500	4280	127	13°10′	
30	5170	4800	107	11°10′	
32	5910	5330	83	8°40′	

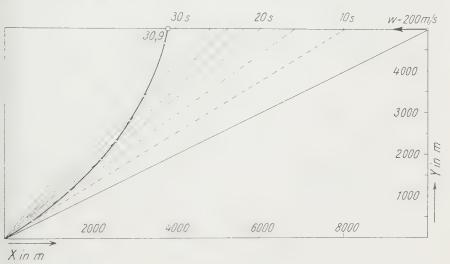
Tabelle 3 a = 0, w = 200 m/s

t	7	y	Q	β_1	ψ
S	m	m	kg*		
			1		
0	0	0	0	0°	0°
2	24	24	6	0°34′	2°17′
4	96	95	12	1°16′	4°26′
6	219	213	16	1°44′	6° 22′
8	394	376	18	1°57′	8° 6′
10	624	579	20	2° 6′	9°30′
12	909	819	18	1° 56′	10°39′
14	1253	1094	15	1°36′	11°30′
16	1658	1396	11	1°14′	12°13′
18	2130	1725	6	0° 34′	12°40′
20	2660	2070	- 1	-0° 6′	12°56′
22	3260	2440	- 7	-0°45′	13° 5′
24	3 9 2 0	2830	-15	-1°34′	13° 9′
26	4650	3230	-22	-2°20′	13° 7′
28	5460	3640	-29	-2°58′	13° 4′
30	6330	4050	-35	-3°35′	12°52′
32	7 280	4480	-40	-4°11′	12°41′
34	8 2 9 0	4910	-45	-4°38′	12°30′
36	9380	5350	-50	-5°12′	12°16′
38	10540	5800	54	-5°38'	12° 3′
40	11770	6240	-57	-6° 2′	11°50′
42	13070	6690	-60	−6° 20′	11°31′
46	15900	7600	-65	-6° 52′	11° 3′
50	19020	8500	69	-7°16′	10°33′

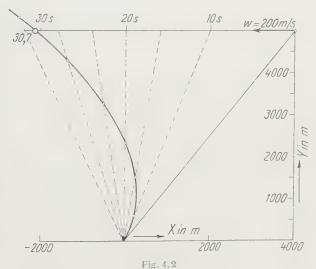
Tabelle 4 $a = -4000 \text{ m}, \quad w = 200 \text{ m/s}$

	1				
t	r	У	Q	β_1	ψ
S	m	m	kg*	P1	Ψ
0	0	0	-158	-16°30'	0.0
4	111	80	-136	-14°13′	2°23′
8	452	305	118	-12°28′	3° 58′
12	1054	650	-109	-11°26′	4° 59′
16	1919	1100	-105	-10°54′	5°41′
20	3065	1625	-101	-10°33′	6° 7′
24	4490	2220	-100	-10°22′	6° 24′
28	6190	2860	- 99	-10°17′	6° 33′
32	8170	3540	- 99	-10°17′	6° 37′
36	10420	4250	- 98	-10°14′	6° 38′
40	12940	4980	- 98	-10°11′	6° 36′
44	15720	5730	- 97	-10° 6′	6°31′
48	18750	6470	- 96	-10° 1′	6° 27′
52	22000	7240	- 95	- 9°48′	6° 20′
56	25600	8000		10	0 20
60	29400	8780			
-	1				

In den Figuren 4.1 bis 4.4 sind die Flugbahnen I bis IV dargestellt. Wie wir den Figuren entnehmen, liegt die konvexe Seite der Flugbahn dem Anflug des Flugzeuges zugekehrt. Dieser Verlauf ist charakteristisch für die Bahnen von Leitstrahlraketen.



 $\label{eq:Fig.4.1} \text{Leitstrahlraketenbahn für } a = 10\,000\,\text{m}\,.$



Leitstrahlraketenbahn für a = 4000 m.

ZAMI

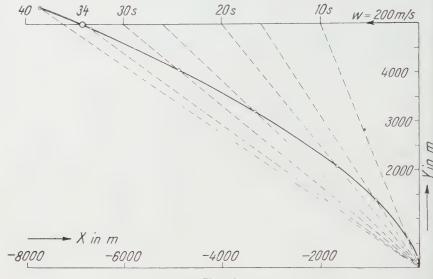


Fig. 4.3 Leitstrahlraketenbahn für a = 0.

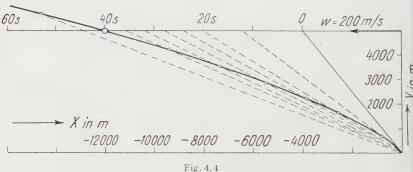


Fig. 4.4 Leitstrahlraketenbahn für a = -4000 m.

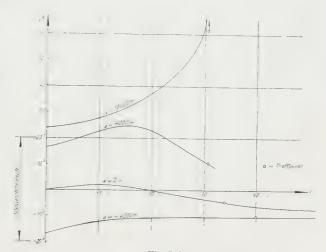
5. Berechnung der Steuerwinkel β

a) Steuerung mit schräggestellter Brennkammer

Wir betrachten zunächst die erste Art der Steuerung. Da wir in diesem Fagrosse aerodynamische Stabilität voraussetzen, wird $\delta_1 = 0$, und damit verschwindet auch der Auftrieb A. Es bleibt somit zur Berechnung von β_1 ars (3.12)

$$\sin \beta_1 = \frac{Q}{S}. \tag{5.}$$

n Figur 5.1 ist der Verlauf von β_1 für die vier berechneten Raketenbahnen viedergegeben.



 $\label{eq:Fig. 5. I} \text{Steuerwinkel } \beta_1 \text{ für die vier Raketenbahnen.}$

 β_1 erreicht sehr grosse Werte. Wenn wir den Maximalwert β_n beispielsweise 0° annehmen, fällt die erste Raketenbahn, für welche $a=10\,000\,\mathrm{m}$, von Anfang naus, da schon beim Start der Grenzwert überschritten wird. Auch im zweiten fall wird dieser Grenzwinkel überschritten. Hingegen im dritten und vierten all nicht, so dass hier die Rakete stets dem Leitstrahl zu folgen vermag.

b) Steuerung mit schräggestellter Rakete

Im zweiten Fall genügen zur Steuerung kleine Auslenkungen der Brennammer, weil wir eine indifferente Rakete voraussetzen und nur noch das Trägeitsmoment zu überwinden ist. Es handelt sich um eine Differentialsteuerung, a die Drehung der Rakete und damit die Änderung der Schubkomponente ormal zur Bahntangente gesteuert werden muss. Der Winkel β_2 kann aus der ewegungsgleichung für die Drehung um eine Querachse der Rakete berechnet erden. Ist Θ ihr Trägheitsmoment, so ergibt sich aus Figur 3.2 bei aerognamisch indifferenter Rakete

$$\Theta (\ddot{\varphi} + \ddot{\delta}_2) = -s S \beta_2. \tag{5.2}$$

Sehen wir von der erwähnten geringen Änderung der Raketenbahn bei der veiten Steuerung gegenüber der ersten ab, so können wir, weil die Schub-

komponente quer zur Bahntangente in beiden Fällen gleich ist, setzen

$$\delta_2 = \beta_1 \,. \tag{5.3}$$

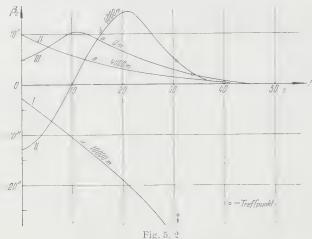
 φ und β_1 sind aus den berechneten Bahnen bekannt.

Wählen wir beispielsweise:

Trägheitsmoment $\Theta = 20 \text{ kg* m s}^2 = 196 \text{ kg m}^2$.

Abstand Raketenschwerpunkt — Brennkammerdrehpunkt s=2 m.

Mit diesen Zahlenwerten erhalten wir für die vier berechneten Raketenbahne aus (5.2) den Verlauf von β_2 (vgl. Figur 5.2).



Steuerwinkel β_2 für die vier Raketenbahnen.

Der Steuerwinkel β_2 wird auffallend klein (nur einige Winkelsekunden), w verständlich ist, da geringe Auslenkungen der Brennkammer genügen, um d Trägheitsmoment allein zu überwinden. Derart kleine Steuerwinkel bedinge aber einen empfindlichen Servomechanismus der Steuerung. Der Steuerwink wird bei dieser indifferenten Rakete unerwünscht klein, während er bei d überstabilen Rakete unerwünscht gross geworden ist. Es ist somit angezeig eine gewisse aerodynamische Stabilität vorauszusetzen, wie dies im dritten Fangenommen wird.

Handelt es sich jedoch um eine Steuerung im luftleeren Raum, wo prinzipikeine aerodynamische Stabilität möglich ist, so kommt nur die zweite Ader Steuerung in Frage.

c) Steuerung mit aerodynamischem Auftrieb

Verwendet man den aerodynamischen Auftrieb von Flügeln als weiter querkrafterzeugendes Element, so gesellt sich zu den bisher verwendet Schubgliedern ein geschwindigkeitsabhängiges Glied. In der Startperiode wird ich zunächst gegenüber der Steuerung 2 wenig ändern. Erst mit wachsender Geschwindigkeit übernimmt der Auftrieb immer mehr die tragende Funktion und ibertrifft schliesslich bei weitem die bisher wichtig gewesene Schubkomponente.

Während der Steuerwinkel β_2 in der Momentengleichung um den Schwerbunkt die zentrale Rolle spielt, darf er in den Translationsgleichungen wegen einer Kleinheit neben δ vernachlässigt werden. Für die Querkraft gilt somit aach (3.12)

$$Q = S \, \delta_3 + A = \delta_3 \, (S + A') \,, \tag{5.4}$$

welche in der Steuerung 1 durch $Q = \beta_1 S$ gegeben war, und durch Vergleich rhalten wir die Beziehung

$$\beta_1 S = S \delta_3 + A . \tag{5.5}$$

Aus der Momentengleichung um den Schwerpunkt folgt der Zusammenhang wischen A und β_3 (vgl. Figur 3.2)

$$A = -\beta_3 S \frac{s}{t}. \tag{5.6}$$

Dies ergibt in (5.5) eingesetzt

$$\beta_3 = (\delta_3 - \beta_1) \frac{l}{s}. \tag{5.7}$$

Da der Anstellwinkel δ_3 nach (5.4) und (5.5)

$$\delta_3 = \frac{\beta_1}{1 + (A'/\bar{S})}$$
, (5.8)

olgt endgültig für β_3

$$\beta_3 = -\beta_1 \frac{1}{(S/A') + 1} \cdot \frac{l}{s}. \tag{5.9}$$

u Beginn der Steuerung ist β_3 Null, weil A' als quadratische Funktion von v Prschwindet. Demzufolge muss der Anstellwinkel beim Start nach (5. 8) gleich sein.

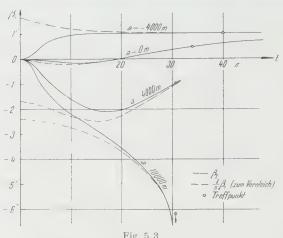
Mit zunehmender Geschwindigkeit und damit zunehmendem A' wird die rösse S(A') immer kleiner gegenüber 1, und man erhält die einfache Beziehung

$$\beta_3 = -\beta_1 \frac{l}{s}. \tag{5.10}$$

an erkennt nun leicht, dass je nach der Wahl der Grössen l und s der Steuernkel β_3 sehr viel kleiner als β_1 gehalten werden kann, wodurch sich der steuerere Bereich gegenüber der erstbesprochenen Steuerung wesentlich erhöht.

Das negative Zeichen in (5. 10) bringt zum Ausdruck, dass die Brennkam mer gegenüber der Steuerung 1 in der entgegengesetzten Richtung ausgelenk werden muss!

In Figur 5.3 sind die Steuerwinkel β_3 wiederum für die vier Verfolgungsflüg dargestellt. Zur Berechnung wurde l=0,2 m angenommen, was einer sehr kleine



Steuerwinkel β_3 für die vier Raketenbahnen.

aerodynamischen Stabilität entspricht. Mit s-2 m wird l/s-0.1, das heis die Steuerwinkel β_3 sind bei grossen Geschwindigkeiten zehnmal kleiner als [vgl. Formel (5. 10)]. Bei Flugbeginn jedoch ist β_3 sehr klein, da seine Funkti zunächst nur darin besteht, die Rakete und damit den Schubvektor entgeg noch sehr kleinen aerodynamischen Rückstellmomenten in die erforderlic Richtung zu drehen, ähnlich der besprochenen zweiten Steuerung mit indif renter Rakete.

Da für alle berechneten Verfolgungsflüge der Steuerwinkel β_3 nur ein Grad beträgt, erkennt man, dass bei dieser Steuerungsart der Wirkunbereich kaum durch die Begrenzung des Steuerwinkels eingeschränkt werd wird. Dagegen ist es nicht einfach, den Abstand l zwischen Schwerpunkt ur Druckmittelpunkt während des ganzen Fluges klein zu halten, da sowohl « Schwerpunkt infolge Treibstoffverbrauches als auch der Druckmittelpunmit ändernder Mach-Zahl wandern.

d) Wirkungsbereich

Die hier besprochenen Raketenbahnen stellen wegen der mässigen Batkrümmungen noch gut erfüllbare Forderungen an die drei besprochenen Stett

systeme, mit Ausnahme der ersten Steuerung, die in den Flügen I und II den maximalen Steuerausschlag überschreitet. Die zweite Steuerungsart würde erst dann versagen, wenn die geforderte Querkraft die Grössenordnung der Schubkraft erreicht, während die auftriebgesteuerte Rakete bei mässigen Steuerausschlägen Querkräfte zu erzeugen vermag, die ein Vielfaches der Schubkraft betragen. Die Grenze liegt hier beim höchstzulässigen Auftrieb der Flügel.

Die bei der Bahnberechnung nicht berücksichtigten, aber in Wirklichkeit vorkommenden Schwingungen der Raketenbahn um die Leitstrahlmitte und der Rakete um ihre Querachsen erfordern zusätzliche Steuerbewegungen und Querkräfte, wodurch der Wirkungsbereich weiter eingeschränkt wird. Auch besteht die Gefahr, dass der Steuermechanismus nicht mehr richtig auf den Leitstrahl reagiert, wenn Flugbahn und Leitstrahl zu grosse Winkel einschliessen.

Da bei gasstrahlgesteuerten Raketen die Steuerwirkung bei Brennschluss erlischt, ist die ausserste Grenze des Wirkungsbereiches durch den erreichten Flugweg der Rakete bei Brennschluss gegeben.

6. Die Rotationsbewegung der Rakete

a) Drehung um die Querachse

Die Tatsache, dass die Drehbewegung um die Querachse die Vorwärtsbewegung der Rakete nicht wesentlich beeinflusst, gestattete uns, die Raketenlugbahnen unter alleiniger Berücksichtigung des Widerstandsgesetzes (2.5) zu berechnen. Die Drehung um die Querachse muss erst bei der Berechnung der notwendigen Steuerbewegungen beachtet werden.

Es würde den Rahmen dieses Berichtes sprengen, wollte man näher auf die Auswirkungen der Drehung um die Querachse eingehen. Bei den aerodynamisch stabilen Geschossen sind diese Rotationsbewegungen meist Schwingungen. Diese verden durch die formgebundene aerodynamische Dämpfung und durch die Coriolis-Wirkung des Gasstrahls nur sehr wenig gedämpft und bedürfen daher ler künstlichen Dämpfung durch die Steuerung. Wegen der Koppelung zwischen Drehbewegung um Querachse und Translationsbewegung treten die Drehchwingungen stets gemeinsam mit Querbewegungen des Raketenschwerpunktes uf. Letztere bewirken aber Abweichungen vom Leitstrahl, welche über die Steuerfunktion die Drehbewegung der Rakete beeinflussen. Derart entsteht in geschlossenes servomechanisches System, zu dessen Untersuchung die Daten er hier berechneten «idealen» Flugbahnen die Grundlage bilden.

b) Drehung um die Längsachse

Die Drehung um die Längsachse der Rakete spielt für die hier berechneten lugbahnen dann keine Rolle, wenn das Geschoss in bezug auf diese Drehung nempfindliche aerodynamische Daten aufweist und wenn die Steuerung fähig it, trotz der Längsrotation die richtigen Funktionen auszuführen.

ZAME

7. Bemerkungen zum Servomechanismus der Steuerung

Es ist in unsern Bewegungsgleichungen angenommen worden, die Rakete befinde sich stets in der Mitte des Leitstrahls, was, wie eingangs erwähnt einen idealen Servomechanismus der Steuerung voraussetzt.

Damit die Rakete bei automatischer Leitstrahlsteuerung (ohne Signale von Boden aus) einen Steuerbefehl erhält, hat sie sich in einem gewissen Abstanc von der Leitstrahlmitte zu befinden. Dieser elektrische Steuerbefehl muss so beschaffen sein, dass einerseits die Rakete auch bei bewegtem Leitstrahl sich möglichst wenig von der Leitstrahlmitte entfernt und andererseits keine Übersteuerung auftreten kann.

Befindet sich die Rakete in irgendeinem Zeitpunkt neben der Leitstrahl mitte, so tritt ein Einschwingvorgang ein, bei ruhendem, senkrechtem Leitstrahl um seine Mitte, bei schrägem oder bewegtem Leitstrahl um eine gewisse Gleichgewichtslage. Von der Steuerung wird gefordert, dass dieser Einschwing vorgang möglichst kurze Zeit dauert.

Die theoretischen Berechnungen dieser Einschwingvorgänge führen au Differentialgleichungssysteme höherer Ordnung mit variablen Koeffizienten die schrittweise integriert werden müssen, wozu programmgesteuerte Rechen maschinen gut angewandt werden können. Auf Grund von Stabilitätsunter suchungen dieser Einschwingvorgänge müssen die Steuerkoeffizienten de Servomechanismus gewählt werden.

Die Schwingungen einer als Massenpunkt betrachteten Rakete um ein Gleichgewichtslage beeinflussen unsere berechneten idealen Raketenbahne kaum, da es sich um Bewegungen von nur wenigen Metern handelt gegenübe einer Vorwärtsbewegung von einigen Kilometern.

Wie wir gesehen haben, muss bei der Steuerung durch Auftrieb die Raketwenig stabil sein. Diese kleine aerodynamische Stabilität wird aber nicht nu durch die Wanderung des Druckmittelpunktes infolge variabler Geschwindigkeit beeinflusst, sondern auch durch die Wanderung des Schwerpunktes de Rakete wegen des Brennstoffverbrauchs. Alle diese Gegebenheiten müssen is, der Dimensionierung der Steuerung berücksichtigt werden.

Herrn Dr. A. Gerber, Direktor der Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon, Bührle & Co., urder Contraves AG., Zürich, möchten wir für sein förderndes Interesse an der vorliegenden Arbeiherzlich danken. – Für die Zurverfügungstellung finanzieller Mittel von seiten der Kriegstechnische Abteilung des Eidgenössischen Militärdepartements zur Durchführung von numerischen Recnungen möchten wir unseren verbindlichsten Dank aussprechen.

Summary

Assuming a straight coarse of the target, the trajectories of beam rider ant-aircraft missiles are computed for different launching intervalls. Three different guiding-systems of the jet-guided missiles are discussed by showing the necessau stearing movements.

(Eingegangen: 8. April 1952.)

Vol. III, 1952

Über exakte Lösungen der Stokes-Navier-Gleichungen inkompressibler Flüssigkeiten bei veränderten Grenzbedingungen

Von Jakob Ackeret, ETH., Zürich

Bekanntlich macht es sehr grosse Schwierigkeiten, Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen zu finden, wenn Trägheit und Reibung gleichzeitig berücksichtigt werden sollen. Bei grösseren Reynolds-Zahlen und schlanken Körperformen liefert die Grenzschichttheorie zwar eine praktisch sehr befriedigende Näherung; bei stumpferen Formen aber setzen Ablösungen ein mit nichtstationären Wirbeln, die sich einer theoretischen Behandlung fast ganz entziehen.

Nun ist es nur bedingt richtig, wenn man sagt, dass eben die Reibung der Gase oder Flüssigkeiten schuld an dieser Schwierigkeit sei. Deren direkte Ursache ist nämlich das *Haften* der Flüssigkeit an den als starre Körper berachteten Oberflächen. Im Falle der Gase weiss man übrigens heute ziemlich zut, dass der Mechanismus der Wechselwirkung eines Gasmoleküls mit einem undern («innere» Reibung) sehr verschieden ist von der Wechselwirkung des Moleküls mit dem Kristallgitter der Wand («äussere» Reibung).

Es ist nun mehr diese Grenzbedingung, die die Lösung erschwert, als die innere» Reibung. Erst durch das Haften entstehen die grossen Geschwindigeitsgradienten, die zur Grenzschichtbildung führen.

Dass bei anderen Grenzbedingungen unter Umständen sehr einfache Lösunen auch bei komplizierten Körperformen möglich sind, hat schon STOKES
erkannt¹) ²). Freilich bietet deren praktische Realisierung grosse Schwierigeiten, die wohl nur allmählich überwunden werden können. Trotzdem dürfte
ine nähere Betrachtung von Interesse sein. Wir wollen uns zunächst mit
ebenen stationären Parallelströmungen um zylindrische Konturen befassen,
bwohl die Betrachtungen allgemeinere Gültigkeit haben.

¹⁾ J. G. Stokes, Math. Phys. Papers 3, 73.

²) Nach Fertigstellung der vorliegenden Untersuchung wurde ich in freundlicher Weise auf 1e sehr interessante Arbeit von Hamel aufmerksam gemacht (Z. angew. Math. Mech. 21, 129–139 [41]), die mir leider entgangen war und die sich auch mit diesem Gegenstand befasst (offenbar ne Kenntnis der Stokesschen Bemerkungen). Hamel hat als Beispiel unter anderem auch den linder behandelt [Formel (7) dieser Arbeit]. Es schien mir aber nicht unangemessen, diese Note gekürzt zum Abdruck zu bringen, da sie, wie ich hoffe, neue Beispiele und Gesichtspunkte fweist.

Die Stokes-Navier-Gleichungen:

$$\varrho\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\,\varDelta u\,,\quad \varrho\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x}+v\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\,\varDelta v$$

reduzieren sich auf die einfachen Euler-Gleichungen ohne Reibung, falls ein Potentialströmung vorliegt.

Dann ist

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \quad \text{und} \quad \Delta \Phi = 0.$$

Es verschwinden aber auch Δu und Δv , da zum Beispiel

$$\Delta u = \Delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \Phi \right) = 0 \; .$$

Aus den übrigbleibenden Euler-Gleichungen berechnet sich der Druck gena wie im reibungslosen Fall. So ist der Druckwiderstand eines beliebigen Zylinde stets Null. Der Auftrieb, falls Zirkulation vorhanden ist, bleibt unveränder

Verändert werden nur die Grenzbedingungen. Zwar werden die Normakomponenten der Geschwindigkeit an der Körperoberfläche immer noch verschwinden müssen (es sei denn, dass man absaugt). Hingegen müssen tangen tiale Schubspannungen teils mit, teils gegen die Strömung an der Oberfläche angebracht werden. Der einfachste Fall ist der, dass die Oberfläche in sich bewelich ist und gerade mit der Potential-Oberflächengeschwindigkeit in Richtunger Strömung bewegt wird. Eine etwas rohe Realisierung wäre möglich durch Rollen und Riemen, die natürlich im allgemeinen von Ort zu Ort veränderlich Geschwindigkeiten haben müssen. Falls man dann ideales Haften an diese beweglichen Oberfläche voraussetzt, sind Flüssigkeitsbewegung und Grenzbildingungen der Potentialströmung vollständig angepasst. Die schwierige Realisierung ist wohl der Grund, dass man diese Art Grenzbedingungen kaus beachtet, trotzdem der Magnus-Effekt an Zylindern doch deutlich zeigte, das auch mit der dort vorhandenen, sehr unvollkommenen Annäherung scharrecht beachtliche Resultate erzielt werden konnten¹) ²).

Setzen wir uns aber zunächst über solche Bedenken hinweg, so zeigen sich sehr einfache Gesetzmässigkeiten, auf die wir hier nun näher eingehen wolken Da die Oberfläche bewegt ist und gleichzeitig unter tangentialen Spannungsteht, muss Arbeit geleistet werden, trotzdem der Zylinder als Ganzes kein Widerstandskraft erfährt. Die so aufgewendete Leistung ist nun gerade die Äquivalent der Dissipation im Flüssigkeitsraume. Die örtliche Dissipation

¹⁾ Es ist bedauerlich, dass die seinerzeitige übertriebene Reklame mit dem «Flettner-Rotidas wissenschaftliche Interesse eher verringert hat.

²) Im Jahre 1918 schlug Rayleigh in einer kurzen Note (Sci. Papers 6, 552/553) vor, rotiered Zylinder bei zweidimensionalen Diffusoren zu verwenden.

bekanntlich im ebenen Fall:

$$\delta = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\}.$$

Über das ganze Strömungsfeld integriert, ergibt sich bei wirbelfreier Strömung die Gesamtdissipation D (mit $\partial u/\partial x = -\partial v/\partial y$ und $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$) zu

$$D = b \int \int \delta \, dx \, dy = \mu \, b \int \int \left\{ 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} \, dx \, dy$$
$$= \mu \, b \int \int \left\{ 4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \, dx \, dy.$$

Schreibt man

$$D = 2 \mu b \int \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy,$$

so ergibt eine einfache Anwendung des Greenschen Satzes (da ja Δu und Δv verschwinden)

$$D = -2 \mu b \int \left(u \frac{\partial u}{\partial n} + v \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

über alle Grenzflächen integriert. Das ist auch gleich (mit $c^2 = u^2 + v^2$)

$$D = -\mu b \int \frac{\partial c^2}{\partial n} ds = -2 \mu b \int c_s \frac{\partial c_s}{\partial n} ds.$$
 (1)

Nun ist aber die Schubspannung in der reibenden Flüssigkeit

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

und an den Oberflächen:

$$\tau_0 = 2 \,\mu \, \frac{\partial c_s}{\partial n}$$

n Richtung der Bewegung wirkend.

Wir erhalten somit für die aufzuwendende Leistung L:

$$D = L = -b \int \tau_0 c_s ds \tag{2}$$

in Ergebnis, das auch anschaulich erkannt werden kann.

Für die praktische Berechnung lässt sich dieser Ausdruck noch weiter verinfachen:

Bei Potentialströmung ist nämlich:

$$\frac{\partial c_s}{\partial n} = \frac{\partial c_n}{\partial s}$$
.

Beachtet man, dass (Figur 1)

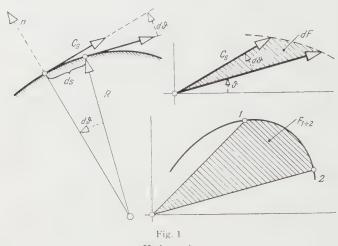
$$dc_n = c_s d\vartheta$$
 und $R d\vartheta = -ds$,

so folgt in der Grenze

$$\frac{\partial c_n}{\partial s} = -\frac{c_s}{R}$$
,

also

$$\tau_0 = -\frac{2 \mu c_s}{R} ,$$



Hodograph.

so dass die aufzuwendende Leistung sich schreibt:

$$L = 2 \mu b / \frac{c_s^2}{R} ds, \qquad (3)$$

das Integral über den Umriss der Kontur erstreckt. Der Anteil der unendlic weit entfernten übrigen Grenzen ist verschwindend.

Man kann einen äquivalenten Widerstand W^* formell einführen durch:

$$L - W^* V$$
, $W^* = \frac{2 \mu b}{V} \int \frac{c_s^2}{R} ds$

oder dimensionslos mit einer charakteristischen Länge L

$$c_w^* = \frac{W^*}{(\varrho/2) \ V^2 \ b \ L} \ , \quad c_w^* = 4 \ \ \frac{\mu}{\varrho \ V^3 \ L} \int \frac{c_s^2}{R} \, ds$$

und mit Einführung der Reynolds-Zahl $Re=\varrho\ V\ L/\mu$

$$c_w^* = \frac{4}{Re} \int \left(\frac{c_s}{V}\right)^2 \frac{d_s}{R} = \frac{4}{Re} J. \tag{4}$$

 c_w^* geht daher im ebenen Fall umgekehrt proportional zur Reynolds-Zahl, nimmt also sehr schnell ab.

Da für ähnliche Konturen das Integral J gleich gross ist, folgt, dass die Leistung

 $L = c_w^* = \frac{0}{2} I^{*3} h L = 2 \mu I^{*2} h J$

nur von der Geschwindigkeit, nicht aber von der Dimension der Kontur abhängt. Dieses zunächst etwas merkwürdig erscheinende Ergebnis erklärt sich anschaulich daraus, dass die Geschwindigkeitsgradienten und damit die Schubspannungen umgekehrt proportional zum linearen Maßstab der Kontur gehen. Formel (4) ist für alle Reynolds-Zahlen gültig.

Da der Krümmungsradius R vielfach eine recht komplizierte Funktion der Bogenlänge ist, ist unter Umständen eine dritte Schreibweise von Vorteil, die die Integration in die Hodographenebene verlegt (Figur 1).

Es ist dem Betrage nach

$$\frac{c_s^2 ds}{R} = c_s^2 d\theta ;$$

das ist aber 2 dF, wo dF das schraffierte Flächenelement im Hodographen bedeutet.

Somit stellt

$$L_{1,2} = 4 \mu b \int_{1}^{2} dF = 4 \mu b F_{1 \div 2}$$
 (5)

lie Leistung dar, die auf das Oberflächenstück 1, 2 entfällt.

Beispiele

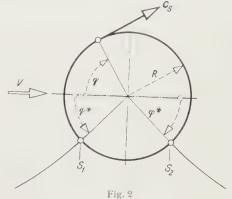
1. Kreiszylinder im Parallelstrom mit Zirkulation (Figur 2)

Hier ist, da R = const, Formel (3) geeignet. Es ist $c_s = 2 V (\sin \varphi + \sin \varphi^*)$, vo φ^* der Winkel ist, der zu den Staubunkten gehört. Er hängt mit dem Aufriebsbeiwert c_a (bezogen auf Zylinderburchmesser) wie folgt zusammen:

$$\sin q^* = \frac{c_u}{4\pi}.$$

formel (3) ergibt nach elementarer Rechnung:

$$1. - 8\pi \mu \Gamma^2 b \left\{ 1 + \frac{c_a^2}{8\pi^2} \right\}$$
 (6)



Zylinder im Parallelstrom mit Zirkulation.

beziehungsweise

$$c_w^* = \frac{16\pi}{Re_d} \left\{ 1 + \frac{c_a^2}{8\pi^2} \right\},$$
 (6a.

WO

$$Re_d = \varrho - \frac{1-2}{\mu} R$$
.

Für symmetrische Anströmung (keine Zirkulation, also auch $c_a = 0$), folgt:

$$L = 8 \pi \mu V^2 b. {7}$$

Bei sehr grosser Zirkulation wächst die Leistung rasch, bei $\varphi^* = 90^\circ$, $c_a = 4$: ist sie beispielsweise dreimal so gross wie im symmetrischen Fall.

2. Schwach gewölbtes Wellblech (Figur 3)

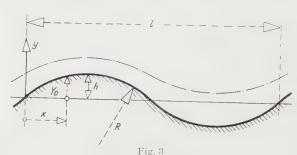


Fig. 3 Überströmtes Wellblech.

$$y_0 = h \sin \frac{2 \pi x}{l}$$
, wo $\frac{h}{l} \ll 1$.

Das Potential ist

$$\Phi = Vx - Vh\cos\frac{2\pi x}{l}e^{-\frac{2\pi v}{l}},$$

die Geschwindigkeit an der Oberfläche:

$$c_s \simeq V \left\{ 1 + \frac{2 \pi h}{l} \sin \frac{2 \pi x}{l} \right\},$$

die Krümmung:

$$\frac{1}{R} \cong \frac{4 \pi^2 h}{l^2} \sin \frac{2 \pi x}{l} = \frac{4 \pi^2}{l^2} y_0.$$

Nach Formel (3) wird für eine volle Periode

$$L = 2 \, \mu \, b \, \int \frac{c_s^2}{R} \, dx - 16 \, \pi^3 \, \mu \, V^2 \, b \, \frac{h^2}{l^2} \, .$$

Der äquivalente Widerstand ist

$$c_w^* = \frac{L}{V(\varrho/2)|V^2|h|} = \frac{32|\pi^3|}{Rc_1} \cdot \frac{h^2}{l^2}.$$
 (8a)

3. Elliptischer Zylinder (ohne Zirkulation) (Figur 4)

Hier ist es vorteilhaft, nach Formel (5) zu rechnen, das heisst zuerst den Hodographen zu bestimmen. Wir benützen die konforme Abbildung des Kreises auf die Ellipse.

Die Abbildungsfunktion ist

$$z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right).$$

für die Halbachsen erhalten wir

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{\gamma^2} \right),$$

$$\beta = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

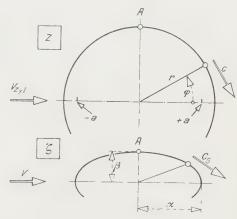


Fig. 4
Konforme Abbildung des Kreises auf die Ellipse.

Das Verhältnis $\sigma=eta/lpha$ ist also $=(1-a^2/r^2)/(1+a^2/r^2)$, damit

$$\frac{a^2}{r^2} = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$$
 bzw. $1 + \frac{a^2}{r^2} = \frac{2}{1+\sigma}$

er Radius des abzubildenden Kreises ist damit gegeben.

. Die Geschwindigkeit im Äquatorpunkt A ist vor der Abbildung 2 $V_{Zyl} + V$, ach der Abbildung

$$c_{s,j} = c_{s_{max}} = \frac{V}{\frac{d\xi}{dz}}\Big|_{A} = \frac{V}{\frac{1}{2}\left|\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)\right|}.$$

 $a z_A = i r$, folgt

$$c_{s_A} = \frac{2 V}{1 + \frac{a^2}{r^2}} = V(1 + \sigma) \ .$$

Man kann nun leicht zeigen, dass der Hodograph für ein Ellipsenviertel der valbkreis mit dem Durchmesser $c_{s_{max}}$ ist.

Allgemein ist nämlich:

$$\frac{d\zeta}{dz} = r^* e^{i\psi}, \quad r^* = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{a^2}{z^2}$$

und mit $z = r e^{rq}$

Die Geschwindigkeit c_s ist gegeben durch

$$c_s = \frac{V \sin \varphi}{\gamma^*} = \frac{2 V \sin \varphi}{\sqrt{1 + \frac{a^4}{\gamma^4} - 2 \frac{a^2}{\gamma^2} \cos 2 \varphi}}.$$

Berechnen wir: $\cos \theta = \sin (q - \psi)$, so finden wir nach einfacher Rechnung

$$\cos\vartheta = \frac{1}{2\,r^*}\sin\varphi\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right),\,$$

so dass also die Beziehung besteht:

$$c_{s}=\cos\vartheta\ V\left(1+\sigma\right)=c_{s_{max}}\cos\vartheta\ .$$

Damit ist gezeigt, dass der Hodograph für jede umströmte Ellipse ein *Kreis* is Die erforderliche Leistung kann nach Gleichung (5) berechnet werden: Für die Viertelellipse ist

$$\frac{1}{4} L = 4 \mu b F_{Halbkr}$$
 oder $L = 2 \pi \mu V^2 b (1 + \sigma)^2$. (

Ist $\sigma = 1$ (Kreiszylinder), so folgt

$$L=8\pi\mu V^2 b$$
 ,

in Übereinstimmung mit Gleichung (7). Interessant ist, dass für $\sigma=0$ (ebe-Platte parallel angeströmt) ein endlicher Wert herauskommt:

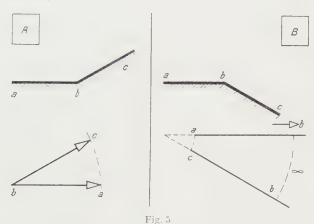
$$L_{Platte} = 2 \pi \mu V^2 b$$
 . (9

Der Grund dafür liegt in der sehr grossen Dissipation in der Nähe der Stæpunkte. Die Länge der gekrümmten Linienelemente nimmt zwar ab; daffwird der Krümmungsradius kleiner.

Bei Querstellung der Platte ist $\sigma = \infty$, und damit wird die theoretisc: Leistung auch unendlich gross.

4. Andere Profilformen

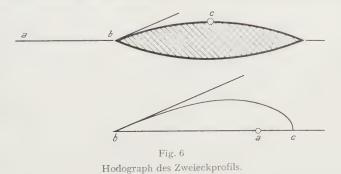
Man kann an Hand des Hodographen sehen, dass konvexe Ecken die Arbeitsleistung unendlich, konkave aber einen endlichen Wert dafür ergeben Figur 5 B und 5 A).



Hodographen bei ein- und ausspringenden Ecken.

Sind in a und c irgendwelche endlichen Werte von c_s vorhanden (Figur 5A), p ist die Hodographenfläche endlich— im Falle der Figur 5B aber unendlich. Von unserem Standpunkt aus muss man also konvexe Ecken vermeiden.

Für eine Sichelform kann man den Hodographen sofort schätzungsweise igeben. Man erkennt, dass die Hodographenfläche bei dünner werdender schel gegen Null geht (im Gegensatz zur unendlich dünnen Ellipse) (Figur 6).



Es ist nicht verwunderlich, dass derartige Unterschiede vorkommen, da ja ist der krümmungsmildernde Einfluss der Grenzschichten wegfällt und die sipation sehr hohe Werte erreichen kann.

Ein besonders einfacher Fall entsteht, wenn Begrenzungen mit konstante Geschwindigkeit vorkommen (die auch leichter zu realisieren wären).

Denken wir uns die gestrichelte Freistrahlgrenze in dem von Riabouchinsky und Demtschenko¹) behandelten Fall (Figur 7) materiell, aber auch in sich

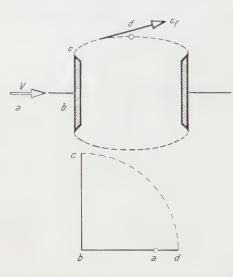


Fig. 7

Hodograph einer geschlossenen Freistrahlströmung nach Riabouchinsky und Demtschenko.

beweglich, so kann die Leistung so fort angegeben werden, wenn c_f/\mathbb{I} aus der konformen Abbildung gefun den ist. Der Hodograph für einer Quadranten ist in Figur 7 unten skiz ziert.

Die Leistung ist nach Formel (5

$$\frac{L}{4} = 4 \mu b F_{a,b,c,d} = 4 \mu b \frac{\pi c_f^2}{4},$$

$$L = 4 \pi \mu c_f^2 b.$$
(10)

Man kann die Leistung in zwe Schritten auch nach der Formel (1 rechnen:

Von b bis c ist $R = \infty$, der Ante an L also Null.

Von c bis d ist $c_s = c_f = \text{const}$, als

$$\frac{L}{4} = 2 \,\mu \,b \,c_f^2 \int\limits_{0}^{d} \frac{ds}{R} \,.$$

Da aber $ds/R = d\vartheta$ und $\int d\vartheta = \pi/2$, so folgt wiederum (10).

5. Kugel

Wir haben bisher ebene Probleme behandelt. Es ist nicht schwer, auf andere – etwa rotationssymmetrische Formen – zu untersuchen, zum Beispedie Kugel.

Für den Meridianschnitt gilt wie früher:

$$\tau_0 = 2 \mu \frac{c_s}{R}.$$

Mit

$$c_s = \frac{3}{2} V \sin \varphi$$
 und $df = 2 \pi R \sin \varphi R d\varphi$

¹⁾ RIABOUCHINSKY und DEMTSCHENKO, Verh. 3. int. Kongr. techn. Mech., Stockholm 19. S. 159-165.

ergibt sich

$$L = -\int \tau_0 c_s dt = 12 \pi \mu V^2 R.$$
 (11)

Definieren wir

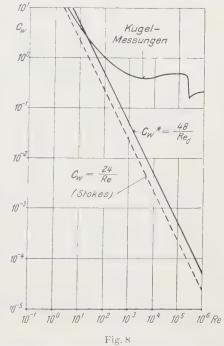
so ergibt sich

$$c_w^* = \frac{L}{V(\varrho/2) V^2 \pi R^2}$$
 und $Re_d = \frac{\varrho V 2 R}{\mu}$,
$$c_w^* = \frac{48}{Re_d}.$$
 (11a)

Vergleich mit normalen Grenzbedingungen

Ziehen wir etwa die Kugel heran, so zeigt unsere Formel eine sehr nahe Verwandtschaft mit der für langsame Bewegungen ($Re_d \le 1$) gültigen Stokes-

schen Formel. Der Betrag des äquivalenten Widerstandes ist genau um den Faktor 2 grösser als der Stokessche. Dass dieselbe Abhängigkeit von Re vorhanden ist, kann man sich durch die Betrachtung der Geschwindigkeitsgradienten klarmachen, die in beiden Fällen von der Grössenordnung V/R sind. Nazürlich hätte es unter diesen Umständen keinen Nutzen, bewegliche Oberflächen zu verwenden. (Beispielsweise würde bei 3akterien, wo mitbewegte Oberflächen rielleicht noch denkbar wären, damit tein Gewinn entstehen.) Die logarithnische Auftragung, Figur 8, zeigt sehr leutlich, dass der Nutzen der vollen Mitbewegung bei grossen Reynoldsahlen liegt. Beispielsweise würde der quivalente Widerstandswert bei Re - 480 000 (Grössenordnung der kritichen Reynolds-Zahl für Umschlag er Grenzschicht von laminarer in turulente Strömung) auf 1/10000 sinken, ährend die gewöhnlichen Grenzbedinungen ~1/5 liefern. Ähnliche Verbeserungen findet man auch im zwei-



Kugelwiderstand bei normalen Grenzbedingungen und äquivalenter Widerstand bei bewegter
Oberfläche.

imensionalen Fall, wo praktisch Reynolds-Zahlen von Millionen auftreten, is dass die Leistung, die zur Überwindung der Reibung erforderlich ist, iraktisch verschwindet.

Stabilität

Angesichts dieser Möglichkeiten drängt sich, ganz abgesehen von technschen Schwierigkeiten, die Frage auf: Ist die hier vorausgesetzte laminar-Strömung bei mitbewegter Oberfläche auch bei grossen Reynolds-Zahlen stabil

Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel: die Kanalströmung mit fester bzw. mitbewegter Wand (Figuren 9a, b, c). Im zweiten Falle kann ma

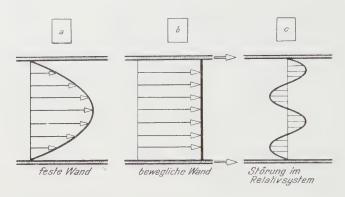


Fig. 9

Zur Stabilität der Strömung bei mitbewegter Wand.

natürlich sogleich auf Ruhe transformieren, indem man in ein mitbewegt-Koordinatensystem geht. Nun gibt aber eine beliebige, an der Wand veschwindende kleine Störung (Figur 9c) in sonst ruhender Flüssigkeit b ruhenden Wänden keinerlei Anlass zu Anfachungen. Es würde ja eine Energie quelle fehlen, so dass mindestens in diesem Falle die Strömung absolut stab ist. Schwieriger dürfte die Frage im allgemeinen Fall zu beantworten sein. Doc kann man etwa folgendermassen argumentieren. Bei gebräuchlichen Anwei dungen, wie etwa Flugzeugen oder grossen Objekten im Windkanal, auch b Wasserströmungen im grossen Massstab, hat man noch nie Turbulenz im freie Flüssigkeitsraum, wo Potentialströmung herrscht, entstehen sehen. Stets ka die Turbulenz von den Wänden. Da wir Haften relativ zur bewegten Warangenommen haben, wird sich eine beliebige Störung in der wirklich freie Strömung und bei mitbewegter Wand etwas verschieden verhalten müsse insofern, als dort die Strömung relativ zur Wand verschwinden muss. Es kör nen sich also dort auch Grenzschichten ausbilden. Es wäre ein Beweis nöti dass diese nicht zu Turbulenz führen können. Die bisherigen Versuche zur Magnus-Effekt sprechen eher zugunsten der Laminarhaltung der Ausse: strömung.

Teilweise Mitbewegung

Die genaue Realisierung der Grenzbedingungen (mitlaufende Wände) wird mallgemeinen so schwer sein, dass mit einer idealen Erfüllung kaum zu rechten ist. Um so mehr könnte eine teilweise, eventuell auch stückweise Mitbewegung von Bedeutung sein. Freilich treten dann Grenzschichten auf, und die chöne Einfachheit unserer bisherigen Überlegungen verschwindet. Es dürfte ich aber meines Erachtens lohnen, die Methoden der Grenzschichttheorie auf eilweise mitbewegte Wände auszudehnen. Schon mit einfachen Abschätzungen kann man erkennen, dass zum Beispiel bei Druckanstieg die Ablösung weitgehend vermieden werden kann, wenn die Wand auch nur einen Bruchteil der botentiellen Oberflächengeschwindigkeit hat. Schwieriger dürfte die Frage der Stabilität sein, da man mit stark gekrümmten Geschwindigkeitsprofilen rechten muss.

Summary

As Stokes pointed out long ago there exist exact solutions of the hydro-ynamic equations if the boundary conditions are modified. If it can be arranged hat the "solid" boundaries are actually moving with the fluid velocity then really imple solutions are obtained. Several examples are worked out. As turbulence is nlikely to occur under these conditions the power to move bodies in a viscous uid at high Reynolds' numbers would become extremely low. It seems that even partial fulfilment of these changed conditions would be of practical interest.

lingegangen: 13. Dezember 1951.)

Ther die Behandlung von Mehrleitersystemen mit transversal elektromagnetischen Wellen bei hohen Frequenzen

Von Hans J. von Baeyer und Ronald Knechtli, Baden1)

1. Einführung

Die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs eines Systems parallel rlaufender Leiter spielt in der Technik der kurzen und ultrakurzen Wellen in grosse Rolle. Wird die Welle dabei innerhalb eines von einem einzigen Leiberandeten Gebietes geführt, so handelt es sich um eine «Hohlleiter»-Welle, iren dämpfungsarme Ausbreitung bei gegebenen Leiterabmessungen erst oberibe einer bestimmten Minimalfrequenz (der Grenzfrequenz) möglich ist und

1) AG. Brown, Boveri & Cie., zur Zeit Montreal (Kanada) bzw. Massachusetts Institute of hnology, Boston (USA.).

bei welcher stets die Längskomponente entweder des elektrischen Feldes oder des magnetischen Feldes von Null verschieden ist. Im ersteren Fall spricht mat von einer transversal magnetischen (TM.), im letzteren Fall, von einer transversal elektrischen (TE.) Welle. Sind dagegen mehrere Leiter an der Weller ausbreitung beteiligt, so ist neben den TE.- und TM.-Wellen noch eine TEM Welle möglich, bei welcher die Längskomponenten sowohl des elektrischen a auch des magnetischen Feldes überall Null sind. Da bei dieser Welle keir Grenzfrequenz existiert, bleibt sie bei tiefen Frequenzen, bei denen weder TF. noch TM.-Wellen auftreten können, als einziger und bedeutungsvoller Weller typ bestehen.

Während nun die Eigenschaften der TEM.-Wellen auf Koaxial- und Paalleldrahtleitungen allgemein bekannt sind, wurden Mehrleitersysteme m unsymmetrischen Anregungs- und Abschlussbedingungen sowie mit beliebige Ouerschnittsverhältnissen der einzelnen Leiter in der Kurzwellentechnik bish wenig behandelt. In der Kabel- und Freileitungstechnik ist die Theorie solch Mehrleitersysteme schon lange bekannt und Gegenstand zahlreicher Untel suchungen [1]1), jedoch ist deren Anwendung auf Kurzwellenprobleme mit de speziellen, dort angebrachten Vereinfachungen und Randbedingungen rowenig untersucht worden. Da sich nun die Fälle mehren, in denen eine stren Behandfung des Mehrleiterproblems in der Kurzwellentechnik notwendig wiif und da die Beherrschung solcher Fälle neue technische Möglichkeiten eröffni wird, werden im folgenden, von den Maxwellschen Gleichungen ausgehend, die verallgemeinerten Leitungsgleichungen in einer zur Anwendung in der Kur wellentechnik geeigneten Form aufgestellt und zwei Anwendungsbeispiele « läutert. Das eine Beispiel betrifft einen Richtungskoppler, das andere d gefaltete Dipolantenne, die in erster Näherung als Dreileitersystem aufgefast werden kann.

2. Allgemeine Gleichungen eines n-Leiter-Systems

2.1. Feldgleichungen

Als Mehrleitersystem bezeichnen wir eine Anzahl parallel verlaufender Leter beliebigen Querschnitts. Die Summe der Einzelleiterladungen pro Länge einheit sei in jedem Querschnitt gleich Null, was erfüllt ist, wenn einer Leiter die anderen in Form einer auf Potential Null liegenden Abschirmun: hülle umgibt oder das System über einer unendlich ausgedehnten leitende Ebene (Erde) verläuft. Die Längsachse sei mit z, die Koordinaten der Queschnittsebene mit x und y bezeichnet (Figur 1).

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf Seite

Setzen wir nun die Existenz eines Systems von TEM.-Wellen voraus, so muss überall

$$E_z = 0, \quad H_z = 0 \tag{1}$$

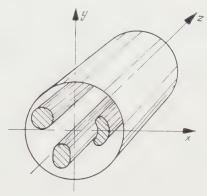


Fig. 1

Allgemeines Vierleitersystem, in welchem einer der Leiter als Abschirmung für die anderen dient.

sein. Somit werden die Maxwellschen Gleichungen:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t},$$
(2)

$$\operatorname{rot} \tilde{E} = -\frac{\partial \tilde{B}}{\partial t} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}_{z}\bar{E}=0, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \right)$$
 (5)

$$\operatorname{rot} \tilde{H} = \sigma \tilde{E} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, & (5) \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\sigma E_x - \frac{\partial E_x}{\partial t}, & (6) \end{cases}$$

$$\int \operatorname{rot}_{z} \tilde{H} = 0. \tag{7}$$

Aus (4) und (7) sehen wir, dass \tilde{E} und \tilde{H} in der (x, y)-Ebene von Potenalen ableitbar sind, so dass man schreiben kann:

$$\tilde{E} = -\operatorname{grad} p$$
, $\tilde{H} = -\operatorname{grad} \psi$. (8)

us den vier anderen Gleichungen erhält man bei Beschränkung auf die harionische Lösung und für den ausserhalb des Leitermediums liegenden Raum, welchem wir der Einfachheit halber $\sigma = 0$ annehmen,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$
(9)

ZAMD

mit $v^2 = 1/(\varepsilon \mu)$. Dies ist zusammen mit Gleichung (1) der Ausdruck für unge dämpfte TEM.-Wellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig vor der Konfiguration der Leiter gleich der Lichtgeschwindigkeit ist.

Physikalisch erfüllt jedes verlustlose Mehrleitersystem mit parallel verlaufenden Leitern beliebigen Querschnitts die Bedingungen für das Auftreter solcher Wellen, jedoch ist die TEM.-Lösung nur dann die einzige Lösung de Maxwellschen Gleichungen, wenn die Leiterabstände und Querschnittsdimen sionen klein gegen die Betriebswellenlänge sind. Diese Einschränkung ist für Systeme mit nur zwei Leitern wohlbekannt und sei hier ohne strengere Begründung vorausgesetzt.

2.2. Ströme und Spannungen im Mehrleitersystem

Da die Feldgrössen \tilde{E} und \tilde{H} nach (8) von skalaren Potentialen ableitbasind, gelten in der (x, y)-Ebene die statischen Feldgleichungen. So bestehrzwischen den Ladungen q (pro Längeneinheit) der Einzelleiter und deren Potentialen p der bekannte [2] lineare Zusammenhang

$$q_1 = c_{11} \, p_1 + c_{12} \, p_2 + \cdots,$$

$$q_2 = c_{21} \, p_1 + c_{22} \, p_2 + \cdots,$$

$$(c_{ik} = c_k,$$

der sich in Matrizenform schreiben lässt:

$$q = c p. (10)$$

Hierin sind die c_{11} , c_{12} , ... als die elektrostatischen Induktionskoeffizienter definiert, welche sich aus der geometrischen Konfiguration des Leitersystems ergeben und im vorliegenden Fall entsprechend den Ladungen auf die Länger einheit des Systems bezogen sind. Für den praktischen Gebrauch eignen sich als unmittelbare Messgrössen besser die sogenannten Direktkapazitäten zwischen den einzelnen Leitern (wieder pro Längeneinheit des Systems), welche aus (10) abgeleitet werden können [2] und mit den Induktionskoeffizienter folgenden Zusammenhang haben:

$$-c_{i\,k} = C_{i\,k} \quad \text{für} \quad i \neq k, \qquad (i, k = 1, 2, 3, ..., n)$$

$$c_{k\,k} = \sum_{i \, \left\{ \, \, = \, \, k \, \right\}}^{n} C_{i\,k}. \quad C_{0\,k} = \sum_{i \, = \, 1}^{n} c_{i\,k}.$$

Dabei ist die Erde oder der das System abschirmende Leiter mit dem Index bezeichnet und sein Potential gleich Null gesetzt. Dieser Nulleiter, der im rei elektrostatischen Fall auch im Unendlichen liegen darf, ist bei den uns inte: essierenden Hochfrequenzanwendungen wichtig, damit das ganze System innernalb eines gegenüber der Wellenlänge kleinen Querschnittgebietes nach aussen ein abgeschlossen ist.

Weiterhin ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Potentialen p der Einzelleiter und den auf diesen fliessenden Strömen J über den allgemein gültigen Kontinuitätssatz. Dieser verknüpft zunächst die zeitliche Ladungsinderung des i-ten Leiters mit der Stromänderung längs dieses Leiters nach der Beziehung:

 $\frac{\partial}{\partial z} J_i = -\frac{\partial}{\partial t} q_i. \tag{11}$

Setzt man dies in (10, ein, so erhält man ein neues Gleichungssystem, das vieder in Matrizenform geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial}{\partial z} J = -c \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p} \tag{12}$$

nd welches die Abhängigkeit des Stromes auf jedem Einzelleiter von der otentialänderung sämtlicher im Leitungssystem vorhandenen Leiter angibt.

Die Existenz ungedämpfter TEM.-Wellen im Raume ausserhalb des Leiternediums nach den Gleichungen (9) hat zur Folge, dass entsprechend den Feldrössen \tilde{E} und \tilde{H} auch die Potentiale und Ströme aller Einzelleiter separaten Vellengleichungen gehorchen. Integriert man nämlich gemäss (8) die elektrihe Feldstärke von der Oberfläche s_0 des Nulleiters bis zur Oberfläche s_i des ten Leiters und beachtet, dass das Potential p_0 des Nulleiters gleich Null ist, perhält man das Potential des i-ten Leiters

$$p_i = -\int_{-\infty}^{s_i} \vec{E} \, ds.$$

ührt man diese Integration auf beiden Seiten der Wellengleichung (9) durch, o entsteht die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \ p_i = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ p_i$$

it der allgemeinen, periodischen Lösung

$$p_i = A e^{j(\omega t - \gamma z)} + B e^{j(\omega t + \gamma z)}, \qquad (13a)$$

porin $\gamma = \omega/v = 2\pi/\lambda$ gesetzt ist.

Auf ähnliche Weise führt die Verknüpfung des Stromes J_i mit dem Magnetild \tilde{H} an der Oberfläche des *i*-ten Leiters nach Einsetzen in (9) zu einer Wellenleichung

 $\frac{\partial^2}{\partial z^2} J_i = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} J_i$

mit der allgemein periodischen Lösung

$$J_i = D e^{j(\omega t - \gamma z)} + F e^{j(\omega t + \gamma z)}. \tag{131}$$

Die Konstanten A, B, D und F stellen dabei die Amplituden der hin- und rücklaufenden Potential- und Stromwellen auf dem i-ten Leiter dar. Die Amplituden D und F lassen sich nun unter Benutzung von (13a) und der Verknüpfungsgleichung (12) auf die Amplituden A und B zurückführen, wobei mawieder vorteilhaft von der Matrizenschreibweise Gebrauch macht, da nichmehr nur der i-te Leiter, sondern auch alle übrigen Leiter mitberücksichtigwerden müssen. Führt man statt der Potentiale p die Spannungen U ein welche den Potentialdifferenzen gegenüber dem Nulleiter entsprechen um setzt zur Abkürzung die Spannungsamplituden $Ae^{j\omega t} = U$ und $Be^{j\omega t} = U$ so erhält man schliesslich das Gleichungssystem:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' e^{-j\gamma z} + \mathbf{U}'' e^{+j\gamma z},
\mathbf{J} = v \mathbf{c} \left\{ \mathbf{U}' e^{-j\gamma z} - \mathbf{U}'' e^{+j\gamma z} \right\},$$
(15)

welches die grundsätzliche Spannungs- und Stromverteilung auf dem Mehleitersystem als Überlagerung von hin- und rücklaufenden Spannungswelle angibt.

In vielen Fällen liegen als Randbedingung die Ströme und Spannungen α Anfang oder Ende des Leitungssystems vor. Dann ist es vorteilhaft, den Glechungen (15) eine andere Form zu geben, in welcher statt der Konstanten \mathbf{U} und \mathbf{U}'' die Spannungen \mathbf{U}_0 und die Ströme \mathbf{J}_0 am Leitungsanfang (z=0) auftreten. Aus (15) ergibt sich nämlich

$$oldsymbol{U_0} = oldsymbol{U'} + oldsymbol{U''}, \ oldsymbol{J_0} = v \ oldsymbol{c} \left\{ oldsymbol{U'} - oldsymbol{U''}
ight\}$$

und hieraus:

$$m{U}' = rac{1}{2} \left\{ m{U}_0 + rac{1}{v} \; m{c^{-1}} m{J}_0
ight\}, \ m{U}'' = rac{1}{2} \left\{ m{U}_0 - rac{1}{v} \; m{c^{-1}} m{J}_0
ight\}.$$

Setzt man dies wieder in (15) ein, so erhält man:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \cos \gamma \ z - j \frac{1}{v} \mathbf{c}^{-1} \mathbf{J}_0 \sin \gamma \ z,
\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 \cos \gamma \ z \quad j \ v \mathbf{c} \ \mathbf{U}_0 \sin \gamma \ z.$$
(15.)

Das Gleichungssystem (15a) stellt die auf Mehrleitersysteme verallgemeiner: Form der üblichen Leitungsgleichungen dar. Dabei ist der Punkt z=0 au

den Leitungsanfang bezogen. Legt man statt dessen z=0 an das Leitungsende, wie es bei Leitungsproblemen oft vorteilhaft ist, so ist in (15a) das +-Zeichen an Stelle des --Zeichens einzusetzen.

2.3. Die allgemeinen Randbedingungen eines n-Leiter-Systems

In den Gleichungssystemen (15) und (15a) treten jeweils 2n Konstanten U', U'' bzw. U_0 , J_0 auf, welche aus den im speziellen Problem vorliegenden Randbedingungen abzuleiten sind. Physikalisch ist das Leitungsproblem durch lie Abschlusswiderstände der einzelnen Leitungen sowie durch äussere Spannungsquellen bestimmt, wie dies Figur 2 zeigt, welche ein Zweileitersystem mit

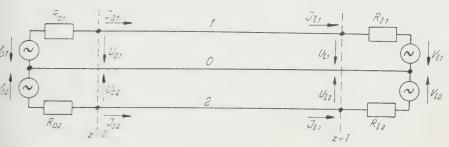


Fig. 2

Schema zur Aufstellung der Randbedingungen eines Zweileitersystems mit einem Null-Leiter.

iull-Leiter, also das einfachste Dreileitersystem darstellt. Unter sinngemässer rweiterung der Bezeichnungsweise der Figur 2 auf ein n-Leiter-System erzben sich die folgenden Beziehungen zwischen den Konstanten der Gleichungsweiteme (15), (15a) und den vorgegebenen Werten der Abschlusswiderstände R nd Spannungsquellen V

$$oldsymbol{U}_0 = -oldsymbol{R}_0 oldsymbol{J}_0 + oldsymbol{V}_0$$
 , $oldsymbol{U}_l = oldsymbol{R}_l oldsymbol{J}_l + oldsymbol{V}_l$,

orin die Widerstandswerte R_{0i} , R_{li} zu Diagonalmatrizen und die Spannungstellen V_{0i} und V_{li} zu Kolonnenmatrizen zusammengefasst sind.

Setzt man nun die aus (15) folgenden Werte ein, so erhält man schliesslich e allgemeinen Randbedingungsgleichungen:

$$(1 + R_0 G) U' + (1 - R_0 G) U'' = V_0,$$

$$e^{-j\gamma l} (1 - R_l G) U' + e^{-j\gamma l} (1 + R_l G) U'' = V_l,$$
(16)

prin $oldsymbol{1}$ die Einheitsmatrix bedeutet und zur Abkürzung $oldsymbol{G} = v \, oldsymbol{c}$ gesetzt ist.

In ähnlicher Weise ergeben sich für das Gleichungssystem (15a) die Randbedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U_0} + \boldsymbol{R_0} \, \boldsymbol{J_0} &= \boldsymbol{V_0}, \\ \boldsymbol{U_0} \cos \gamma \, l + j \, \boldsymbol{R_l} \, \boldsymbol{G} \sin \gamma \, l - j \, \boldsymbol{J_0} \, \boldsymbol{G^{-1}} \sin \gamma \, l + \boldsymbol{R_l} \cos \gamma \, l &= \boldsymbol{V_l}. \end{aligned} \tag{16a}$$

3. Anwendung auf das Dreileitersystem

Verlaufen zwei parallele Leiter innerhalb eines Aussenmantels, so habe wir es mit einem allgemeinen Dreileitersystem zu tun, das nur im speziellen Fa geometrischer Symmetrie (gleiche Leiterquerschnitte, symmetrische Lage inner halb des Aussenmantels) durch den Ansatz einer sogenannten Gegentaktwell beschrieben werden kann. Ist eine solche Leitung elektrisch unsymmetrisch abgeschlossen, so lässt sich bekanntlich der Gegentaktwelle eine Gleichtakt welle überlagern [3], und die Summe von Gleichtakt- und Gegentaktströme und -spannungen bildet ein System, das auch ohne Zuhilfenahme der obeabgeleiteten Beziehungen eine strenge Behandlung aller Probleme erlaub Diese Vereinfachung wird aber hinfällig, wenn die geometrische Symmetri gestört ist, das heisst wenn die beiden Leiter verschiedene Querschnitte au weisen oder ihre Lage innerhalb des Aussenleiters unsymmetrisch ist. Es is dann unter allen Umständen zur Bestimmung der Strom- und Spannungsvel teilung auf den Leitern ein vollständiges Gleichungssystem (15) oder (15a) au zustellen, dessen Lösung mit Hilfe der speziellen Randbedingungen zu e folgen hat.

Für den Fall eines Dreileitersystems nehmen die Gleichungen (15) die forgende Form an (mit $\mathbf{G} = v \mathbf{c}$)

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & -G_{11} & -G_{12} \\ G_{12} & G_{22} & -G_{12} & -G_{22} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1' \ e^{-j\gamma z} \\ U_2' \ e^{-j\gamma z} \\ U_1'' \ e^{+j\gamma z} \\ U_2'' \ e^{+j\gamma z} \end{pmatrix} .$$
 (17)

Auf ähnliche Weise ergibt sich für das System (15a) unter Anwendung der Regel zur Bildung inverser Matrizen:

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma z & 0 & -j\,G_{11}\sin\gamma z & -j\,G_{12}\sin\gamma z \\ 0 & \cos\gamma z & -j\,G_{12}\sin\gamma z & -j\,G_{22}\sin\gamma z \\ -j\,\frac{G_{22}}{\varDelta}\sin\gamma z & +j\,\frac{G_{12}}{\varDelta}\sin\gamma z & \cos\gamma z & 0 \\ +j\,\frac{G_{12}}{\varDelta}\sin\gamma z & -j\,\frac{G_{11}}{\varDelta}\sin\gamma z & 0 & \cos\gamma z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{10} \\ J_{20} \\ U_{10} \\ U_{21} \end{pmatrix}$$
 mit $\Delta = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{vmatrix} = v \left(c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2 \right)$.

Je nach Problemstellung wird man eines dieser beiden Gleichungssysteme bevorzugen, und wir werden im folgenden für beide je ein Beispiel anführen.

4. Der Richtungskoppler

4.1. Problemstellung und allgemeine Ausdrücke

Unter Richtungskopplung verstehen wir das Zusammenwirken zweier Leitersysteme in der Weise, dass ein einseitig gerichteter Energiefluss im einen System eine verschiedenartige Erregung der beiden Enden des anderen Systems zur Folge hat. In der gewöhnlichen Leitungstechnik zerlegt man die Kopplung zweier Leitungssysteme [4] in die magnetischen und elektrischen Kopplungsanteile und stellt bekanntlich fest, dass sich diese beiden Anteile bei ebenen Problemen in der einen Richtung gegenseitig kompensieren. Als praktische Folge wird auf diese Weise zum Beispiel das Nebensprechen zweier paralleler Telephonfreileitungen in der Vorwärtsrichtung sehr klein, während das sogenannte Gegen-Nebensprechen erheblich grössere Werte annimmt. Diese längst bekannten Tatsachen lassen sich in der Kurzwellentechnik zur Realisierung ines Richtungskopplers benutzen, der zum Beispiel eine direkte Ablesung des Reflexionsfaktors von Antennenzuleitungen erlaubt. Ohne auf den Mechanisnus der Kopplung im einzelnen näher einzugehen, lassen sich sämtliche Fragen ines solchen Richtungskopplers aus dem Gleichungssystem (15) unter Zuhilfenahme geeigneter Randbedingungen unmittelbar ableiten.

Legen wir ein Dreileitersystem nach Figur 2 zugrunde, so haben wir folgende

Fragen zu beantworten:

Vorausgesetzt sei eine rein fortschreitende Welle der Spannungsamplitude A auf Leitung 1. Welches sind die Bedingungen, dass die Leitung 2 bei symmetrischem Abschluss ihrer beiden Enden nur am einen Ende eine zu A proportionale Spannung aufweist, während das andere Ende strom- und spannungsfrei bleibt? (Bedingungen der Richtwirkung und Kopplung.)

.) Unter welchen Bedingungen (Abschlussimpedanzen, Kopplung und Frequenz) kann überhaupt eine rein fortschreitende Welle auf Leitung 1 laufen?

(Anpassungsbedingung.)

Wie lassen sich die Bedingungen a und b zur Verwirklichung eines Rich-

tungskopplers vereinigen?

va die Leitung 1 allein und nur am Anfang (z=0) erregt werden soll, so ergibt ch für die Quellspannungen V_0 und V_l nach den Bezeichnungen von Figur 2

$${m V_0} = \left[egin{matrix} A \\ 0 \end{matrix}
ight], \qquad {m V_l} = 0$$
 .

Setzen wir diese Werte in (16) ein, so erhalten wir die Bestimmungsgleinungen für die Konstanten U'_1 , U''_1 , U''_2 , U''_2 in Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} e^{-j\gamma l}(1-R_{11}G_{11}) & e^{+j\gamma l}(1+R_{l1}G_{11}) & -e^{-j\gamma l}R_{l1}G_{12} & e^{+j\gamma l}R_{l1}G_{12} \\ -e^{-j\gamma l}R_{l2}G_{12} & e^{+j\gamma l}R_{l2}G_{12} & e^{-j\gamma l}(1-R_{l2}G_{22}) & e^{+j\gamma l}(1+R_{l2}G_{22}) \\ R_{02}G_{12} & -R_{02}G_{12} & 1+R_{02}G_{22} & 1-R_{02}G_{22} \\ 1+R_{01}G_{11} & 1-R_{01}G_{11} & R_{01}G_{12} & -R_{01}G_{12} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{pmatrix} . \tag{18}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich sämtliche Eigenschaften der betrachteter Anordnung entnehmen.

4.2. Richtwirkung

Mit Richtwirkung bezeichnen wir die Möglichkeit, durch eine Messung an der Nebenleitung 2 die in der Hauptleitung 1 fortschreitende von der rückkehrenden Welle zu unterscheiden. Als Mass der Richtwirkung dient das komplexe Verhältnis der Spannungen an Anfang und Ende der Hilfsleitung 2:

$$r = \frac{U_{l2}}{U_{02}}. (10)$$

Bei Einführung der Reflexionskoeffizienten auf den beiden Leitungen:

$$\Gamma_{1} = \frac{U_{1}^{"}}{U_{1}^{"}}, \qquad \Gamma_{2} = \frac{U_{2}^{"}}{U_{2}^{"}}$$
(20)

lautet unsere Aufgabe, Γ_2 als Funktion von Γ_1 zu bestimmen. Im Dreileiter system gilt nach (15) allgemein

$$U_{12} = U_2' e^{-j\gamma l} + U_2'' e^{+j\gamma l}, \quad U_{02} = U_2' + U_2''.$$

Führen wir nun I_2 ein und kürzen U_2 , so wird:

$$r = \frac{e^{-j\gamma l} + \Gamma_2 e^{+j\gamma l}}{1 + \Gamma_2}.$$
 (21)

Nun ist Γ_2 in Funktion der eigentlich zu messenden Grösse Γ_1 zu berechnen Dazu gehen wir von (18) aus, führen $U_1'' = \Gamma_1 U_1'$ ein und setzen ferner d beiden Abschlusswiderstände R_{02} und R_{12} einander gleich: $R_{02} = R_{12} = R$ Nach längerer Zwischenrechnung, die hier übergangen sei, erhält man dani

$$\varGamma_{2} = \frac{(1 + R_{2} G_{22}) \left(\varGamma_{1} e^{+j\gamma l} - e^{-j\gamma l} \right) - (1 - R_{2} G_{22}) (1 - \varGamma_{1}) e^{-j\gamma l}}{(1 + R_{2} G_{22}) (1 - \varGamma_{1}) e^{+j\gamma l} - (1 - R_{2} G_{22}) \left(\varGamma_{1} e^{+j\gamma l} - e^{-j\gamma l} \right)}. \tag{2.1}$$

Zur Anpassung der zweiten Leitung schreiben wir vor:

$$R_2 = \frac{1}{G_{22}} = \frac{1}{v \, C_{22}} = \frac{1}{v \, (C_{20} + C_{12})}, \tag{23}$$

das heisst, $R_{\rm 2}$ soll gleich dem Wellenwiderstand der Leitung 2 sein. Dann ergibt (22):

$$\Gamma_2 = \frac{\Gamma_1 - e^{-2j\gamma l}}{1 - \Gamma_1}.\tag{24}$$

Gleichung (24) in (21) eingeführt, ergibt schliesslich:

$$r = \frac{U_{12}}{U_{02}} = e^{j\gamma l} \Gamma_1, \quad |r| = |\Gamma_1|.$$
 (25)

Der Quotient |r| der beiden Spannungsbeträge U_{t2} und U_{02} stellt also bei den gegebenen Randbedingungen unabhängig von der Länge der Leitung 2 ein direktes Mass des Reflexionskoeffizienten $|I_1|$ der Hauptleitung dar.

Eine Welle, die in der Hauptleitung vom Anfang z=0 gegen das Ende z läuft, ruft dabei in der Nebenleitung Strom und Spannung am Anfang z0 hervor, während das Ende z1 strom- und spannungsfrei bleibt.

4.3. Berechnung des Kopplungsgrades

Zu berechnen ist das Verhältnis der Amplituden in der Haupt- und Nebeneitung:

$$k = \frac{U_{02}}{U_{01}}. (26)$$

is genügt, dieses Verhältnis für den Fall zu kennen, dass Γ_1 -- 0 ist, und wir ezeichnen dies mit k_0 .

Nun ist:

$$U_{02} = U_2' + U_2'' = U_2' (1 + I_2),$$

$$U_{01} = U_1' + U_1'' = U_1' (1 + I_1'),$$

and man erhält für $k_{\mathbf{0}}$ unter Berücksichtigung der Anpassungsbedingung (23)

$$k_0 = -\frac{G_{12}}{2 \; G_{22}} \; (1 - e^{-2 \, j \, \gamma \, l}). \label{eq:k0}$$

irsetzen wir die Induktionskoeffizienten durch die Direktkapazitäten

$$-\frac{1}{v} G_{12} = C_{12}, \qquad \frac{1}{v} G_{22} = C_{20} + C_{12},$$

so erhalten wir schliesslich für den Betrag von k_0

$$|k_0| = \frac{C_{12}}{C_{12} + C_{20}} |\sin \gamma \, l|. \tag{27}$$

Man sieht daraus, dass eine optimale Kopplung bei $l/\lambda=1,4,3/4,5/4,\ldots$ z erhalten ist und dass diese Kopplung in weiten Grenzen unempfindlich gege Frequenzänderungen ist.

4.4. Anpassung der Leitung 1

Bis jetzt haben wir Γ_1 als gegeben vorausgesetzt. Wir untersuchen nun de Zusammenhang zwischen Γ_1 und den Randbedingungen; dazu greifen wir au Gleichung (18) zurück und erhalten nach einigen Zwischenrechnungen

$$\Gamma_{1} = \frac{\Gamma_{10} - \frac{R_{l1}G_{12}}{1 + R_{l1}G_{11}} \cdot \frac{G_{12}}{G_{22}} e^{-2j\gamma l}}{1 - \frac{R_{l1}G_{12}}{1 + R_{l1}G_{11}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{G_{12}}{G_{22}} (1 + e^{-2j\gamma l})}$$
(28)

mit

$$I_{10} = e^{-2j\gamma l} \frac{R_{l1} G_{11} - 1}{R_{l1} G_{11} + 1}.$$
 (2°

Im Ausdruck (29) erkennen wir den Reflexionskoeffizienten einer gewöhnliche Leitung (Zweileitersystem); und in (28) erscheint Γ_1 einfach als ein in Funktich der Kopplungskapazität $C_{12} = -(1/v) G_{12}$ korrigierter Wert von Γ_{10} . Um zu erreichen, dass die Einführung einer Leitung, auf welcher Γ_1 zu messen ist dieses Γ_1 nicht beeinflusst, muss der genannte Korrekturfaktor klein genussein, das heisst, es muss im gefährlichsten Fall der Anpassung der Haupleitung $(R_{l1} = 1/G_{11})$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{G_{12}}{G_{11}} \cdot \frac{G_{12}}{G_{22}} \ll 1$$
.

Unter dieser Voraussetzung ist die Anpassung der Leitung 1 und entsprechend die Messung von Γ_1 praktisch frequenzunabhängig. Allein die Kopplung |k| ist frequenzabhängig, aber, wie wir gesehen haben, nicht in kritischem Mass-

4.5. Verwirklichungsmöglichkeiten

Ein Dreileitersystem stellt nach den vorangehenden Überlegungen dar einen weitgehend frequenzunabhängigen Richtungskoppler dar, wenn:

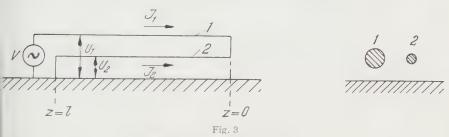
Leitung 1 beliebig abgeschlossen und einseitig erregt ist,

Leitung 2 beidseitig mit $R_2 = 1/G_{22}$ abgeschlossen, das heisst angepasst is

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{G_{12}}{G_{11}} \cdot \frac{G_{12}}{G_{22}} \ll 1$$

und l ungefähr = $\lambda/4$ oder ein ungeradzahliges Vielfaches davon gewählt wir

Zur Verwirklichung kann zum Beispiel innerhalb einer koaxialen Leitung eine zirka (λ , 4)-lange Hilfsleitung nahe der Aussenwand angeordnet, an ihren beiden Enden durch den Aussenleiter hindurchgeführt und reflexionsfrei abgeschlossen werden. Diese Form wurde bereits kurz in der Literatur beschrieben [5], wobei jedoch die theoretische Begründung wenig stichhaltig und zur Ableitung quantitativer Beziehungen ungeeignet war. Eine andere Realisierungsmöglichkeit stellt der sogenannte Schlitzkoppler dar, bei welchem zwei parallel geführte koaxiale Leitungen durch einen schmalen Längsschlitz miteinander gekoppelt werden. Dieses System wurde von KADEN [6] theoretisch behandelt, und es zeigte sich, dass, abgesehen von speziellen Problemen der



Leitungsersatzbild der gefalteten Dipolantenne.

Schlitzerregung, genau die gleichen Wirkungen erzielbar sind. Nicht zu vervechseln ist dieser Schlitzkoppler jedoch mit den bei Hohlleitersystemen beannten Langschlitzkopplern [7], [8], bei welchen sowohl der Richtungssinn er Kopplung als auch der Kopplungsgrad vom Ort und der Breite der Schlitze owie von der Wellenart im Innern der Hohlleiter abhängig sind. Dies rührt aher, dass in Hohlleitern elektrische und magnetische Felder räumlich voninander getrennt sind, so dass die Kopplung der Leitungen zumeist überwiedend elektrisch oder überwiegend magnetisch ist, was zu wesentlich anderen Zichtwirkungen führt als die vorliegend beschriebene elektromagnetische Leigungskopplung.

5. Die gefaltete Dipolantenne

Ein weiteres Beispiel für die Anwendbarkeit der Mehrleitertheorie in der Itrakurzwellentechnik stellt die gefaltete Dipolantenne (folded dipole) mit besbigem Durchmesserverhältnis der beiden Leiter dar, deren Stromverteilung ch in erster Näherung leicht aus den Gleichungen (15a) ergibt. Als erste säherung verstehen wir dabei, wie stets in der Antennentheorie, die approxiative Bestimmung einer Stromverteilung durch Anwendung der Leitungseichungen unter Vernachlässigung der Abstrahlungsverluste. Die Erfahrung igt dabei, dass diese Lösung ein recht genaues Bild der grundsätzlichen Strah-

lungseigenschaften ergibt. Zur Erfassung des Impedanzverlaufs muss selbst verständlich die Abstrahlung berücksichtigt werden, jedoch auch hierfür lasser sich approximative Angaben machen, die zu befriedigenden Ergebnissen führen

Als einfachstes Ersatzbild einer gefalteten Dipolantenne genügt es, nur di eine Dipolhälfte nachzubilden, und man erhält die Leiteranordnung Figur 3

Zur Berechnung ist die Verwendung des Gleichungssystems (15a) vorteil haft, das für drei Leiter (Leiter 1, Leiter 2 und Erde 0) die Form (17a) an nimmt. Die Randbedingungen sind der Figur 3 zu entnehmen.

$$U_{01} = U_{02}, \quad J_{01} = -J_{02}, \quad U_{l2} = 0, \quad U_{l1} = V.$$

Statt der letzten Bedingung führt man vorteilhaft die Grösse $J-J_2$ an de Stelle z-l als Bezugswert ein, da dieser Strom auch bei beliebigen Längen niemals Null werden kann, während die ungedämpfte Resonanz des Systems bei bestimmten Längen zu einem Kurzschluss am Leitungsende mit $U_{l\,1}=$ führen kann. Unter Berücksichtigung dieser Randbedingungen und unter Verwendung der Direktkapazitäten nimmt das Gleichungssystem (17a) folgend Form an:

$$\begin{split} J_1 &= \left\{ \begin{array}{l} \bar{J} \\ 1 & A\cos^2\gamma l \end{array} \right\} \left\{ -(A+1)\cos\gamma l\cos\gamma z + \frac{C_{10}}{C_{20}}\sin\gamma l\sin\gamma z \right\}, \\ J_2 &= \left\{ \frac{\bar{J}}{1+A\cos^2\gamma l} \right\} \left\{ (A+1)\cos\gamma l\cos\gamma z + \sin\gamma l\sin\gamma z \right\}, \\ U_1 &= \left\{ -\bar{J} \frac{\bar{J}}{v\left(1+A\cos^2\gamma l\right)} \right\} \left\{ \frac{1}{C_{20}}\sin\gamma l\cos\gamma z + \frac{1}{C_{10}}\cos\gamma l\sin\gamma z \right\}, \\ U_2 &= \left\{ -\bar{J} \frac{\bar{J}}{v\left(1+A\cos^2\gamma l\right)} \right\} \left\{ \sin\gamma l\cos\gamma z - \cos\gamma l\sin\gamma z \right\}, \end{split}$$

mit

$$A = C_{12} \left(\frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_{20}} \right).$$

Hiermit sind sämtliche Eigenschaften des in Figur 3 zugrunde gelegten Leitersystems bestimmt. Für die Strahlung kommt von der Stromverteilung auf der beiden Leitern 1 und 2 nur derjenige Teil in Frage, der ein beide Leiter um schliessendes Magnetfeld besitzt. Dies ist einfach die Summe der beiden Ströre I_1 und I_2 :

$$J_1 + J_2 = \bar{J} \left(1 + \frac{C_{10}}{C_{20}} \right) \left(\frac{\sin \gamma \, l}{1 + A \cos^2 \gamma \, l} \right) \sin \gamma \, z \,. \tag{3}$$

Hieraus sieht man, dass sich die gefaltete Antenne bis auf einen von der Altennenlänge l abhängigen Faktor genau gleich wie eine normale Stabanten, verhält, nämlich sinusförmige Stromverteilung aufweist. Bei $\gamma l = \pi/2$ (Abstimmung auf eine Viertelwellenlänge) ist dieser Faktor gleich 1, und der g

meinsame Strom (J_1-J_2) ist um den Faktor $(1+C_{20},C_{10})$ grösser als der Speisestrom des Leiters 1 am Orte z-l. Bei gleicher abgestrahlter Leistung muss somit der durch Strahlung verursachte Anteil der Antennenimpedanz am Speisungsort bei der gefalteten Dipolantenne um den bekannten Betrag $(1+C_{20}/C_{10})^2$ grösser sein als bei der Stabantenne [9]. Auch der Blindwiderstandsgang der Eingangsimpedanz ergibt sich aus (30) durch die Bildung des Verhältnisses:

$$\frac{U_1}{J_1} = -j \frac{1 + \frac{C_{20}}{C_{10}}}{v C_{10} \operatorname{tg} \gamma l - v C_{20} (A+1) \operatorname{ctg} \gamma l}.$$
 (32)

Für A=0, das heisst $C_{12}=0$ und $C_{10}=C_{20}$, geht dies über in

$$\frac{U_1}{J_1} = \frac{j}{v C_{10}} \operatorname{tg} 2 \gamma l. \tag{33}$$

Dieses Ergebnis darf aber für den Fall der strahlenden Antenne nicht unmittelbar ausgewertet werden, da bei seiner Ableitung der ohmsche Anteil vernachlässigt vurde. Eine approximative Bestimmung des Impedanzverlaufs wird aber durch aufstellung eines Ersatzbildes möglich, welches in der Parallelschaltung einer ngedämpften, kurzgeschlossenen und einer gedämpften, offenen ($\lambda/4$)-Leitung esteht. Dies wurde in der Literatur [9] bereits beschrieben, so dass sich ein reiteres Eingehen darauf an dieser Stelle erübrigt. Es sei nur darauf hingeriesen, dass Gleichung (32) für den Fall verschwindender Kopplung zwischen en beiden Leitern (A=0) bereits deutlich den Impedanzverlauf zeigt, der auf Aufstellung des erwähnten Ersatzbildes führt.

Die vorliegende Untersuchung entstand im Mikrowellenlaboratorium der ktiengesellschaft Brown, Boveri & Cie. in Baden als Resultat verschiedener, per mehrere Jahre verteilter Studien. Eine experimentelle Auswertung der itgeteilten Methoden führte dabei zu einer Anzahl im praktischen Gebrauch in währter Konstruktionen.

LITERATURVERZEICHNIS

Mehrleitertheorie

- L. A. Pipes, Phil. Mag. 24, 97 (1937); J. appl. Phys. 12, 782 (1941).
- S. A. Schelkunoff, Electromagnetic Waves (D. van Nostrand Company,
- New York 1943), S. 165.
- H.O. ROOSENSTEIN, Z. Hochfrequenztechn. u. Elektroakustik 1931.

Richtungskoppler

- J. WALLOT, Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik (Springer, Berlin 1940), S. 214 und 224.
 - PISTOLKORS, Wireless Engineer 19, 365 (1943).
- H. KADEN, Z. angew. Phys. 3, 44 (1950).

[7] M. Surdin, J. Inst. electr. Eng. [Part III A] 1946, 735.

[8] C. Montgomery, Technique of Microwave Measurements (McGraw-Hill New York 1947), S. 885.

Gefaltete Dipolantenne

[9] W. VAN B. ROBERTS, R. C. A. Rev. 8, 289 (1947).

Summary

The paper deals with problems of wave-propagation on multiconductor transmission lines at very high frequencies. The transmission line equations for current and voltage on each conductor are given in a generalized form using matrix symbols. Two examples show how these equations are to be applied to practical problems and how proper boundary conditions are to be introduced. The first example concerns the theory of a transmission line directional coupler the second example a simplified theory of the folded dipole antenna.

(Eingegangen: 18. Februar 1952.)

Note on the Fundamental Solution of $w y_{vi} + y_{ww} = 0$

By Julian D. Cole¹), Pasadena (California)

1. Introduction

The equation

$$w y_{vv} + y_{ww} = 0$$

occurs in the gasdynamical theory of transonic flow. It is of mixed typically elliptic for w>0, hyperbolic for w<0. In this note a brief study is made the fundamental solution of (1) using ideas related to the physical application. Hence no attempt will be made at a precise discussion of conditions on functions, etc. except where necessary. The basic problem here is to obtain a representation of the fundamental singular solution of (1) with a singularity the elliptic half plane w>0. The nature of the singularity and the continuation of the solution into the hyperbolic half plane w<0 are considered. It is connection with this continuation that the physical problems provide sortingisht.

There is already in existence a considerable mathematical literature on (starting with the historic memoir of TRICOMI[1]²). Most of the references

Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology.
 Numbers in brackets refer to References, page 297.

he subject are included in [1] which contains a bibliography, and several others are appended here ([7] to [10]). In addition various authors have developed esults for special physical problems. However, it is believed that the methods used here, although by now standard in the theory of partial differential equations, are sufficiently different from those appearing in the literature to be of interest. Some new results are also presented.

Some of the results appearing in this note have already been used in a previous paper [2] and some are used in a paper to appear soon [3]. In both pplications doublets formed from the fundamental singularity were of interest. hese doublet singularities represent, in the hodograph, the flow at infinity, t will appear in the analysis that the solutions formed from the fundamental ngularity should be useful when the hodograph is one-sheeted at infinity. The case of branched singularities is reserved for [4] and future work.

The author thanks T. Y. Wu for his generous assistance on many points.

2. Definition and Representation of the Fundamental Solution

Consider

$$w y_{vv} + y_{ww} = -Q(w, v) \tag{2}$$

the domain

$$-\infty < w < \infty, -\infty < v < \infty.$$

fundamental solution of (1), $T(\omega,v-v_1;\omega_1)$ is defined as a singular solution (1) such that

$$y(w, v) = \int_{-\infty}^{\infty} T(w, v - v_1; w_1) Q(w_1, v_1) dw_1 dv_1$$
 (3)

cu solution of (2). It follows from the invariance of (1) under translation with expect to v that T is a function only of the difference $v-v_1$. A definition suivalent to (3) is that $T(w, v; w_1)$ is a solution of

$$w y_{vv} + y_{ww} = -\delta(v) \delta(w - w_1). \tag{4}$$

is assumed that $w_1 > 0$ as this is of most interest for applications. $w_1 = 0$ lb treated as a limiting case.

An integral representation of the fundamental solution $T(w, v; w_1)$ can be ained by Fourier analysis of (4) with respect to v. Let

$$\tilde{y}(w,\beta;w_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta v} y(w,v;w_1) dv$$
 (5)

so that

$$y(w, v; w_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta v} \, \tilde{y}(w, \beta; w_1) \, d\beta \,. \tag{6}$$

Applying the transform (5) to (4) yields

$$\tilde{y}_{ww} - \beta^2 w \, \tilde{y} = -\frac{1}{\sqrt{2 \, \pi}} \, \delta(w - w_1) \, .$$
 (7)

The Fourier transform of the fundamental solution T is thus the fundamental solution of the ordinary differential equation (7) (divided by $\sqrt{2} \pi$). This solution for ordinary differential equations is discussed in [5] (vol. I, p. 302). A solution of (7) is thus defined by the conditions

- (a) \tilde{y} is a continuous function of w;
- (b) \tilde{y} is a solution of $\tilde{y}_{ww} \beta^2 w \tilde{y} = 0$, except at $w = w_1$, and \tilde{y} vanishes at $\pm \infty$;
- (c) jump condition

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\left(\frac{d\tilde{y}}{dw} \right)_{w = w_1 + \varepsilon} - \left(\frac{d\tilde{y}}{dw} \right)_{w_1 - \varepsilon} \right] = - \frac{1}{\sqrt{2 \; \pi}} \, .$$

The solutions of (7) for w > 0 are linear combinations of the modified Bess functions

$$z^{1/3}\;K_{1/3}\;(\mid\!\beta\!\mid z)$$
 , $\;z^{1/3}\;I_{\,\pm\,1/3}\;(\mid\!\beta\!\mid z)$

where $z = 2 w^{3/2}/3$. The notation is that of [6]. The conditions (8) do not this case determine the solution uniquely. However, the arbitrariness while occurs may be exhibited and the Fourier transform of the fundamental solution be written out as

$$\begin{split} \sqrt{2\,\pi} \,\, \tilde{T}(w,\beta\,;\,w_{1}) = \left\{ \begin{array}{l} C_{1} \left(\frac{3\,z}{2}\right)^{1/3} \,K_{1/3} \left(|\,\beta\,|\,z\right) & . & (z>z_{1}) \\ C_{1} \left(\frac{3\,z}{2}\right)^{1/3} \,K_{1/3} \left(|\,\beta\,|\,z\right) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\,z\,z_{1}}{3}\right)^{1/3} & \\ \times \left[\,I_{1/3} \left(|\,\beta\,|\,z\right) \,I_{-1/3} \left(|\,\beta\,|\,z_{1}\right) - I_{-1/3} \left(|\,\beta\,|\,z\right) \,I_{1/3} \left(|\,\beta\,|\,z_{1}\right)\right] & . & (z$$

Here $C_1 - C_1(z_1, \beta)$ is arbitrary to the extent that the inverse transforms exiling the term in the solution multiplied by C_1 is regular while the bracket in (I represents the singular part. Thus although many fundamental solutions exit the singularity is the same in all of them. $C_1(z_1, \beta)$ can be chosen so that \mathfrak{m}

fundamental solution satisfies some supplementary conditions. These conditions are concerned with the behavior of the solution in the hyperbolic region w < 0.

3. Continuation into w < 0, Supplementary Condition

The continuation of (10) into the hyperbolic region w < 0 is provided by

$$\begin{aligned} z^{1/3} \; I_{1/3} & (|\beta| \; z) = -\; \xi^{1/3} \; J_{1/3} \; (|\beta| \; \xi) \; , \\ z^{1/3} \; I_{-1/3} \; (|\beta| \; z) = \; \xi^{1/3} \; J_{-1/3} \; (|\beta| \; \xi) \; , \\ z^{1/3} \; K_{1/3} & (|\beta| \; z) = \; \xi^{1/3} \; \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[J_{-1/3} \; (|\beta| \; \xi) + J_{1/3} \; (|\beta| \; \xi) \right] \end{aligned}$$
 (11)

where

$$z=rac{2}{3}\,w^{3/2}\,,\quad \zeta=rac{2}{3}\,u^{3/2}\,,\quad w=-u\,,\quad {
m or}\quad z=\zeta\,e^{3\pi i/2}\,.$$

10) becomes

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} T(\zeta, \beta; z_{1}) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\zeta}{3}\right)^{1/3} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} C_{1} - z_{1}^{1/3} I_{1/3} (|\beta| z_{1}) \right] J_{-1/3} (|\beta| \zeta)
+ \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\zeta}{3}\right)^{1/3} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} C_{1} - z_{1}^{1/3} I_{-1/3} (|\beta| z_{1}) \right] J_{1/3} (|\beta| \zeta) .$$
(12)

t is convenient to split C_1 into its odd and even parts with respect to β . Since T is real let

$$C_1(z_1, \beta) = \left[C_2(z_1, \beta) - i C_3(z_1, \beta)\right] \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}$$
 (13)

here

$$C_2(z_{\rm 1},\beta) = C_2(z_{\rm 1},-\beta), \quad C_3(z_{\rm 1},\beta) = -\,C_3(z_{\rm 1},-\beta)\;.$$

sing the inversion formula (6), T is represented by the following integrals or w < 0

$$\{(\zeta, v; z_{1}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\zeta}{3}\right)^{1/3} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_{0}^{\infty} \{ [C_{2} - z_{1}^{1/3} I_{1/3} (\beta z_{1})] J_{-1/3} (\beta \zeta) + [C_{2} - z_{1}^{1/3} I_{-1/3} (\beta z_{1})] J_{1/3} (\beta \zeta) \} \cos \beta v d\beta + \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\zeta}{3}\right)^{1/3} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_{0}^{\infty} C_{3} [J_{-1/3} (\beta \zeta) + J_{1/3} (\beta \zeta)] \sin \beta v d\beta.$$

$$(14)$$

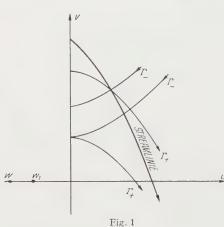
The type of supplementary condition to be introduced is familiar from the eory of purely hyperbolic equations. For hyperbolic problems the direction

of propagation of disturbances along the characteristics, or the time-like direction, must be prescribed in addition to the differential equations. Using this idea, regions of influence and domains of dependence can be specified. For the equation of mixed type (1) a similar requirement on the behavior of the solution in the hyperbolic region makes the fundamental solution T unique.

A physically significant condition is suggested as follows. The lines = constant may be thought of as corresponding to the streamlines of the flow The two families of characteristics of (1) are

$$\Gamma_{+}$$
: $v + \frac{2}{3} u^{3/2} = v + \zeta = \text{constant}$, Γ_{-} : $v - \frac{2}{3} u^{3/2} = v - \zeta = \text{constant}$, (15)

and these are the hodograph of the Mach waves. The time-like direction is as signed as the direction of flow along the streamline. Thus the direction of prop-



source-like, both characteristics and expansion or both compression, of characteristic-like where the stream line falls on a characteristic.) A typical hodograph picture of vortex-like flowing shown in figure 1. Hence, a directharacteristics. On Γ_{-} disturbances runfrom u = 0 toward $u = \infty$. This states the characteristics is the necessary surfixed.

agation of disturbance along the characteristics or Mach waves emanating from a point on the streamline assigned. One important type of flowis locally vortex-like. In this flow or of the Mach waves leaving the streamline belongs to a family of expansion waves and the other to a family of compression waves. (The other type of flow which can occur locally as

tion of disturbances is assigned to the characteristics. On Γ_- disturbances run from $u=\infty$ toward u=0 and on Γ_+ from u=0 toward $u=\infty$. This statement of direction of propagation along the characteristics is the necessary supplementary condition.

The condition may be formulated on the behavior of y as $u \to \infty$. If the values of y are caused by a singularity in the elliptic half-plane w > 0 redisturbance should exist on the characteristics Γ_- as $u \to \infty$. That is, the value of y should depend only on the values of Γ_+ as $u \to \infty$. It turns out that the condition can only be realized approximately (there is always a certain amount of reflection on Γ_-) and that it may be required

$$y \simeq \zeta^{-1/6} f n (v + \zeta)$$
 as $\zeta \to \infty$. (10)

t may be observed that this condition introduces unsymmetry of the solution with respect to v.

4. Representation of the Fundamental Solution

The condition (16) suffices to determine the functions C_2 , C_3 of (14). An symptotic approximation to (14) as $\zeta \to \infty$ is obtained by replacing the Bessel functions with the first terms in their asymptotic expansions

$$J_{-1/3}(\beta \zeta) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi \beta \zeta}} \cos \left(\beta \zeta - \frac{\pi}{12}\right),$$

$$J_{1/3}(\beta \zeta) \simeq \left(\frac{2}{\pi \beta \zeta} \cos \left(\beta \zeta - \frac{5\pi}{12}\right)\right).$$
(17)

hen the integrand in (14) contains products of trigonometric functions which may be combined to contain terms like

$$\cos\beta (v-\zeta)$$
, $\cos\beta (v+\zeta)$, $\sin\beta (v-\zeta)$, $\sin\beta (v+\zeta)$.

f, according to (16), the coefficients of the functions of $v-\zeta$ are set equal to ero, C_2 and C_3 are determined as follows

$$C_{2}(z_{1}, \beta) = \frac{z_{1}^{1/3}}{2} [I_{1/3}(\beta z_{1}) + I_{-1/3}(\beta z_{1})], \qquad (\beta > 0)$$
 (18)

$$C_3(z_1, \beta) = -\frac{z_1^{1/3}}{2} \cdot \frac{1}{\pi} K_{1/3}(\beta z_1).$$
 (\beta > 0) (19)

hus the following Fourier integral representations of the fundamental solutions are obtained by substituting the values of C_2 and C_3 in (14), (13), and (10)

$$(z, v; z_{1}) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2zz_{1}}{3} \right)^{1/3} \int_{0}^{\infty} K_{1/3} (\beta z) \left\{ \left[I_{-1/3} (\beta z_{1}) + I_{1/3} (\beta z_{1}) \right] \right. \\ \left. \times \cos\beta v - \frac{1}{\pi} K_{1/3} (\beta z_{1}) \sin\beta v \right\} d\beta , \qquad (z > z_{1})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2zz_{1}}{3} \right)^{1/3} \int_{0}^{\infty} K_{1/3} (\beta z_{1}) \left\{ \left[I_{-1/3} (\beta z) + I_{1/3} (\beta z) \right] \right. \\ \left. \times \cos\beta v - \frac{1}{\pi} K_{1/3} (\beta z) \sin\beta v \right\} d\beta , \qquad (z < z_{1})$$

$$\left. \times \left[\zeta, v; z_{1} \right] = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2z_{1}\zeta}{3} \right)^{1/3} \int_{0}^{\infty} K_{1/3} (\beta z_{1}) \left\{ \left[J_{-1/3} (\beta \zeta) - J_{1/3} (\beta \zeta) \right] \right. \\ \left. \times \cos\beta v - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[J_{-1/3} (\beta \zeta) + J_{1/3} (\beta \zeta) \right] \sin\beta v \right\} d\beta . \quad (\zeta > 0)$$

It should be noted that if doublets or higher singularities are formed from T of (20) by differentiation with respect to v or z_1 , these doublets also satisfy the equation (1) (except at the singularity) and have the same behavior as in regard to propagation of disturbances along the characteristics.

5. Singularity at $w_1 = 0$

As a check on the ideas of the previous paragraph, the limiting case $w_1=$ can be considered. According to the theory of characteristics, if there is discontinuity (in derivatives, say) across a characteristic at one point then discontinuity persists all along the characteristic. The same can be said for singularity of the solution. Thus if there is a singularity at u=0, v=0 there may be, in general, singularities on both the characteristics $v+\zeta=0$, $v-\zeta=1$. However, since it has been required that disturbances propagate away from the sonic line u=0 only on the characteristic $\Gamma_+\colon v+\zeta=0$ it should be expected that the fundamental solution (20) has no singularity on $\Gamma_-\colon v-\zeta=1$ but does have one on $\Gamma_+\colon v+\zeta=0$. This result is verified by evaluating the integrals in (20) which represent T.

If $z_1 \to 0$ in the integrals in (20) valid for $\zeta > 0$, (20) becomes

$$T(\zeta, v; 0) = T^*(\zeta, v) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\zeta}{3}\right)^{1/3} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2^{1/8}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \times \int_{0}^{\infty} \left\{ \left[J_{-1/3} \left(\beta \zeta \right) - J_{1/3} \left(\beta \zeta \right) \right] \cos \beta v - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[J_{-1/3} \left(\beta \zeta \right) + J_{1/3} \left(\beta \zeta \right) \right] \sin \beta v \right\} \frac{d\beta}{\beta^{1/3}}.$$

The integrals occurring in (21) can all be evaluated in terms of hypergeometric functions and the formula is given on page 401 in [6]. Using some transformations of hypergeometric functions the results are tabulated below in a for exhibiting the singularity

$$\int_{0}^{\infty} \cos \beta \, v \, J_{1/3} \left(\beta \, \zeta \right) \, \beta^{-1/3} \, d\beta = \left\{ \begin{array}{c} 0 & \left(0 < \zeta < |v| \right) \\ A \, \frac{1}{\zeta^{1/8} \, \left(\zeta^{2} - v^{2} \right)^{1/6}} & \left(0 < |v| < \zeta \right) \end{array} \right\}$$
(22)

$$\int_{0}^{\infty} \cos \beta \ v \ J_{-1/3} (\beta \ \zeta) \ \beta^{-1/3} \ d\beta = \begin{cases} A \ \frac{1}{\zeta^{1/8} \ (\zeta^{2} - v^{2})^{1/6}} & (0 < |v| < \zeta) \end{cases}$$

$$\int_{0}^{\infty} \cos \beta \ v \ J_{-1/3} (\beta \ \zeta) \ \beta^{-1/3} \ d\beta = \begin{cases} A \ \sqrt{3} \ \frac{1}{\zeta^{1/8} \ (v^{2} - \zeta^{2})^{1/6}} & (0 < \zeta < |v|) \\ A \ 2 \ \frac{1}{\zeta^{1/8} \ (\zeta^{2} - v^{2})^{1/6}} & (0 < |v| < \zeta) \end{cases}$$

$$(2)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int \sin \beta \, v \, J_{1/3} \left(\beta \, \zeta \right) \, \beta^{-1/3} \, d\beta = \begin{cases}
A \, 2 \, \frac{\operatorname{sign} \, v}{\zeta^{1/8} \, (v^2 - \zeta^2)^{1/6}} - B \, \frac{\zeta^{1/8}}{v} \\
\times \, F \left(1, \, \frac{1}{2}, \, \frac{7}{6}, \, 1 - \frac{\zeta^2}{v^2} \right) \left(0 < \zeta < |v| \right) \\
A \, \sqrt{3} \, \frac{\operatorname{sign} \, v}{\zeta^{1/8} \, (\zeta^2 - v^2)^{1/6}} \, B \, \frac{v}{\zeta^{5/8}} \\
\times \, F \left(1, \, \frac{2}{3}, \, \frac{7}{6}, \, 1 - \frac{v^2}{\zeta^2} \right) \left(0 < |v| < \zeta \right)
\end{cases} \tag{24}$$

$$\int_{-1/3}^{\infty} \sin \beta \, v \, J_{-1/3} \, (\beta \, \zeta) \, \beta^{-1/3} \, d\beta = \begin{cases} A \, \frac{\text{sign } v}{\zeta^{1/8} \, (v^2 - \zeta^2)^{1/6}} & (0 < \zeta < |v|) \\ 0 & (0 < |v| < \zeta) \end{cases}$$
(25)

here

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{\pi} \ 2^{4/3}} \ , \quad B = \frac{2^{2/8}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \ .$$

The integrals (22) to (25) all have 1 6 power singularities on $v \pm \zeta = 0$. Howver, the linear combination of these solutions which forms the fundamental plution T has no singularity on $v = \zeta$. Substituting (22) to (25) into (21) yields

$$\begin{cases}
\frac{3^{1/6}}{2^{2/3}\pi} \cdot \frac{\zeta^{2/3}}{i} F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, 1 - \frac{\zeta^{2}}{v^{2}}\right) \\
+ \frac{1}{3^{1/8}} \cdot \frac{1}{2^{5/3}\pi^{1/2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot \frac{(1 - \operatorname{sign} v)}{(v^{2} - \zeta^{2})^{1/6}} \quad (0 < \zeta < |v|) \\
\frac{3^{1/6}}{2^{2/3}\pi} \cdot \frac{v}{\zeta^{4/3}} F\left(1, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}, 1 - \frac{v^{2}}{\zeta^{2}}\right) \\
+ \frac{1}{3^{5/6}} \cdot \frac{1}{2^{5/3}\pi^{1/2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot \frac{(1 - \operatorname{sign} v)}{(\zeta^{2} - v^{2})^{1/6}} \quad (0 < |v| < \zeta)
\end{cases}$$

ne discontinuity in (26) at v>0 is only apparent as can easily be seen by ing the transition formula for the hypergeometric function

$$F\left(1, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}, 1 - \frac{v^2}{\zeta^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot \frac{\zeta^{4/3}}{|v| (\zeta^2 - v^2)^{1/6}} - \frac{1}{3} F\left(1, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{v^2}{\zeta^2}\right). \tag{27}$$

6. Nature of the Singularity for $w_1 > 0$

It is also of interest to exhibit the singularity of $T(z, v; z_1)$ given by (24 at $z - z_1, v = 0$. It is known from the general theory of elliptic equations the fundamental solution has a logarithmic singularity at $z = z_1, v = 0$ are the exact nature of that singularity can be worked out in this case.

Let

$$T_{s}(z, v; z_{1}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2 z z_{1}}{3}\right)^{1/3} \int_{0}^{\infty} K_{1/3} (\beta z) \\ \times \left\{I_{-1/3} (\beta z_{1}) + I_{1/3} (\beta z_{1})\right\} \cos \beta v d\beta \\ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2 z z_{1}}{3}\right)^{1/3} \int_{0}^{\infty} K_{1/3} (\beta z_{1}) \\ \times \left\{I_{-1/3} (\beta z) + I_{1/3} (\beta z)\right\} \cos \beta v d\beta \end{cases}$$

$$(z > z_{1})$$

$$\times \left\{I_{-1/3} (\beta z) + I_{1/3} (\beta z)\right\} \cos \beta v d\beta \qquad (z < z_{1})$$

$$\left\{ Z_{-1/3} (\beta z) + I_{1/3} (\beta z) \right\} \cos \beta v d\beta \qquad (z < z_1)$$

$$T_r(z, v; z_1) = -\frac{1}{2 \pi} \left(\frac{2 z z_1}{3} \right)^{1/3} \int_0^\infty \frac{1}{\pi} K_{1/3} (\beta z) K_{1/3} (\beta z_1) \sin \beta v d\beta \qquad (2)$$

so that

$$T = T_s + T_r. (3)$$

It can be seen from (29) that $T_r = 0$ if v = 0 so that, for $z_1 > 0$, all of the singularity of T is contained in T_s . The purpose of adding T_r to T_s is to satistic conditions as $\zeta \to \infty$. In addition, as seen in the previous paragraph, contributes a certain type of singularity for the limiting case $z_1 = 0$.

The integrals representing T_s in (28) become equal to known integrals the integration in (28) is regarded as taking place in the complex plane and the path of integration is deformed to the imaginary axis. If this is done, (25) becomes a Laplace integral

$$T_{s}(z, v; z_{1}) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2 z z_{1}}{3} \right)^{1/3} \times \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha |v|} \left\{ J_{-1/3} (\alpha z) J_{-1/3} (\alpha z_{1}) + J_{1/3} (\alpha z) J_{1/3} (\alpha z_{1}) \right\} d\alpha$$
(3i)

a representation valid for all z. The integrals in (31) are special cases of a formulin [6], p. 389, namely

$$\int_{0}^{\infty} e^{-at} J_{\nu}(b t) J_{\nu}(c t) dt = \frac{1}{\pi \sqrt{b c}} Q_{\nu-1/2} \left(\frac{a^{2} + b^{2} + c^{2}}{2 b c} \right), \quad \text{Re } (a \pm i b \pm i c) > 0.$$

$$\text{Re } \nu > -\frac{1}{2} \qquad (35)$$

where Q_n is the Legendre function of the second kind. Q_n is expressible as a hypergeometric function

$$Q_n(Z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} \cdot \frac{1}{Z^{n+1}} F\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2} + 1; n + \frac{3}{2}; \frac{1}{Z^2}\right).$$
(33)

Applying (32) and (33) to (31) we have

$$T_s(z, v, z_1) = T_{s+}(z, v, z_1) + T_{s-}(z, v, z_1)$$

vith

$$T_{s-}(z, v, z_{1}) = \frac{1}{4} \left(\frac{2 z z_{1}}{3} \right)^{1/3} \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha |v|} \int_{-1/3} (\alpha z) \int_{-1/3} (\alpha z_{1}) d\alpha$$

$$= \frac{1}{4 \pi} \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} \frac{1}{(z z_{1})^{1/6}} Q_{-5/6} \left(\frac{v^{2} + z^{2} + z_{1}^{2}}{2 z z_{1}} \right)$$

$$= \frac{1}{4 \sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} \frac{1}{(2 z z_{1} Z)^{1/6}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} F\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}; \frac{2}{3}; \frac{1}{Z^{2}}\right)$$
(34)

where now

$$Z = \frac{v^2 + z^2 + z_1^2}{2z_1z_2}$$

. . .1

$$\begin{vmatrix}
s_{+}(z, v, z_{1}) &= \frac{1}{4} \left(\frac{2z z_{1}}{3} \right)^{1/3} \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha |v|} J_{1/3} (\alpha z) J_{1/3} (\alpha z_{1}) d\alpha \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} \frac{1}{(z z_{1})^{1/6}} Q_{-1/6} \left(\frac{v^{2} + z^{2} + z_{1}^{2}}{2z z_{1}} \right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} \frac{1}{(z z_{1})^{1/6}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} F\left(\frac{5}{12}, \frac{11}{12}; \frac{4}{3}; \frac{1}{2^{2}}\right).
\end{vmatrix} (35)$$

from (34) and (35) it is evident that the nature of the singularity as $v \to 0$, $z \to z_1$ is given by the singularity of the hypergeometric functions as $Z \to 1$. Exhibit the singularity a formula is needed relating the hypergeometric function of $1/Z^2$ to a function of $1-1/Z^2$. The necessary formula is

$$F(a, b; a + b; \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1 - \sigma)^n [\beta_n + \log(1 - \sigma)]$$
 (36)

nere

$$lpha_n = -rac{\Gamma(a+b) \ \Gamma(a+n) \ \Gamma(b+n)}{\Gamma^2(a) \ \Gamma^2(b) \ \Gamma^2(1+n)},$$
 $eta_n = \psi(a+n) + \psi(b+n) - 2 \ \psi(1+n) \ .$

(36) is an exceptional case for hypergeometric functions and can be derived by use of Barnes' method ([11], p. 286)1). If (36) is used in (34) and (35) the complete expansion results

$$T_{s-}(z, v, z_{1}) = -\frac{1}{4 \pi (\sqrt{z}) 3^{1/3}} \cdot \frac{1}{(v^{2} + z^{2} + z_{1}^{2})^{1/6}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{12}) \Gamma(\frac{7}{12})}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{12}) \Gamma(n - \frac{7}{12})}{\Gamma^{2}(n - 1)} \left\{ \frac{v^{4} - 2 v^{2} (z^{2} - z_{1}^{2}) + (z^{2} - z_{1}^{2})^{2}}{v^{4} - 2 v^{2} (z^{2} - z_{1}^{2}) + (z^{2} - z_{1}^{2})^{2}} \right\}^{n} \times \left\{ \beta_{n-} + \log \frac{v^{4} + 2 v^{2} (z^{2} + z_{1}^{2}) + (z^{2} - z_{1}^{2})^{2}}{v^{4} + 2 v^{2} (z^{2} + z_{1}^{2}) + (z^{2} + z_{1}^{2})^{2}} \right\}$$

$$(37)$$

where

$$\beta_{n-} = \psi\left(\frac{1}{12} + n\right) + \psi\left(\frac{7}{12} + n\right) - 2\psi\left(1 + n\right),$$

$$T_{s+}(z, v, z_{1}) = -\frac{2^{1/6}}{4\pi 3^{1/3}} \cdot \frac{(z z_{1})^{2/3}}{(v^{2} + z^{2} + z_{1}^{2})^{5/6}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{12}\right) \Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{12}\right) \Gamma\left(n + \frac{11}{12}\right)}{\Gamma^{2}(n+1)} \left\{ \frac{v^{4} + 2 v^{2} (z^{2} + z_{1}^{2}) + (z^{2} - z_{1}^{2})^{2}}{v^{4} + 2 v^{2} (z^{2} + z_{1}^{2}) + (z^{2} + z_{1}^{2})^{2}} \right\}^{n}$$

$$\times \left\{ \beta_{n+} + \log \frac{v^{4} + 2 v^{2} (z^{2} + z_{1}^{2}) + (z^{2} - z_{1}^{2})^{2}}{v^{4} + 2 v^{2} (z^{2} + z_{1}^{2}) + (z^{2} + z_{1}^{2})^{2}} \right\}$$

where

$$\beta_{n+} = \psi\left(\frac{5}{12} + n\right) + \psi\left(\frac{11}{12} + n\right) - 2\psi(1+n)$$
.

The dominant term in the expansion near v = 0, $z = z_1$ occurs for n = 0. Thus

$$T_{s}(z, v, z_{1}) = -\frac{1}{4 \pi (\sqrt{2}) 3^{1/3}} \cdot \frac{1 + \left(\frac{2 z z_{1}}{v^{2} + z^{2} + z_{1}^{2}}\right)^{2/3}}{(v^{2} + z^{2} + z_{1}^{2})^{1/6}} \times \log \frac{v^{4} + 2 v^{2} (z^{2} + z_{1}^{2}) + (z^{2} - z_{1}^{2})^{2}}{v^{4} + 2 v^{2} (z^{2} + z_{1}^{2}) + (z^{2} + z_{1}^{2})^{2}} - \frac{1}{4 \pi (\sqrt{2}) 3^{1/3}} \times \left\{ \frac{\beta_{0-}}{(v^{2} + z^{2} + z_{1}^{2})^{1/6}} + \frac{(\beta_{0+}) (2 z z_{1})^{2/3}}{(v^{2} + z^{2} + z_{1}^{2})^{5/6}} \right\} + \cdots \right\}$$
(36)

(39) shows that T has a logarithmic singularity of a rather complicated argument (cf. [1], p. 68). (39) also shows how the logarithmic singularity disappears

¹⁾ The formula was also supplied to me by Professor A. Erdelyi. It occurs in the (unpublishes Bateman Handbook of Special Functions as a special case of the formula for F(a, b; a + b + l; a + b) where $b = 0, 1, 2 \dots$

as $z_1 \to 0$ and a 1 6 power singularity remains. It should be remarked that if doublets or higher singularities are formed by differentiation of T with respect to v or w_1 the resulting expansion contains a logarithmic singularity in addition to higher singularities.

REFERENCES

- [1] F. TRICOMI, On Linear Partial Differential Equations of Mixed Type, Brown University Translation A 9-T-26 of article in: Atti. R. Accad. naz. Lincei [Va], Memorie etc. 14, 134 (1923). Contains also a bibliography including further papers by Frankl, Tricomi, and others. The work is mostly concerned with existence theorems for boundary value problems in various finite domains.
- [2] J. D. Cole, Drag of a Finite Wedge at High Subsonic Speeds, J. Math. Phys. 30, No. 2 (July 1951).
- [3] J. D. Cole, Lift of a Flat Plate at High Subsonic Speeds (will soon be published in ZAMP).
- [4] L. TRILLING, Transonic Flow Past a Wedge at Zero Angle of Attack, Wright Air Development Center, TR No. 52-61, March 1952.
- [5] R. COURANT and D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik (Interscience Publishers, New York).
- [6] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Cambridge University Press, London and New York, 1944).
 - 7 G. GUDERLEY, Singularities at the Sonic Velocity, U. S. Air Force Rep. F-TR-1171-ND (1948).
 - 8' A. Weinstein, Discontinuous Integral and Generalized Potential Theory, Trans. Amer. Math. Soc. 63, 342 (1948).
- 9] P. Germain, Recherches sur une équation du type mixte, Recherche aéronautique, No. 22 (July-August 1951).
- 10] G. Guderley, Flow Patterns with a Free Stream Mach Number Close to 1, U. S. Air Force Rep. Tr-6364 (May 1951).
- [1] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, A Course of Modern Analysis (Cambridge University Press, London and New York, 1927).

Zusammentassung

Die Grundlösung der Differentialgleichung $w y_{vv} + y_{ww} = 0$ wird untersucht. Itegraldarstellungen von Lösungen, die eine Singularität im Bereich w > 0 besitzen ad in einer besonderen Art in den Bereich w < 0 fortsetzbar sind, werden gegeen. Die Singularität für w = 0 kommt dabei als ein Spezialfall heraus. Die Reisenentwicklung des singulären Teiles der Grundlösung wird aus der Integraldartellung abgeleitet, und der Charakter der logarithmischen Singularität für w > 0 ird dadurch gezeigt. Diese Resultate finden ihre Anwendung in der Theorie der hallnahen Potentialströmung.

neceived: April 7, 1952.)

Die automatische Kursregelung von Flugzeugen

Von Rudolf Glaus, Minneapolis, Minn.1)

1. Einleitung

Bei der Lösung von Regelproblemen wird im allgemeinen vorausgesetzt dass das zu regelnde System durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden kann. Diese Voraussetzung ist mei stens genügend genau erfüllt, solange man sich auf kleine Abweichungen vor der Beharrungslage beschränkt. In diesem Aufsatz werden nur lineare System behandelt.

Beim Entwurf einer Regelung sind immer bestimmte Reglerelemente gegeben. Die Lösung besteht dann darin, zusätzliche Elemente so zu bestimmer dass zusammen mit den gegebenen eine vorgeschriebene Regelaufgabe erfüllwird. Hierbei muss vorerst das dynamische und statische Verhalten der gegebenen Elemente bestimmt werden. Weiter ist zu entscheiden, welches die zregelnden Grössen sein sollen.

Die Lösung von Regelproblemen wird übersichtlich durch Aufzeichne eines Blockdiagramms. Hierbei entsprechen die einzelnen Blöcke den verschie denen Regelelementen und enthalten ihre Eigenschaften. Falls die Anforde rungen an die Regelung bekannt sind, kann mit der Berechnung der zusätz lichen Systemkomponenten begonnen werden. Damit wird vorerst ein vol ständiges Blockdiagramm der Regelung erhalten, welches das statische undynamische Verhalten des ganzen Systems beschreibt. Die letzte und wicht tigste Phase ist dann die Transformierung des Blockdiagramms in physikalisch Komponenten. Die analytisch oder graphisch gefundenen Einstelldaten sollte bei sorgfältig durchgeführter Synthese nicht mehr als 30% von den im Ver such gefundenen abweichen. Die Bestimmung der Einstelldaten von Steue rungen auf rechnerischem Wege ist bei komplizierten Regelungen speziell von teilhaft. Nehmen wir zum Beispiel die vollautomatische Steuerung von Flug zeugen, wo mehr als ein halbes Dutzend Parameter eingestellt werden müsser die zum grössten Teil nicht unabhängig voneinander sind, so ist einleuchtend dass nur durch Probieren eine Optimaleinstellung sehr schwierig und zeitrau bend, wenn nicht unmöglich wird.

¹⁾ Minneapolis-Honeywell Regulator Company, Aeronautical Division.

2. Grundbegriffe

Regelungen von der Art, wie sie hier untersucht werden sollen, können durch ein Blockdiagramm dargestellt werden, wie aus Figur 1 ersichtlich ist.

Dieses Blockdiagramm kann am besten an Hand eines Beispiels beschrieben werden. Es möge θ_c , der Eingang oder Sollwert zu unserem Regelsystem, die zeitliche Änderung eines Winkels darstellen. Diese zeitliche Winkelvariation θ_c sei der Ausgang eines Kommandogerätes und bedeute das gewünschte Azimut eines Geschützes. Die kontrollierte Regelgrösse θ_a wird als Ausgang oder Istwert bezeichnet. Sie ist das tatsächliche Azimut des Geschützrohres. Die Ausgangsgrösse θ_a ist durch die sogenannte Rückführung zum Eingang zurückgeführt und wird dort mit dem Eingang verglichen. Damit erhalten wir ein

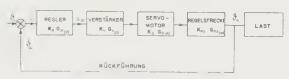


Fig. 1
Blockdiagramm eines Regelkreises.

arepsiloneschlossenes Regelsystem, auch Regelkreis genannt. arepsilon sei die Differenz zwischen Eingang und Ausgang und werde kurz als Abweichung bezeichnet. Die Abweichung wirkt auf einen Regler und dessen Ausgang auf einen Verstärker.) a im allgemeinen die Leistungen der Eingangsgrösse ϑ_e , der zurückgeführten Ausgangsgrösse ϑ_a sowie der Abweichung ε und des Reglerausganges a_R sehr dein sind, brauchen wir einen Verstärker. Dieser wirkt auf einen Servomotor, er die Leistung zur Bewegung des Geschützrohres aufbringt. Das Geschütz rurde in diesem Beispiel die Regelstrecke genannt, während als Last Störunen, die von aussen auf den Ausgang wirken, bezeichnet werden. Die Lösung es Regelproblemes könnte so umschrieben werden, dass das Azimut des ieschützrohres ϑ_a dem kommandierten Azimut ϑ_e über einen vorgeschriebenen requenzbereich mit einer bestimmten Genauigkeit folgen muss, ungeachtet usserer Störungen. Somit stellen wir an die Güte unseres Regelsystems beeutend höhere Anforderungen als zum Beispiel bei Drehzahl- oder Temperaturgelproblemen, wo meistens der Sollwert ein Festwert ist und das System ır Laständerungen unterworfen wird.

Es ist jetzt für Figur 1:

$$\varepsilon_{(t)} = \vartheta_{\varepsilon(t)} - \vartheta_{a(t)}. \tag{1}$$

ım nun den Ausgang als Funktion des Einganges für beliebige zeitliche Ändeongen des Einganges beschreiben zu können, benutzen wir die LaplaceTransformation [1], [2], [3]1). Damit können wir schreiben:

$$L\left[\vartheta_{e(t)}\right] = \vartheta_{e(t)}. \tag{2}$$

Hierbei bedeutet $L[\vartheta_{e:t_j}]$ die Laplace-Transformation von $\vartheta_{e(t)}$, p ist eine komplexe Variable:

$$p=lpha+i\,\omega$$
 , $\;\;(\omega={
m Kreisfrequenz\;in\;s^{-1}},\;\;i=\sqrt{-1}]$

$$L\left[\vartheta_{a\left(t\right)}\right]=\vartheta_{a\left(p\right)}$$
 , $L\left[arepsilon_{\left(t
ight)}\right]=arepsilon_{\left(p
ight)}$

$$\varepsilon_{(p)} = \vartheta_{\varepsilon(p)} - \vartheta_{a(p)}.$$
(4)

Durch die Laplace-Transformation kann zum Beispiel das Verhältnis von Reglerausgang zu Reglereingung folgendermassen ausgedrückt werden:

$$K_R G_{R(\phi)} = \frac{a_R}{\varepsilon} (\phi) .$$
 (5)

Hierbei wird $K_R G_{R(b)}$ der Frequenzgang des Reglers genannt. Es ist dann

$$\frac{\vartheta_a}{\varepsilon} \left(\phi \right) = K_R \, G_{R \, \left\langle \phi \right\rangle} \cdot K_V \, G_{V \, \left\langle \phi \right\rangle} \cdot K_S \, G_{S \, \left\langle \phi \right\rangle} \cdot K_{R \, S} \, G_{R \, S \, \left\langle \phi \right\rangle} = K \, G_{\left\langle \phi \right\rangle} \, . \tag{(4)}$$

 $KG_{(p)}$ wird als der resultierende Frequenzgang des aufgeschnittenen Regel kreises bezeichnet. Das Ausschreiben des Frequenzganges in der Form $KG_{(p)}$ hat seine Begründung darin, dass der Frequenzgang in einen frequenzunabhängigen, konstanten Teil K und einen frequenzabhängigen $G_{(p)}$ aufgespalte werden kann. K wird der Verstärkungsfaktor genannt. Mit Gleichung (1) bit (6) erhalten wir:

$$\frac{\vartheta_a}{\vartheta_e}\left(\phi\right) = \frac{KG_{(p)}}{1 + KG_{(p)}}.$$

Gleichung (7) erlaubt, aus der Gangkurve $KG_{(p)}$ des aufgeschnittenen Regekreises, den Ausgang als Funktion des Einganges für den geschlossenen Regekreis zu berechnen, bei Abwesenheit einer Last. Soll $\theta_{a(t)}$ für eine beliebige Eingangsfunktion $\theta_{e(t)}$ bestimmt werden, so kann folgendermassen vorgegangen werden:

- 1. Bestimme die Laplace-Transformation von $\vartheta_{e(t)}$,
- 2. Berechne den Frequenzgang $KG_{(p)}$,
- 3. Mit Gleichung (7) bestimme $(\vartheta_a/\vartheta_e)$ (p),
- 4. Schliesslich wird mittels der inversen Laplace-Transformation, die w. symbolisch als L^{-1} schreiben,

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 308.

$$\vartheta_{a\,(t)} = L^{-1} \left[\frac{KG_{(p)}}{1 + KG_{(p)}} \,\vartheta_{e\,(p)} \right] \tag{8} \label{eq:definition}$$

erhalten. Falls der Eingang sinusförmig variiert wird, so ist der Ausgang ebenfalls durch Gleichung (7) bestimmt. Nur ist $i \omega$ an Stelle von p einzusetzen:

$$\vartheta_{a(i\omega)} = \frac{KG_{(i\omega)}}{1 + KG_{(i\omega)}} \,\vartheta_{e(i\omega)} \tag{9}$$

 $(\theta_a'\theta_e)$ $(i|\omega)$ wird wieder als der resultierende Frequenzgang des aufgeschnittenen Regelkreises bezeichnet.

Wenn der Eingang ein Stoss ist, erhalten wir:

$$\vartheta_{e(p)} = \frac{1}{p} \tag{10}$$

und mit Gleichung (7):

$$\vartheta_{a(p)} = \frac{KG_{(p)}}{1 + KG_{(p)}} \cdot \frac{1}{p}. \tag{11}$$

Die rechte Seite von Gleichung (11) ist eine rationale Funktion und kann deshalb auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\vartheta_{a(p)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p + p_1} + \frac{A_2}{p + p_2} + \dots + \frac{A_n}{p + p_n}. \tag{12}$$

Hierbei sind p_1, p_2, \ldots, p_n die negativen Wurzeln der Gleichung

$$1 + K G_{(p)} = 0$$
. (13)

Die inverse Laplace-Transformation auf Gleichung (12) angewendet, ergibt:

$$\vartheta_{a(t)} = A_0 + A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} + \dots + A_n e^{-p_n t}. \tag{14}$$

us Gleichung (14) ist ersichtlich, dass der Ausgang mit zunehmender Zeit le Konstante A_0 annähert, falls alle Wurzeln p_1, \ldots, p_n entweder positiv reelle der komplexe Zahlen mit positivem Realteil sind.

3. Eigenschaften des Frequenzganges $KG_{(i\,\omega)}$

 \mathcal{L} Der resultierende Frequenzgang $KG_{\alpha e}$ wird erhalten durch Ersetzen von tdurch $i \omega$ in Gleichung (6):

$$K G_{(i\,\omega)} = \frac{\vartheta_a}{\varepsilon} (i\,\omega) \,.$$
 (15)

cerbei ist $(\vartheta_a/\varepsilon)$ (i ω) eine Vektorgrösse und kann beschrieben werden durch

das Amplitudenverhältnis A von Ausgang über Abweichung:

$$A = \frac{\vartheta_a}{\varepsilon} (i \ o) \tag{16}$$

und die Phasenverschiebung

$$\varphi = \not\subset \frac{\vartheta_a}{\varepsilon} \ (i \ \omega) \ .$$
 (17)

Das Zeichen $\not\subset (\vartheta_a/\varepsilon)$ $(i\ \omega)$ bedeutet den Winkel zwischen den Vektoren $\vartheta_{a(i\ \omega)}$ und $\varepsilon_{(i\ \omega)}$. Die Gangkurve K $G_{(i\ \omega)}$ ist in Figur 2 in Form eines Polardiagramme dargestellt, wobei die Frequenz ω als Kotierung der Kurve aufgetragen ist

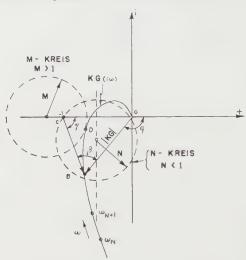


Fig. 2

Nyquist-Diagramm mit M-N-Kreisen.

Diese Darstellungsart wird oft als Nyquist-Diagramm bezeichnet. Wenn die Gangkurve des aufgeschnittenen Regelkreises bekannt ist, so kann $(\vartheta_a/\vartheta_e)$ (i and des geschlossenen Regelkreises mit Gleichung (9) bestimmt werden. Gleichung (9) kann auch graphisch gelöst werden, wie in Figur 2 angedeutet ist.

Es ist

$$|K G_{(i\,\omega)}| = \overline{OB} , \qquad (18)$$

$$\left|1 + K G_{(i\,\omega)}\right| = \overline{CB} \,, \tag{1}$$

da C die Koordinaten (-1, 0) hat.

Damit wird das Amplitudenverhältnis

$$\frac{\vartheta_a}{\vartheta_e}(i\,\omega) \,\big| = \frac{KG_{(i\,\omega)}}{1 + KG_{(i\,\omega)}} = \frac{O\overline{B}}{\overline{C}\overline{B}} \,. \tag{20}$$

Die Phasenverschiebung $\swarrow (\vartheta_a/\vartheta_e)$ ($i \omega$) ist bestimmt durch:

$$\beta = \varphi - \gamma = \stackrel{>}{\swarrow} \frac{\vartheta_a}{\vartheta_e} (i \, \omega)$$
, (21)

vie aus Figur 2 ersichtlich. Es ist nicht schwierig, zu zeigen, dass die Kurven ür verschiedene Werte von

$$\left| \frac{\vartheta_a}{\vartheta_e} \left(i \, \omega \right) \right| = \text{const} = M$$
 (22)

ind

$$\operatorname{tg} \stackrel{>}{\swarrow} \frac{\vartheta_a}{\vartheta_e} (i \, \omega) = \operatorname{const} = N$$
 (23)

m Polardiagramm von Figur 2 Kreise sind [4]. Ein *M*- und *N*-Kreis ist dort ingezeichnet. Ohne auf die Ableitung der Formeln für die *M*-*N*-Kreise hier täher einzugehen, seien der Vollständigkeit halber die Gleichungen zur Betimmung der Radien und Zentren der Kreise in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1

	M-Kreise	N-Kreise		
Kreiszentrum	$\left[-\frac{M^2}{M^2-1};0\right]$	$\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2N}\right]$		
Kreisradius	$\left[\frac{M}{M^2-1}\right]$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{N^2+1}}{N}$		

Falls in einem Polardiagramm wie in Figur 2 viele M-N-Kreise eingetragen lerden, so kann direkt der Frequenzgang $(\theta_a|\theta_e)$ $(i\ \omega)$ des geschlossenen Regeleieses bei gegebener Gangkurve $KG_{(i\ \omega)}$ abgelesen werden. In Figur 2 tangiert $G_{(i\ \omega)}$ den M-Kreis im Punkte D. Eine Tangente zwischen der Gangkurve $G_{(i\ \omega)}$ und einem M- $G_{(i\ \omega)}$ des geschlossenen Regelkreises. Bei gegebener qungkurve $G_{(i\ \omega)}$ ist sofort ersichtlich, ob es sich um ein Maximum oder nimum handelt. In Figur 2 zum Beispiel ist Punkt D ein Maximum.

4. Stabilität eines Regelsystems

t Eine Stabilitätsuntersuchung, sei es analytisch, graphisch oder durch trsuch, gehört zu den ersten Untersuchungen, die an einem Regelsystem üternommen werden. Es ist daher von Nutzen, ein Kriterium zur Hand zu den, welches über die Stabilität einer Regelung ohne grosse Mühe Auskunft t. Speziell gut geeignet bei Verwendung der Gangkurve $KG_{(i\,\omega)}$ ist das dibilitätskriterium von Nyquist. Die Ableitung des Kriteriums, entwickelt

für gegengekoppelte Verstärker, soll hier nicht weiter verfolgt werden, da die den Rahmen dieses Aufsatzes überschreiten würde [5], [6], [7]. Die Formulierung des Nyquist-Kriteriums, angewendet auf einen einfachen Regelkreis für di Gangkurve $KG_{(i,\omega)}$, lautet:

Wenn die Gangkurve $-K G_{(i \omega)}$ den Punkt (+1, 0) umschliesst, ist da

System unstabil, andernfalls ist es stabil.

Hierbei durchläuft die Frequenz ω die Werte von $-\infty$ bis $+\infty$. Wi brauchen allerdings nur die Gangkurve für positive Frequenzen aufzutrager

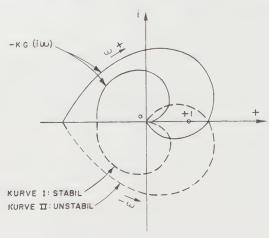


Fig. 3
Stabilitätskriterium von Nyguist.

da $KG_{(-i\omega)}$ durch Spiegelung von $KG_{(+i\omega)}$ an der reellen Achse erhalten wird. In Figur 3 stellt Kurve I eine stabile und Kurve II eine unstabile Regelung da

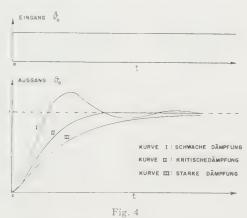
Wenn die Gangkurve -K $G_{(i\omega)}$ den Punkt (+1,0) umschliesst, dann um schliesst die Gangkurve K $G_{(i\omega)}$ den Punkt (-1,0). Das heisst, das Nyquiss Kriterium kann entweder auf den Punkt (+1,0) angewendet werden, falls di Gangkurve -K $G_{(i\omega)}$ aufgezeichnet wird, oder aber auf den Punkt (-1, wenn man die Gangkurve +K $G_{(i\omega)}$ verwendet. Da in unsern Gleichunge immer +K $G_{(i\omega)}$ auftritt, ist es unnötig, -K $G_{(i\omega)}$ zu bestimmen, und dis Stabilitätskriterium wird deshalb in diesem Aufsatz durchwegs auf den Punkt (-1,0) angewendet.

5. Qualitative Abschätzung der Antwortkurve des geschlossenen Regelkreises mittels der Gangkurve $KG_{(i\omega)}$

Die Antwortkurve ist definiert als die zeitliche Änderung des Ausgangsbei einer plötzlichen Änderung des Einganges eines Regelelements. In diese

Abschnitt soll besonders die Antwortkurve des geschlossenen Regelkreises intersucht werden. In Figur 4 sind verschiedene Antwortkurven aufgezeichnet, wie sie häufig in der Praxis angetroffen werden.

Bei der Synthese von Regelsystemen wird der Antwortkurve eine bestimmte Form vorgeschrieben. Die Antwortkurve ist durch Gleichung (12) mathemaisch beschrieben. Der Zusammenhang zwischen der Änderung eines Regelelementes und der Verbesserung einer bestimmten Wurzel der charakteristischen Gleichung (13) ist mit Ausnahme einfacher Regelkreise sehr unübersichtlich. Es ist daher schwierig, mittels der Antwortkurve rechnerisch oder graphisch



Antwortkurven für ein System zweiter Ordnung.

hr wertvolle Dienste bei der Optimaleinstellung von Regelungen im Betrieb er bei der Bestimmung von Gangkurven aus Versuchsresultaten. Ist die arakteristische Gleichung von höherer Ordnung als 4, was in praktischen eispielen fast immer der Fall ist, so wird der Arbeitsaufwand zur Bestimmung Wurzeln und deren Übertragung auf den Entwurf von Regelelementen far gross.

Es ist deshalb wünschenswert, Wege zu finden, wo mittels der Gangkurve $G_{(i\,\omega)}$ direkt das Verhalten der Antwortkurve des geschlossenen Regelkreises istimmt werden kann. Durch das Kriterium der M-N-Kreise sind wir sofort der Lage, die Gangkurve $(\vartheta_a/\vartheta_e)$ $(i\,\omega)$ des geschlossenen Regelkreises, bei gebener Gangkurve K $G_{(i\,\omega)}$, zu bestimmen. In Figur 5 sind für den geschlosten Regelkreis, Amplitudenverhältnis $[(\vartheta_a/\vartheta_e)$ $(i\,\omega)]$ und Phasenverschieng φ , separat aufgetragen.

Eine Spitze im Amplitudenverhältnis $|(\vartheta_a/\vartheta_e(i\ \omega))|$ deutet im allgemeinen i eine komplexe Wurzel der charakteristischen Gleichung hin, wobei der inginäre Teil der Wurzel ungefähr der Frequenz entspricht, an welcher die

Spitze auftritt. Die Höhe der Spitze ist bestimmt durch den Realteil der komplexen Wurzel. Sollen nun die reellen und komplexen Wurzeln der charakteristischen Gleichung grosse Realteile haben, dann müssen die Spitzen vol (θ_a/θ_e) $(i|\omega)$ begrenzt werden und sollten bei hohen Frequenzen auftreten Hoch ist selbstverständlich ein relativer Begriff und bedeutet hier: hoch verglichen mit dem Frequenzbereich, für welchen die Regelung entworfen is Es hat sich nun in der Praxis erwiesen, dass bei Beschränkung des maximale Amplitudenverhältnisses $M = |(\theta_a/\theta_e)$ $(i|\omega)$ auf 1,3 die positiven Realteile d

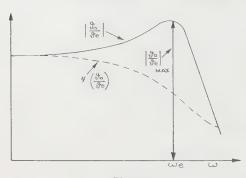


Fig. 5
Gangkurve eines geschlossenen Regelkreises.

Wurzeln in der Regel genüger gross sind, um die verschiedene Eigenfrequenzen zufriedenste lend zu dämpfen. Dieses Kritrium ist selbstverständlich neine Faustregel. Doch leistet sehr gute Dienste bei der Lösur von Regelproblemen wie den hibehandelten. Die Wahl des maxmalen Amplitudenverhältnisses wird je nach dem Zweck, den die Regelung erfüllen soll, verschied sein. Zum Beispiel wird M häugleich 1 gewählt, wodurch die Regelung kritisch gedämpft wir

Da es häufig nicht möglich ist, die elektrischen, mechanischen oder hydralischen Komponenten zum voraus genau zu bestimmen, sondern Unsicherheit faktoren von 20 bis 30% gebräuchlich sind, ist eine genaue Bestimmung deinzelnen Regelparameter für optimales Arbeiten der Regelung nicht gerecktertigt. Damit erhält das M-Kriterium erhöhte Bedeutung, denn es erlaubt allgemeinen, die optimale Einstellung innerhalb 30% zu bestimmen. Sorb sind wir jetzt in der Lage, direkt vom Frequenzgang des aufgeschnittenen Eigelkreises, mittels der M-N-Kreise, auf das Verhalten der Antwortkurve geschlossenen Regelkreises zu schliessen. Da Änderungen des Frequenzgang $KG_{(im)}$ leicht auf physikalische Parameter übertragen werden können, so die Wirkung einer Parameteränderung auf die Antwortkurve sofort erkennber

6. Die Bestimmung des Frequenzganges $KG_{(i \circ o)}$

Beim Entwurf einer Regelung sind immer bestimmte Elemente als gegelzu betrachten. Es ist dann Aufgabe der Synthese, zusätzliche Regelelemer so zu bestimmen, dass zusammen mit den Gegebenen eine vorgeschriebe Gangkurve $KG_{(i\,\omega)}$ erhalten wird. In einem gegebenen Regelsystem ist pl sikalisch am einfachsten, den Verstärkungsfaktor K der Gangkurve $KG_{(i\,\omega)}$

ändern. Bei einer elektrischen Regelung zum Beispiel kann durch Änderung eines Spannungsteilers K leicht variiert werden, während bei hydraulischen, pneumatischen oder mechanischen Regelsystemen die Änderung von K meistens mit Ändern von Schlitzen, Übersetzungsverhältnissen und Federn verbunden ist. Die linke Abbildung in Figur 6 zeigt die Wirkung verschiedener K auf die Gangkurve K G in einem Polardiagramm. Wie zu ersehen ist, ergibt eine Änderung von K nur eine Verlängerung oder Verkürzung des Vektors,

ohne dessen Phasenlage φ zu ändern. Es soll jetzt KG nicht im linearen, sondern im logarithmischen Massstabe, mit Amplitudenverhältnis und Phasenlage getrennt, aufgetragen werden. Es ist:

$$\log |K G_{(i\omega)}| = \log K + \log |G_{(i\omega)}|$$
 (24)

und

$$\varphi K G_{(i\,\omega)} = \varphi G_{(i\,\omega)}. \tag{25}$$

Da die Elektroingenieure diese Beziehungen seit langem benutzen, werden

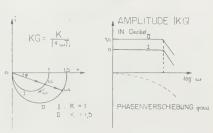


Fig. 6

Effekt einer Verstärkungsfaktoränderung Kauf die Gangkurve $KG_{(iw)}$.

wir auch die dort gebräuchliche Einheit, das Dezibel (db), verwenden. Damit wird das Amplitudenverhältnis A in Dezibel:

$$A = 20 \lg |K G_{(i\omega)}| = 20 \lg K + 20 \lg |G_{(i\omega)}|.$$
 (26)

Die Phasenlage von q wird durch Gleichung (25) bestimmt [8]. Durch diese Fransformation von einem linearen zu einem logarithmischen Massstab werden Multiplikationen und Divisionen zu Additionen und Subtraktionen vereinfacht. Eine Änderung des Verstärkungsfaktors K bedeutet jetzt lediglich eine Parallelverschiebung von $[KG_{rw}]$ nach oben oder unten, wie aus dem rechten Teil von Figur 6 ersichtlich ist.

Wie in Figur 2 gezeigt wurde, können die Werte für konstantes Amplitudenerhältnis und Phasenlage des geschlossenen Regelkreises im Polardiagramm Is Kreise dargestellt werden.

Es lässt sich nun ein neues Diagramm bestimmen, für

$$M = \mathrm{const} = \left| \begin{array}{c} rac{artheta_a}{artheta_e} \; (i \, \omega) \end{array}
ight| \; \; \mathrm{und} \; \; \; N = \mathrm{tg} \mathrel{
extra properties of the properties$$

In welchem die Ordinate in Dezibel und die Abszisse als Phasenverschiebung In Grad aufgetragen ist. Dieses Diagramm wird als Nichols-Diagramm bezeichlet [5]. Wie aus Figur 12 ersichtlich, ist die Gangkurve $KG_{(i\omega)}$ im Nichols-Diagramm bestimmt durch $|KG_{(i\omega)}|$ in Dezibel, am rechten Rand aufgetragen, und $\varphi_{KG_{(i,\omega)}}$, am obern Rand ablesbar. Um $(\vartheta_a/\vartheta_e)$ $(i\ \omega)$ zu finden, haben winur die Schnittpunkte von $KG_{(i\ \omega)}$ mit den stark ausgezogenen Kurven heraus zulesen. Wir erhalten damit das Amplitudenverhältnis

$$\frac{\vartheta_{a}}{\vartheta_{e}}(i\,\omega) = \left| \frac{KG}{1 + KG} \right|$$
 in Dezibel

und die Phasenverschiebung

$$\varphi\left[\frac{\vartheta_a}{\vartheta_e}\left(i\,\omega\right)\right] = \varphi\left[\frac{KG}{1+KG}\right] \ \ \text{in Grad}.$$

Die Bestimmung des grösstmöglichen Verstärkungsfaktors K erfolgt so, das die Gangkurve $G_{(i\,\omega)}$ vertikal verschoben wird, bis sie eine vorgeschrieben M-Kurve berührt. K ist dann die Ordinatendifferenz zwischen K $G_{(i\,\omega)}$ und $G_{(i\,\omega)}$. Das Stabilitätskriterium von NYQUIST auf das Nichols-Diagramm angewendet, erfordert für einen einfachen, stabilen Regelkreis, dass die Gangkurvunterhalb dem Punkte (0 db, -180°) vorbeigehe.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] WAGNER, K. W., Operatorenrechnung (Johann Ambrosius Barth, Leipzin 1940).
- [2] DOETSCH, G., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (Springe Berlin 1937).
- [3] GARDNER, M. F., und BARNES, J. L., Transients in Linear Systems (John Wiley & Sons, New York 1942).
- [4] Brown, G. S., und Campell, D. P., Principles of Servomechanisms (John Wiley & Sons, New York 1948).
- [5] James, H. M., Nichols, N. B., und Philips, R. S., Theorie of Servo-mechanisms (McGraw-Hill Book Company, New York 1947).
- [6] Bode, H. W., Network Analysis and Feedback Amplifier Design (D. va. Nostrand Co., New York 1945).
- [7] HAENNY, JOST, Regelungstheorie (Lehmann, Zürich 1947).
- [8] Greenwood, I. A., Holdam, I. V., und Duncan, Macrae, Electronic Instruments (McGraw-Hill Book Company, New York 1948).
- [9] PERKINS, C. D., Airplane Performance Stability and Control (John Wiley Sons, New York 1949).
- [10] DURAND, W. F., Aerodynamic Theory, Bd. 5 (Durand Reprinting Committe-Pasadena 1943).

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

Beziehungen zwischen den Störungskoeffizienten der ballistischen Störungsrechnung

Von KARL ECKEL, Madrid

In der ballistischen Störungstheorie werden die Änderungen einer Flugbahn berechnet, die durch kleine Änderungen der Flugbahnparameter entstehen. Als solche hat Stanke¹ insbesondere die Anfangsgeschwindigkeit v_0 , den Erhöhungswinkel ϑ_0 , den Bodenwert T_0 der absoluten Temperatur und den ballistischen Beiwert c in Betracht gezogen. Bezeichnet²) man die horizontale Bahnkoordinate mit x, die vertikale mit z, die Flugzeit mit t und führt die Grössen u und Θ durch die Gleichungen

 $u = \ln v$, $\Theta = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right)$

in, so kann man die Änderungen Δu , Δz , Δx , Δt der Flugbahnvariablen, die nfolge von gleichzeitig auftretenden Störungen $\Delta \Theta_0$, Δu_0 , Δc und ΔT_0 veruracht sind, aus folgenden linearen Gleichungen berechnen:

$$\Delta u = \alpha_{10} \Delta \Theta_{0} + \alpha_{11} \Delta u_{0} + \beta_{1} \frac{\Delta c}{c} + \gamma_{1} \frac{\Delta T_{0}}{T_{0}},$$

$$\Delta z = \alpha_{20} \Delta \Theta_{0} + \alpha_{21} \Delta u_{0} + \beta_{2} \frac{\Delta c}{c} + \gamma_{2} \frac{\Delta T_{0}}{T_{0}},$$

$$\Delta x = \alpha_{30} \Delta \Theta_{0} + \alpha_{31} \Delta u_{0} + \beta_{3} \frac{\Delta c}{c} + \gamma_{3} \frac{\Delta T_{0}}{T_{0}},$$

$$\Delta t = \alpha_{40} \Delta \Theta_{0} + \alpha_{41} \Delta u_{0} + \beta_{4} \frac{\Delta c}{c} + \gamma_{4} \frac{\Delta T_{0}}{T_{0}}.$$
(1)

ergleichspunkte auf der gestörten und ungestörten Flugbahn sind dabei die unkte mit gleichem Θ . Die Störungskoeffizienten α_{ik} , β_i und γ_i hängen von Θ und werden durch Integration von Systemen linearer Differentialgleichungen ester Ordnung ermittelt, die man als Störungsgleichungen bezeichnet. Jede integration liefert die vier Störungskoeffizienten einer Spalte der Gleichungen (1). It Hilfe der von Stanke gefundenen Beziehungen zwischen den Störungskoeffizienten α_{i1} , β_i und γ_i , die als erweiterte Darrieussche Formeln bezeichnet werden, unn eine dieser Integrationen erspart werden, wenn die entsprechenden beiden inderen durchgeführt sind. Im folgenden soll eine weitere einfache Beziehung wischen den Störungskoeffizienten abgeleitet werden, in denen auch die Koeffizienten α_{i0} enthalten sind.

¹⁾ P. Stanke, Die Störung einer Flugbahn durch äussere Einflüsse, Wehrtechn. Mh. 42, 560 138); 43, 35, 63 (1939).

²⁾ Die Bezeichnungen sind übereinstimmend mit R. Sänger, Ballistische Störungstheorie rkhäuser, Basel 1950) gewählt.

Zu einem Punkt P der ungestörten Flugbahn mit den Bahnkoordinaten u_p, z_x x_p , Θ_p und t_p gehöre die Temperatur T_p und die Luftdichte ϱ_p . Berechnet man mit u_p , Θ_p als neuen Anfangswerten, mit T_p als Bodenwert und mit c'=c ϱ_p/ϱ als ballistischem Beiwert eine neue Flugbahn vom Koordinatenanfangspunkt C aus, so stimmt diese mit dem Teil der alten Flugbahn überein, der auf P folgt Es findet nur eine Parallelverschiebung dieses Bahnteiles statt, der den Punkt in O überführt. Insbesondere bleiben die Werte Θ in den entsprechenden Punktebei der Parallelverschiebung erhalten. Deshalb kann man, wenn die Differenzer

$$arDelta\Theta_0=\,\Theta_p-\,\Theta_0$$
 , $arDelta u_0=\,u_p-\,u_0$, $arDelta c=\,c'-\,c$, $arDelta T_0=\,T_p-\,T_0$

klein genug sind, die Abweichungen der parallel verschobenen Flugbahn mit Hilfe der Störungstheorie berechnen, indem man diese Differenzen in das Gleichungssystem (1) einsetzt. Die linken Seiten dieses Gleichungssystems sind aberschon bekannt. Δu ist in allen Bahnpunkten gleich Null, da sich u bei der Parallel verschiebung nicht ändert. Δz und Δx sind die Komponenten des Verschiebungs vektors PO, und Δt ist in allen Bahnpunkten gleich dem negativen Wert de Flugzeit t_p .

Man berechnet die Störungen $\Delta\Theta_0$, Δu_0 , Δc und ΔT_0 durch Taylor-Entwicklungen um den Punkt O nach Potenzen von t_p . Es gilt für den Punkt P, wen die Entwicklung nach dem Glied erster Ordnung abgebrochen und die Erc

beschleunigung g konstant angenommen wird

$$\Delta\Theta_0 = \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_0 t_p + \dots = -\frac{g}{v_0} t_p + \dots$$
 (2)

Entsprechend ergibt sich die Störung Δu_0 aus der Reihenentwicklung

$$\Delta u_0 = \left(\frac{du}{dt}\right)_0 t_p + \dots = \frac{1}{v_0} \left(\frac{dv}{dt}\right)_0 t_p + \dots = \frac{g}{v_0} \left(\frac{b_0}{g} + \sin \theta_0\right) t_p + \dots, \tag{2}$$

wenn b die Verzögerung durch den Luftwiderstand bedeutet. Die Änderung de ballistischen Beiwertes ist durch die Änderung der Luftdichte $\Delta\varrho_0=\varrho_p-\varepsilon_0$ bedingt, und es gilt

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta \varrho_0}{\varrho_0} .$$

Für das lineare Temperaturgesetz

$$T = T_0 - \lambda z$$

erhält man

$$\begin{split} \frac{\varDelta c}{c} &= \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{d\varrho}{dz} \right)_0 \left(\frac{dz}{dt} \right)_0 t_p + \cdots \\ &= \frac{d}{dz} \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z \right)^{(1/R\lambda) - 1} v_0 \sin \vartheta_0 t_p + \cdots \\ &= -v_0 \frac{1 - \lambda R}{R T_0} \sin \vartheta_0 t_p + \cdots , \end{split}$$

worin R die Gaskonstante für Luft bedeutet.

Für das gleiche Temperaturgesetz wird

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{1}{T_0} \left(\frac{dT}{dz} \right)_0 \left(\frac{dz}{dt} \right)_0 t_p + \cdots
= \frac{d}{dz} \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z \right) v_0 \sin \vartheta_0 t_p + \cdots
= -v_0 \frac{\lambda}{T_0} \sin \vartheta_0 t_p + \cdots$$
(5)

Setzt man die Störungen (2) bis (5) in (1) ein, dividiert beide Seiten durch t_p nd geht zur Grenze $t_p \to 0$ über, so verschwinden die vernachlässigten Glieder öherer Ordnung. Der Verschiebungsvektor PO geht in die Tangentenrichtung er ungestörten Flugbahn in O über und ist der Anfangsgeschwindigkeit v_0 entegengesetzt gerichtet. Daher wird

$$\lim_{t_{\mathcal{D}} \to 0} \, \frac{\varDelta z}{t_{\mathcal{D}}} = - \, v_0 \sin \vartheta_0 \; , \quad \lim_{t_{\mathcal{D}} \to 0} \, \frac{\varDelta x}{t_{\mathcal{D}}} = - \, v_0 \cos \vartheta_0 \; . \label{eq:constraint}$$

erner gilt $\varDelta t/t_p=-1$, so dass man insgesamt folgende Beziehungen für die törungskoeffizienten erhält:

$$0 = A_{0} \alpha_{10} + A_{1} \alpha_{11} + B \beta_{1} + C \gamma_{1},$$

$$v_{0} \sin \vartheta_{0} = A_{0} \alpha_{20} + A_{1} \alpha_{21} + B \beta_{2} + C \gamma_{2},$$

$$v_{0} \cos \vartheta_{0} = A_{0} \alpha_{30} + A_{1} \alpha_{31} + B \beta_{3} + C \gamma_{3},$$

$$1 = A_{0} \alpha_{40} + A_{1} \alpha_{41} + B \beta_{4} + C \gamma_{4},$$

$$(6)$$

orin die vier Konstanten durch

$$\begin{split} A_0 &= \frac{g}{v_0}\,, \qquad A_1 = \frac{g}{v_0} \left(\frac{b_0}{g} + \sin\vartheta_0\right), \\ B &= \frac{v_0}{T_0} \left(\frac{1}{R} - \lambda\right) \sin\vartheta_0 \,, \qquad C = \frac{\lambda}{T_0} \,v_0 \sin\vartheta_0 \end{split}$$

egeben sind.

Die Richtigkeit dieser Formeln kann man durch Einsetzen in die Störungsleichungen verifizieren. Man hätte auch umgekehrt an Stelle des hier gegebenen nschaulichen Beweises durch Einsetzen von (6) in die Störungsgleichungen mit nschliessendem Koeffizientenvergleich die Koeffizienten A_0 , A_1 , B, C und die nken Seiten von (6) berechnen können.

Zur Bestimmung aller Störungskoeffizienten wird man praktisch zunächst urch Integration des einfachsten homogenen Systems der Störungsgleichungen ie Koeffizienten α_{i1} und durch Integration des einfachsten inhomogenen Systems ie Koeffizienten β_i berechnen. Mit Hilfe der erweiterten Darrieusschen Formeln hält man dann die Koeffizienten γ_i und durch obige Beziehungen (6) die Koeffienten α_{i0} .

Résumé

Les déviations des variables de la trajectoire u, x, z et t peuvent être calculées vivant Stanke à partir des équations (1), comme fonction des perturbations Θ_0 , Δu_0 , Δc et ΔT_0 , lorsque l'on connaît les coefficients de perturbation correspondants α_{i0} , α_{i1} , β_i et γ_i . Introduisant dans ces équations comme perturbations

les déviations qu'un point P de la trajectoire normale avec le temps de vol t possède en comparaison avec le point d'origine, les côtés gauches de (1) son égaux à $0, -z_p, -x_p, -t_p$. En développant les perturbations autour du poin d'origine en puissances de t_p , en divisant par t_p et en se rapprochant de la limits $t_p \to 0$, on obtient les relations linéaires (6) pour les coefficients de perturbation Ils forment un complément aux formules de Darrieus et ses élargissements de Stanke.

(Eingegangen: 8. April 1952.)

$\label{eq:chenplan} Automatische Rechenplanfertigung bei programmgesteuerten \\ Rechenmaschinen^1\rangle$

Von Heinz Rutishauser, Zürich2)

Es ist bekannt, dass die Aufstellung des Rechenprogramms (Befehlsreihe) für ein bestimmtes Problem oft nicht nur eine zeitraubende Arbeit, sondern auch ein Quelle von sehr störenden Fehlern sein kann. Im Gegensatz zu andern Vorschlagen zur Vereinfachung der Planfertigung insbesondere K. Zuse³)], welche di Konstruktion spezieller Geräte in Betracht ziehen, zeigt der Verfasser einen Wegden Rechenplan für eine bestimmte Formel oder Formelgruppe durch die Rechenmaschine selbst «ausrechnen» zu lassen, das heisst die Rechenmaschine als ilt eigenes Planfertigungsgerät zu benützen.

Zu diesem Zweck werden die Formeln zunächst arithmetisiert, das heisst au numerische Form gebracht, indem man jedem «Element» (das sind Klammerzeichen, Operationszeichen und Operanden) eine Zahl zuordnet. Diese Zahle sind für Operations- und Klammerzeichen ein für allemal festgelegt (zum Bespiel 10000 für eine öffnende Klammer, 60000 für ein Multiplikationszeichen usw.). Für einen Operanden dagegen ist es die Nummer der Zelle, die man zu

Speicherung desselben vorgesehen hat.

Die so erhaltene Zahlfolge charakterisiert eine Formel oder Formelgrupp vollständig, so dass es möglich sein muss, daraus den Rechenplan zu berechnen Es wird eine Methode angegeben, wie man diese Zahlfolge in endlich viele

Schritten abbaut und gleichzeitig die gesuchte Befehlsreihe aufbaut.

Interessant wird die Sache allerdings erst bei zyklischen Problemen, als bei Formeln, in denen laufende Indizes vorkommen. Hier hat man übriger zwei Möglichkeiten: man kann nämlich entweder einen zyklischen Plan herstelle (der mit einem Minimum an Befehlen auskommt) oder einen sogenannten «gestreckten» Plan, welcher jede auszuführende Operation ohne Rücksicht auf dizyklische Natur der Aufgabe genau einmal enthält. Gestreckte Rechenpläne sin

¹⁾ Autoreferat über einen vom Verfasser an der GaMM.-Tagung 1951 in Freiburg i. Br. gehatenen Vortrag, dessen Inhalt demnächst als Mitteilung aus dem Institut für angewandte Mathmatik an der ETH. veröffentlicht werden wird.

Über Begriffe und Bezeichnungen des programmgesteuerten Rechnens vergleiche: H. RUTH HAUSER, A. Speiser, E. Stiefel, *Programmgesteuerte digitale Rechengeräte*, Mitteilung Nr. 2 aug dem Institut für angewandte Mathematik der ETH. (Birkhäuser, Basel 1951); ZAMP 1, 297 und 339 (1950); 2, 1 und 63 (1951).

²⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

³⁾ K. Zuse, Über den allgemeinen Plankalkül als Mittel zur Formulierung schematisch-kombintiver Aufgaben, Arch. Math. 1, 441–449 (1948).

zwar sehr lang, rechnen aber dasselbe Problem wesentlich schneller durch, so lass man mit Vorteil davon Gebrauch machen wird, wenn man einmal der nanuellen Herstellung enthoben ist.

Der Verfasser gibt ein Rezept für die automatische Herstellung des zyklischen oder gestreckten Rechenplans für jedes Problem, das sich in ähnlicher Weise wie das folgende Beispiel der Matrizeninversion formulieren lässt:

Sei a_{ik}^0 die zu invertierende Matrix, dann lautet die Inversionsvorschrift, welche über die Zwischenmatrizen a_{ik}^{j} $(j=1,\,2,\,...,\,n-1)$ die gesuchte Inverse als a_{ib}^n liefert1)

$$\begin{split} & \text{Für } j = 1 \; (1) \; n ;^2) \\ & \text{Für } i = 1 \; ; \\ & \text{Für } k = 1 \; ; \\ & \frac{1}{a_{ik}^{i+1}} = a_{nn}^j \; . \\ & \text{Für } k = 2 \; (1) \; n ; \; a_{nn}^j \times a_{1k}^{j-1} = a_{n,k+1}^j \; . \\ & \text{Für } i = 2 \; (1) \; n ; \\ & \text{Für } k = 1 \; ; \qquad - a_{ik}^{j-1} \times a_{nn}^j = a_{i+1,n}^j \; . \\ & \text{Für } k = 2 \; (1) \; n ; \; a_{ik}^{j-1} - \left(a_{i1}^{j-1} \times a_{n,k-1}^j\right) - a_{i-1,k-1}^j \; . \end{split}$$

Line spezielle Anwendung:

Es seien Differentialgleichungen zweiter Ordnung,

$$y'' = f(x, y, y'),$$

umerisch zu integrieren. Normalerweise macht man das so, dass man einen ermanenten Plan für Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung weiter Ordnung» hat und daran einen Unterplan für die spezielle Formel x, y, y') anfügt; den letzteren kann man aber nach den beschriebenen Methoden erechnen, man muss nur f(x, y, y') in numerische Form kleiden, wozu das Planrtigungsgerät dienen soll. Wenn damit auch kein grosser Zeitgewinn verbunden in mag, so eliminiert man doch durch das Ausschalten der manuellen Rechenanfertigung eine Fehlerquelle.

Summary

It is well known that planning and coding of problems for an electronic comnter is very often a laborious task and a source of errors. To simplify the coding rogramming), various devices have been constructed, but the author believes at the device most suited to assist the coding personnel is the computing achine itself. Methods to «compute» the program for a given set of formulae we been worked out by the author and are described in detail in a booklet to be blished very soon (see footnote 1 on page 312).

ngegangen: 1. Mai 1952.)

¹⁾ Diese Vorschrift basiert auf der sogenannten Jordanschen Elimination, doch werden dort "Zwischenmatrizen in der Regel nicht berechnet. Man beachte ferner, dass in der folgenden Vorbrift die zu berechnenden Grössen immer rechts vom Gleichheitszeichen auftreten.

i=a (b) c ist die gebräuchliche Abkürzung für: «i durchläuft die Werte a, a+b, a+2b, usw., bis c».

Über die numerische Berechnung der Eigenwerte von Säkulargleichungen

Von Heinz Voetter, Wien1)

Eine n-reihige Säkulardeterminante (1)2) ist eigentlich

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{vmatrix} = 0$$
 (1

eine algebraische Gleichung n-ten Grades, die in entwickelter Form (2) bekanntlich lautet:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i} x^{i} \sum_{j=1}^{\binom{n}{i}} A^{(n-i)} = 0.$$
 (-

 $A^{(l)}$ bedeutet dabei einen t-zeiligen Hauptminor der Determinante (1). Aus (2 können mit Hilfe des Horner-Schemas in Verbindung mit der $Regula\ Falsi$ de Eigenwerte der Gleichung (1) rasch berechnet werden. Schon bei Säkularglechungen fünften Grades wird aber die Ausführung der Formel (2) sehr langwierig da die Anzahl der zu berechnenden Determinanten stark anwächst.

Es ist unseres Wissens noch nirgends darauf hingewiesen, dass die Verwandlurder Determinante (1) in die algebraische Form (2) durch «Triangulierung» mit verhältnismässig geringem Aufwand möglich ist. Das Verfahren sei an eine Säkulardeterminante vierten Grades gezeigt. Es lässt sich ohne weiteres an Determinanten beliebigen Grades erweitern.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{41} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} & a_{24} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x & a_{34} & a_{43} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - x & x - \frac{a_{11} a_{41} + a_{21} a_{42} + a_{31} a_{43}}{a_{41}} \end{vmatrix}$$

Wir wollen durch Kombination eine neue Zeile der Determinante (3) erhalter bei der das Glied in der ersten Spalte eine Null wird und die in allen anders Spalten mit Ausnahme der letzten keine Glieder mit der Unbekannten x enthä. Die einzelnen Elemente in den Zeilen in (3) werden mit den rechts stehende Zahlen multipliziert und dann addiert. Die Multiplikatoren der Zeilen, die (n. Ausnahme der letzten Spalte) ein x enthalten, sind aus der untersten Zeile entnehmen. Die unterste Zeile wird jeweils mit der Unbekannten multiplizie wodurch letztere in allen Spalten der neuen Zeile mit Ausnahme der letzt: wegfällt. Der konstante Summand des Multiplikators der letzten Zeile ist bestimmt, dass das Glied in der ersten Spalte der neuen Zeile wegfällt. Wir halten damit eine neue Determinante (4). Gegenüber (3) ist die oberste Zeile wegelassen, und als letzte die auf eben beschriebene Weise erhaltene angeschriebe

¹⁾ Institut für Verfahrenstechnik, Technische Hochschule Wien.

 $^{^2}$) In der mathematischen Literatur werden nur die symmetrischen $(a_{ij}=a_{ji})$ Determinant vom Typ (1) als Säkulargleichungen bezeichnet und die übrigen als «charakteristische Gleichungen bezeichnet und die Bertalterische und

$$D = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} - x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x & a_{34} \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 + b_4 x - x^2 \end{vmatrix} x - \frac{a_{21} b_1 + a_{31} b_2}{a_{41}} = A$$

$$(4)$$

Das Verfahren wird sinngemäss fortgesetzt. Die nächste neue Zeile soll in den rsten beiden Spalten den Wert Null besitzen und in der dritten kein Glied mit haben, was durch die angeschriebenen Multiplikatoren erreicht wird. A beseiigt das Glied der ersten Spalte und der konstante Multiplikator der vierten Zeile as Glied der zweiten Spalte. Nach nochmaliger Wiederholung des Vorganges rhält man die Determinante (5).

$$D = \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - x \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 - b_4 x - x^2 \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 - c_3 x - c_4 x^2 - x^3 \\ 0 & 0 & d_1 & d_2 x - d_3 x^2 + d_4 x^3 - x^4 \end{pmatrix}$$
(5)

Das rechts unten stehende Polynom in (5) repräsentiert die entwickelte algeraische Form der Säkulargleichung. Bei der Durchführung dieses Verfahrens raucht nicht wie in (3) und (4) usw. nach jedem Schritt die vollständige Deterninante angeschrieben zu werden. Die neuen Zeilen werden der Reihe nach unter ie Ausgangsdeterminante gesetzt. Als Beispiel für eine rationelle Schreibweise ie eine Säkulargleichung vierten Grades ausgeführt.

2,858 — a	— 0,377	-0,125	-0,041	0,152			
-0,294	2,846 — x	-0,157	0,106	0,856	2,4514		
-0,819	-0,787	0,754 - x	0,257	0,288	0,1644	0,5775	
0,152	0,856	0,288	$0,650 - x_1$	x - 0,3495	5,6273	3,1116	
	2,4514	0,1644	0,3857+0,	$3005 x - x^2 x$	- 4,7582	- 0,9011	
	0,5775			$2,1246 - 6,6714 x + 5,0587 x^2 - x^3 x - 2,0492$			
	$-2,5303+12,4133x-16,1366x^2+7,1079x$						
		_					

Probe: $\Sigma a_{ii} = 7,108$

Als Probe für die richtige Durchführung dieser Operation kann der Koeffizient zweithöchsten Potenz der Unbekannten dienen. Dieser muss nach (2) gleich in der Summe der Elemente der Glieder der Hauptdiagonale von (1).

Die Ermittlung der Multiplikatoren und alle Zwischenrechnungen sind mit ner normalen Rechenmaschine ohne weitere Zwischennotizen möglich, was bei kulardeterminanten auch höheren Grades eine rasche Durchführung der Rechning gewährleistet.

Summary

The calculation of the eigenvalues of secular-equations is a difficult and lious task. Even with a five-ordered determinant it is very time-consuming evaluate the minors in the usual way. The purpose of this paper is to describe

a simple method to transform the secular determinant into its algebraic form By consequent combination of rows of the determinant all elements which are standing under the main-diagonal are eliminated, so that the value of the determinant is represented only by the product of the diagonal elements. The method can be used with the normal calculating-machine. The tabular scheme of the calculation also makes it possible for a quick execution of secular-equations of higher degrees.

(Eingegangen: 7. Februar 1952.)

Varia - Miscellaneous - Divers

Organisation für angewandte Physik und Mathematik in der Schweiz

Schon vor einiger Zeit ist der Wunsch aufgetaucht, es möchten die in unsere Lande auf dem Gebiet der angewandten Physik und Mathematik Tätigen sich einer passenden Organisation zusammenfinden. In der Tat ist das Bedürfn nach einer ungezwungenen Darlegung und Diskussion der erhaltenen Forschung ergebnisse recht gross. Während auf dem Gebiete der reinen Physik, der Chemider reinen Mathematik usw. entsprechende Vereinigungen bestehen, sind de «Angewandten» nirgends zu Hause; ihre Themata können sich in den Rahme der dort gehaltenen Vorträge nicht recht einfügen. Angesichts des sehr beträch lichen Umfanges der angewandten Forschung ist das ein wenig befriedigend! Zustand. - Eine naheliegende Lösung wäre die Schaffung einer eigenen Gese schaft für angewandte Physik und Mathematik gewesen. Allein von Seiten di reinen Physik wurden Bedenken geäussert, ob eine Zersplitterung der Physik (bzw. Mathematik) in einen reinen und einen angewandten Teil nicht doch grosi Nachteile brächte. Der aus idealen und praktischen Gründen erwünschte Konta würde noch geringer werden als bisher. Da diesem Argument ein grösseres Gewick beizumessen ist, wurde von einigen interessierten Herren in Besprechungen ein Vereinbarung mit der Schweizer Physikalischen Gesellschaft (SPG.) vorgeschlage — in dem Sinne, dass die SPG. an ihren beiden Tagungen im Frühjahr und in Herbst (letztere zusammen mit der Naturforschenden Gesellschaft) in ihren Tager programmen den angewandten Richtungen angemessen Rechnung trägt und eber so bei der Zusammensetzung des Vorstandes. Darnach wäre die Gründung eine besonderen Gesellschaft unnötig; an Stelle dessen würde die einfache Mitglieschaft zur SPG. genügen.

Um gewissermassen experimentell zu erproben, wie eine solche Zusammerarbeit funktionieren kann, wurde anlässlich der Frühjahrstagung der SPG., aus 3. Mai 1952, in Baden, parallel mit den kernphysikalischen und allgemein-physikalischen Vorträgen eine Serie von 13 Kurzreferaten über angewandte Themanangesetzt. Dank dem Entgegenkommen der Firma Brown, Boveri AG. und eine sehr zahlreichen Beteiligung erwies sich dieser Versuch als in erfreulichem Massigelungen. Kurze Inhaltsangaben der Referate werden in der ZAMP erscheines einzelne Referate auch in extenso.

An der geschäftlichen Sitzung der SPG. wurde der Anregung zugestimm und damit ist die Möglichkeit von regelmässigen Tagungen geschaffen. – Azweiter Sekretär und als Vertreter der angewandten Richtung wurde Dr. P. P. HALLER, Gebr. Sulzer AG., Winterthur, gewählt.

Die nächste Versammlung der SPG. findet vom 23. bis 25. August 1952 Bern statt.

Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques

Theoretische Elektrotechnik. III: Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen. Von K. Kuhlmann (Birkhäuser, Basel 1951). 547 S., 328 Abb.; Fr. 74.90.

Das vorliegende Buch von Professor K. Kuhlmann, der dritte Band seines ammelwerkes über die theoretische Elektrotechnik, in dem in grossen Zügen eine an der Eidgenössischen Technischen Hochschule gehaltenen Vorlesungen ber dieses Gebiet niedergelegt sind, behandelt einige der wichtigsten Probleme er elektrischen Maschine. Im Gegensatz zu vielen ähnlichen Büchern werden icht die einzelnen Maschinentypen in sinngemässer Reihenfolge besprochen; ier wird das einzelne Problem in seiner Vollständigkeit durchgearbeitet und auf eine Anwendung bei den verschiedenen Maschinen hingewiesen. Die Behandlung er Probleme wird vorzugsweise in analytischer Form durchgeführt, was naturemäss manchmal zu etwas länglichen Formeln und zu Grössensymbolen mit nigen Indizes führt. Der klare und logische Aufbau der Überlegungen und die ubere Darstellung der Entwicklung lassen den Leser doch verhältnismässig icht folgen.

Der Stoff des Buches gliedert sich in acht Kapitel, deren Inhalt im folgenden ırz angedeutet sei. Nach einem kurzen, einige allgemeine Festlegungen umfasnden Kapitel A folgen im Kapitel B unter der Bezeichnung der Wirkungsweise er elektrischen Maschinen die grundlegenden Feststellungen über Fluss und MK. Kapitel C befasst sich mit den Wicklungen, für deren Schaltgesetze anatische Ausdrücke angegeben werden. Bei dem auf Seite 65 beschriebenen Beiiel einer doppelten Schleifenwicklung hätte vielleicht darauf hingewiesen wern können, dass durch andere Wahl des Nutenschrittes die beiden Spannungsolygone zur Deckung gebracht werden und dadurch Ausgleichströme vermieden erden können. Das folgende Kapitel D enthält die umfassende analytische Be-Indlung der Erzeugung magnetischer Felder verschiedenster Formen und Wickngsausführung. Kapitel E ist der Induktivität gewidmet. Hier werden die wichen Rechenformeln für Eigen-, gegenseitige und Streuinduktivität abgeleitet. e auf der Induktivität beruhende Berechnung der induzierten EMK, bildet den halt des folgenden Kapitels F, wobei auch der Einfluss der höhern Harmonien in seiner Vollständigkeit behandelt ist. Die magnetische Energie und das rehmoment finden ihre Durcharbeitung in Kapitel G. Das folgende Kapitel H cals Anhang bezeichnet, indem hier einige Sonderprobleme Aufnahme gefunden Den, die zum Teil nur lose mit der Maschine zusammenhängen. Der Leser findet Ir die Durcharbeitung des Kommutationsproblems als induktiver Vorgang. weitern hat hier die analytische Behandlung des Problems der Stromverdräning in runden und rechteckigen Leitern und im Eisen Aufnahme gefunden, enso die Berechnung der Eisenverluste. Ein letzter Abschnitt in diesem grossen pitel orientiert über das Rechnen mit symmetrischen Komponenten und dessen wendung auf die Vorgänge in den verschiedenen Leitersystemen.

Es darf ruhig behauptet werden, dass Professor Kuhlmann mit diesem Buch erstklassiges Werk geschrieben hat, das in sehr klarer Form unter Benützung Er konsequenten Schreibweise die wichtigsten elektromagnetischen Zusamhänge der elektrischen Maschine festlegt. Die zahlreichen, den Text erläuriden Zeichnungen sind äusserst sorgfältig ausgeführt und sehr instruktiv. Auch Ausstattung, welche der Verlag Birkhäuser dem Buche zuteil werden liess, verdient volle Anerkennung und hilft mit, dem Buche ein Niveau zu geben, d nur selten von ähnlichen Büchern erreicht wurde. Das Werk sei einem rec zahlreichen Leserkreis als etwas vom besten, das in diesem Gebiet bisher gebotwurde, zum Studium wärmstens empfohlen.

E. Dünn

Ecoulements des fluides compressibles. Par R. Sauer (Béranger, Par et Liège 1951). 307 p., 150 fig.; fr.fr. 3900.—.

Le professeur Sauer est connu d'un public particulièrement vaste du faqu'il écrivit en 1943 un remarquable petit livre sur la théorie des écoulemer compressibles stationnaires (Einführung in die theoretische Gasdynamik). Couvrage, remanié et enrichi de la matière de tout un cours sur les phénomère non stationnaires, a été publié en français: La traduction du manuscrit allemanest due à un aérodynamicien autorisé, M. Carrière.

Après un élégant exposé des équations générales pour les écoulements sa friction ni conductivité, des solutions simples sont obtenues par linéarisation d'dites équations. Il faut remarquer que ces solutions, qui sont approximatives pour gaz, sont exactes dans le cas du mouvement non stationnaire d'un liquide de un tube, et trouvent ainsi les applications les plus variées. Etudiant en théor linéaire la répartition de pression sur un corps de révolution dans un écoulemistationnaire coaxial, l'auteur n'arrive à déceler aucune influence de la compressibilité. Nous pensons que ce n'est pas l'approximation linéaire de la compressibiliqui est insuffisante, mais plutôt la manière dont l'écoulement incompressible base est lui-même linéarisé¹).

A partir de l'approximation linéaire, et par des démonstrations plutôt g métriques, le lecteur arrive sans peine aux solutions rigoureuses dans le doma supersonique. La méthode des caractéristiques, dont il s'agit ici, s'applique au aux écoulements non stationnaires et aux écoulements non isentropiques. De le premier cas (unidimensionnel) une interprétation graphique très simple, et de le second cas des conseils pratiques pour le calcul numérique, dénotent le soi de rendre la théorie immédiatement utilisable. C'est grâce à cet esprit pratique l'auteur, tout mathématicien qu'il est, sait mettre en évidence les métholes mieux adaptées aux problèmes de la technique. Aussi pour l'étude des fi stationnaires subsoniques ou transsoniques, les procédés lents mais sûrs des veloppements en série et des approximations successives sont-ils exposés avec plus de détail.

Dans la dernière partie du livre, consacrée aux ondes de choc et aux écoloments — stationnaires ou non — qui en contiennent, les lois régissant les onde détonation intéresseront plus spécialement le thermodynamicien. Un table des grandeurs avant et après le choc nous semble unique dans la «littérationumérique» actuelle du fait que la grandeur d'entrée est le taux de compresse au travers du choc, paramètre commode puisque invariant à l'égard des travaltations de l'observateur.

D'un paragraphe à l'autre et d'un bout à l'autre du livre s'étend un véritairéseau de comparaisons, soulignant les similitudes ou les différences entre nombreux cas étudiés. Les résumés placés en tête des chapitres, ainsi que phrases d'orientation judicieusement insérées dans le texte, sont les meille guides au travers de cet ouvrage si riche.

B. Chi

¹⁾ Ici le passage à la limite d'un rayon nul est tel qu'il ne subsiste point de longueur à laqfon puisse rapporter ce rayon avant d'en prendre le logarithme.

Die zweidimensionale Laplace-Transformation. Von D. Voelker und G. Doetsch (Verlag Birkhäuser, Basel 1950). 259 S., Fr. 39.—.

Das vorliegende Werk ist ein Lehrbuch der Transformation

$$\mathfrak{L}\{F(x, y)\} = f(u, v) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-xu - yv} F(x, y) \, dx \, dy,$$

velche bei Funktionen von zwei Variablen dasselbe leistet wie die gewöhnliche Laplace-Transformation bei Funktionen einer Variablen und deshalb für die Lösung von partiellen Differentialgleichungen eine Rolle spielt. Das Buch – zur Zeit das einzige über dieses Gebiet – widmet sich deshalb auch weniger der Theoie, die im wesentlichen der klassischen Theorie analog ist, sondern mehr den Anvendungen auf partielle Differentialgleichungen, deren Grundgebiet eine Viertelbene ist.

Dabei wird nun sehr schön gezeigt, wie man solche Gleichungen – etwa die Värmeleitungsgleichung und die Wellengleichung – löst und vor allem wie sich larüber hinaus die Verträglichkeitsbedingungen mit Hilfe der zweidimensionalen aplace-Transformation von selbst ergeben. Es werden auch Anwendungen auf systeme von partiellen Differentialgleichungen sowie auf partielle Differentialleichungen mit drei unabhängigen Variablen behandelt. Die zweite Hälfte des Buches enthält auf zirka 100 Seiten ausführliche Tabellen von Korrespondenzen ür die zweidimensionale Laplace-Transformation $f(u, v) \longleftrightarrow F(x, y)$, die man für ie Anwendungen sehr schätzen wird.

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Von L. Collatz Springer-Verlag, Berlin 1951). 458 S., 110 Abb.; DM 45.—.

Das vorliegende Werk gibt eine vollständige Übersicht über die numerischen fethoden zur Lösung von Differentialgleichungen. Es behandelt sowohl Anfangssauch Randwertprobleme bei gewöhnlichen wie bei partiellen Differentialeichungen und wird jedem, der sich in der Praxis mit solchen Aufgaben befassen uss, eine wertvolle Hilfe sein, nicht zuletzt auch wegen seines ausgezeichneten stematischen Aufbaus.

Der erste Abschnitt behandelt Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, wobei die Methoden vom Typus Runge-Kutta und Edams-Bashfort im Mittelpunkt stehen, während der zweite Abschnitt vor reem die Anwendung der Differenzenverfahren und der Verfahren vom Ritzschen rypus auf Rand- und Eigenwertprobleme zeigt. Der dritte Abschnitt beschreibt e Lösung parabolischer und hyperbolischer partieller Differentialgleichungen or allem mit Differenzenverfahren, wobei insbesondere auch die Fragen der Ehlerfortpflanzung und Stabilität der Verfahren eingehend besprochen werden. Ehliesslich wird in einem vierten Abschnitt gezeigt, wie man elliptische Diffentialgleichungen löst. Insbesondere wird auch hier auf die Relaxationsmethode, se Ritzsche Verfahren und andere Minimalprinzipien eingegangen. Ein fünfter bschnitt ist den Funktional- und Integralgleichungen gewidmet. Den Schlusst det eine Sammlung von Formeln zur Integration von Differentialgleichungen, in Ausdrücken für das Differenzenverfahren, von Eulerschen Ausdrücken und frallem von Operatoren für die Relaxationsrechnung.

Dabei ist der Text laufend durch numerische Beispiele ergänzt, die zeigen, biss der Verfasser eine grosse praktische Erfahrung besitzt. Auch ist hervorzuten, dass überall grosse Sorgfalt auf Fehlerabschätzungen verwendet wurde.

H. Rutishauser.

Integraltafeln, Sammlung unbestimmter Integrale elementarer Funktionen. Von W. Meyer zur Capellen (Springer-Verlag, Berlin 1950). VIII - 292 S.; DM. 36.—.

Das Buch stellt eine umfangreiche Sammlung von Integralen dar. Diese sin nach Integranden geordnet: Integrale rationaler Funktionen (48 Seiten), Integrale algebraischer Funktionen (50 Seiten), ausserdem elliptische Integrale (38 Seten). Von besonderer praktischer Wichtigkeit ist der grosse Abschnitt über tranzendente, insbesondere trigonometrische und hyperbolische Integrale (80 Seiten Ihm folgt eine Auswahl von Integralen, deren Integranden sowohl algebraisch als auch transzendente Bestandteile enthalten.

Für zahlreiche Typen von häufig gebrauchten Integralen werden allgemein Gesetze oder Rekursionsformeln angegeben, mit deren Hilfe die Zurückführun auf explizite angeführte Integrale möglich ist. Dadurch wird die Verwendbarke

der Tafeln natürlich beträchtlich erhöht.

Diese auch drucktechnisch sehr gut ausgerüstete Integraltafel wird zweifelle dem Praktiker ausgezeichnete Dienste leisten; doch wird auch der reine Mathmatiker gerne zu diesem Hilfsmittel greifen.

H. Rutishaus

Einführung in die Funktionentheorie. Von L. Bieberbach (Verlag fi Wissenschaft und Fachbuch, Bielefeld 1951). 220 S., 43 Abb.; DM. 12.60.

Cet ouvrage est une excellente introduction aux parties de la théorie de fonctions analytiques d'une variable qui doivent être connues de tout étudiant en mathématiques et en physique (il serait, à ce point de vue, désirable qu'une prochaine édition contienne un bref exposé de l'application de la théorie aux théorèmes d'existence des équations différentielles, spécialement des équations différentielles linéaires). Grâce à la limpidité de son style, il peut être recommandaussi à l'ingénieur qui veut utiliser les méthodes de la théorie des fonctions ét théorie du potentiel et en hydrodynamique. L'auteur ne suppose du lecteur que la connaissance des éléments du calcul différentiel et intégral.

M. Planchen

Mechanische Schwingungen. Von J. P. DEN HARTOG und G. MESMR (Springer-Verlag, Berlin 1952), 427 S., 299 Abb.; DM 42.—.

Die englische Sprache hat sich im Westen heute so weit durchgesetzt, das man sich fragen kann, ob sich eine Übertragung englischer Lehrbücher in d deutsche Sprache noch lohnt. Wenn ja, dann sicher im vorliegenden Falle, den das 1947 in 3. Auflage erschienene Werk von J. P. DEN HARTOG, Mechanic l'ibrations, ist einzig in seiner lebendigen und anschaulichen Darstellungsa sowie in seiner im Einzelnen knappen, im Ganzen umfassenden Schau. Nachde schon die erste Auflage (1934), aus einem Kurs des Verfassers an der Desig School der Westinghouse Company hervorgegangen, von G. MESMER ins Deutsc. übertragen worden ist, war eine deutsche Bearbeitung der stark erweitert« dritten Auflage (1947) fällig, und wenn sich wiederum G. MESMER dieser Aufgaunterzogen hat, so hat er sich um so mehr Dank und Anerkennung verdient, a er nicht eine blosse Übersetzung, sondern eine Überarbeitung des englische Textes gibt. Der Originaltext erscheint darin in vielen Einzelheiten verbesse: und ergänzt, und insbesondere das Literaturverzeichnis hat durch Erweiteruunter vermehrter Berücksichtigung europäischer Autoren erheblich an Wegewonnen. H. Ziegla

Aspects of the Turbulence Problem

Survey Report

By Hans W. Liepmann, Pasadena, Calif. 1)

First Part

I. INTRODUCTION

It is an empirical fact that fluid flow at sufficiently high Reynolds numbers always turbulent. For high Reynolds numbers the velocity components u, always depend explicitly on the time t, even if the boundary conditions are independent of time. No steady flow is possible. Furthermore, $u_i(\dot{x}, t)$ is a tochastic function in space and time. These properties define turbulent flow.

Turbulence is a very general phenomenon. It exists in any type of fluid notion and appears to depend only upon a few very broad characteristics such as:

- a) The existence of nonlinear or rather quasi-linear terms in the equations of motion which represent the transport acceleration in Eulerian coordinates.
- b) The existence of a viscous damping term of an order higher than the nonlinear terms.
- c) The three-dimensionality of the motion.

The vast majority of the motions of fluids are turbulent. Consequently irbulence appears in many physical and astrophysical situations, sometimes is the prime mover and sometimes as a source of perturbation and of "noise"

a general sense.

The theory of turbulence has the aim of determining the statistical properes of $u_i(\bar{x},t)$, that is, the mean values of u_i , the probability distributions, etc. typical problem is, given the boundary or initial conditions of a flow such as ne flow from infinity past a solid body, the flow through a pipe, etc., to find ne average forces, the average velocity field and its fluctuations. In general, a coblem like this is still far from being solved. For example, it is impossible day to predict the flow in a simple diverging channel without recourse to apprical results. It is known empirically that the flow character changes dically if a certain limiting angle of divergence is surpassed. Turbulence nearly should predict this angle.

¹⁾ California Institute of Technology.

The three most conspicuous steps in turbulence research in recent years are

ZAM

- (1) The introduction of the concept of isotropic and homogeneous turbulence together with the development of a suitable formalism of description of turbulence (G. I. TAYLOR and VON KÁRMÁN).
- (2) The idea of local isotropy and the asymptotic behavior of turbulence a very high Reynolds numbers (Kolmogoroff, Onsager, and von Weizsäcker).
- (3) The discovery of the intermittent nature of turbulent shear flows (CORRSI and TOWNSEND).
- (1) defined the simplest problem in turbulence for both theoretical an experimental research. Most of the recent ideas in turbulence have develope from the study of isotropic turbulence.
- (2) is a successful attempt to obtain asymptotically valid results for the behavior of the elements of turbulence of smallest dimensions which have resulted from a cascade process from larger elements.
- (3) is the discovery of the fact that in turbulent shear flow a type of superstructure appears which influences the transport properties of turbulence decisively. The importance of intermittency has not yet been fully exploited. It probably one of the most important features of turbulent transfer problems and very likely holds the key to turbulent separation.

Besides the central problem of computing the structure of the velocity field there are at least two more general problems in turbulence research: the question of the origin of turbulence and of transition from laminar to turbulent motion is one. The other is the effect of turbulent fluctuations on the motion of rigid bodies or on the propagation of waves.

In the following no attempt is made to give a complete review of the tubulence problem. Indeed, any such attempt would require a monograpl. Instead, an attempt is made to discuss some general aspects of the turbulence problem, in particular those which are often omitted in reviews of turbulence. The important results of isotropic turbulence research are only briefly an incompletely summarized. However, for isotropic turbulence there exists at excellent recent review of Agostini and Bass [1]1) as well as a number earlier reviews [4], [6]. Stability theories and transition were omitted from the present review. The laminar stability theory can be found, for example, in the recent book of Schlichting [11] and the review articles of Pillow and Drydf [9], [5]. Thermal instability problems, which are most important for meteorlogical and astrophysical applications, have been discussed by Chandra Sekhar [41].

Only the general characteristic features of turbulent shear flow are stresse:

Consistent results on the detailed nature of turbulent shear flows have been

¹⁾ Numbers in brackets refer to the Bibliography, page 341.

obtained only recently. To summarize these recent results and interpretations in a critical manner is a difficult task. Besides the space limitations, the author has not felt competent to undertake it here. For the details of shear flow reference is made to recent work of Townsend [63], [65], Laufer [52], Rotta [59], and Klebanoff and Diehl [50].

In Section II a brief survey is given of elementary results of the theory of stationary, stochastic processes. This section is intended to introduce concepts like correlation function and power spectrum. It also provides a link between the terminology and methods in turbulence research and in the theory of stochastic processes. In Section III the response of linear systems to random forcing functions is discussed, and a number of examples are given where turbulence plays the role of the forcing function. This section is intended to indicate the variety of physical situations in which turbulence enters. The examples demonstrate that it is frequently possible to say something about the effect of turbulent fluctuations without a very detailed knowledge of the mechanism of turbulence itself. In Section IV the general problem of turbulent transfer is stressed and the concepts of local isotropy and of intermittency are discussed. Finally, a short review of isotropic, homogeneous turbulence is given in Section V.

The author wishes to express his appreciation for critical discussions with Doctors J. D. Cole, P. A. Lagerstrom, and A. Roshko which played an important part in preparing this review.

II. STATIONARY STOCHASTIC PROCESSES

As a preliminary in dealing with turbulence it is very helpful to discuss briefly some elementary results of stationary stochastic processes. For a detailed study of the subject the reader is referred to Wiener [18] and Rice [16].

1. Stochastic Function

If J(t) is a stochastic function of t, usually the time, then J for any given t is a random variable. The values of J at t_1, \ldots, t_n form the components of a random vector. The probability structure of J(t) is determined completely by the joint probability for each such random vector.

2. Mean Values

The mean values of functions of J(t) are computed from the probability distribution and hence are ensemble averages. For certain stationary processes an ergodic property exists and ensemble averages can be replaced by time averages. Averaging will be indicated by a bar over the functions.

3. Stationarity

A stochastic process is called stationary if all mean values and probability distributions are independent of the choice of the origin of t. The process is thus homogeneous in time.

4. Correlation Function, Power Spectrum

 $J(\overline{t}) = \text{constant}$ by stationarity. It is convenient to normalize and put

$$J(t) = 0. (II-1)$$

The correlation function or auto-correlation function $\varphi(\tau)$ of J(t) is defined by

$$\varphi(\tau) = \overline{J(t)} \, \overline{J(t+\tau)} = \varphi(-\tau) \, .$$
 (II-2)

In the following it will always be assumed that $\varphi(\tau) \to 0$ for large τ sufficiently rapidly to ensure the existence of the integrals defining the power spectrum $\Phi(\omega)$ and the time scale θ .

$$\Phi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \varphi(\tau) \cos \omega \, \tau \, d\tau \,, \tag{II-3}$$

$$\varphi(\tau) = \int_{0}^{\infty} \Phi(\omega) \cos \omega \, \tau \, d\omega \,, \tag{II-4}$$

$$\varphi(0) \; \theta = \int_{0}^{\infty} \varphi(\tau) \; d\tau = \frac{\pi}{2} \; \mathbf{\Phi}(0) \; . \tag{II-5}$$

(II-3) and (II-4) are often called the Wiener-Khintchine relations. In the theory of isotropic turbulence these relations were introduced independently by G. I. TAYLOR.

The assumptions made exclude periodicities in J(t) and a discrete part in the power spectrum. For the study of turbulence this appears to be a natural assumption.

5. Ergodic Property

A stochastic process is called ergodic if the ensemble averages may be computed as time averages. A sufficient condition is the existence of a time scale θ^{i} and suitable similar integrability conditions for correlations of higher order. For example, consider the time average

$$I(T) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} J(t) dt.$$
 (II-6)

I(T) is a stochastic function of T. Its mean value is equal to the mean value J(t). If it can be shown that the dispersion of I(T) becomes negligible as T becomes large then one measurement of I(T) determines its mean and hence also the mean of I(t). Since I(t) = 0 the dispersion of I(T) is given by

$$I(T)^{2} = \frac{1}{T^{2}} \int_{0}^{T} \int_{0}^{T} \overline{f(t_{1}) \ f(t_{2})} \ dt_{1} \ dt_{2} = \frac{1}{T^{2}} \int_{0}^{T} \varphi(|t_{1} - t_{2}|) \ dt_{1} \ dt_{2} \quad \text{(II-7)}$$

or

$$I(T)^{2} = \frac{2}{T^{2}} \int_{0}^{T} (T-\tau) \varphi(\tau) d\tau < \frac{2}{T} \int_{0}^{\infty} |\varphi(\tau)| d\tau.$$
 (II-8)

Hence $I(T)^2 \to 0$ as $T \to \infty$. Similarly, to compute the auto-correlation function of J(t) using the time average, an integrability condition for the quadruple correlation is needed, and so forth. In the special and important case where the mean square of a normally distributed J(t) is computed from the time average the dispersion formula becomes quite similar to (II-8). Namely, if

$$L(T) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} J^{2}(t) dt$$
 (II-9)

then

$$L(\overline{T}) - L(\overline{T})]^2 = \frac{4}{T^2} \int_0^T (T - \tau) \varphi^2(\tau) d\tau.$$
 (II-10)

The intuitive idea underlying the above reasoning is simply the following: if a time T_1 exists such that $J(t-\tau)$ is essentially independent of J(t) for $\tau \geq T_1$, then averaging over a time $T \gg T_1$ is equivalent to taking the ensemble average over n systems with

$$n \, \approx \, \frac{T}{T_1} \; . \label{eq:normalization}$$

It is interesting to compare this reasoning with the proofs for the law of large numbers (for example [14]).

6. Mean Values of the Derivatives of J(t). Spectral Moments

Differentiating (II-2) with respect to τ yields

Hence

$$\varphi''(0) = \overline{JJ''} = -J'^{2}$$
 (II-12)

and using (II-4) it follows that

$$\varphi''(0) = -\int_{0}^{\infty} \omega^2 \, \varPhi(\omega) \, d\omega \,. \tag{II-13}$$

The derivatives of the correlation function at $\tau > 0$ are thus simply related to the moments of the power spectrum. In general we have

$$\overline{(J^{(m)})^2} = \int_0^\infty \omega^{2m} \, \Phi(\omega) \, d\omega = (-1)^{2m-1} \, \varphi^{(2m)}(0) \,. \tag{II-14}$$

The existence of mean square derivatives of J thus implies the existence of the corresponding moments of the spectrum. If J has all mean derivatives then $\Phi(\omega)$ has to vanish rapidly enough for large ω to guarantee that all moments exist. This result is applied later on in arguments concerning the spectrum of turbulence.

Furthermore, it follows from (II-11) and (II-2) that

$$\overline{JJ'} = 0. (II-15)$$

J(t) and its derivative at the same time have zero correlation. The same is obviously true for any correlation between derivatives differing by one order, for example

$$J'J'' = 0$$
, etc. (II-16)

7. Probability Distribution

To define J(t) it is not sufficient to give $q(\tau)$ or $\Phi(\omega)$; it is also necessary to prescribe the probability distribution of J and the joint distributions of $J(t_1)$, $J(t_2)$, etc. It is here that an essential difference between turbulence and linear random noise lies. In the theory of random noise, Brownian motion and related topics it is often possible to assume that J(t) is normally distributed (see, for example, RICE [16] and UHLENBECK and WANG [17]).

If J and J' have a Gaussian distribution then it follows from (II-15) that: they are also statistically independent. The joint probability is the product of the distribution of J and J'

$$p_0(J) = [2 \pi \varphi(0)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{J^2}{2 \varphi(0)}\right],$$
 (II-17a):

$$p_1(J') = \left[-2\pi \, q''(0)\right]^{-1/2} \exp\left[+\frac{J'^2}{2 \, q''(0)}\right],$$
 (II-17b)

and

$$p_{01}(J, J') = p_0(J) p_1(J')$$
 (II-18)

For more general cases (II-15) does not imply (II-18). If f(t) denotes one component of the velocity fluctuations in turbulent flow, for example, it follows that because of the nonlinear terms in the equations of motion

$$(J')^{3} \neq 0. \tag{II-19}$$

Consequently J' can not have a Gaussian distribution in this case.

The application of the central limit theorem to the probability distribution of J(t) is best seen by representing J(t) as a Fourier-Stieltje's integral

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dF(\lambda), \qquad (II-20)$$

where $F(\lambda)$ is a stochastic function of λ . For stationarity it is necessary that the increments $dF(\lambda)$ be uncorrelated. This is seen by forming the correlation

$$\varphi(\tau) = \overline{J(t)} \, \overline{J(t+\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-\mu)t} \, e^{-i\mu\tau} \, \overline{dF(\lambda)} \, dF^*(\mu) \,. \tag{II-21}$$

For a stationary process thus

$$\overline{dF(\lambda)} \, \overline{dF^*(\mu)} = \overline{|dF(\lambda)|^2} \, \delta(\lambda - \mu)$$

function

$$\varphi(\tau) = \int e^{-i\lambda\tau} |\overline{dF(\lambda)}|^2.$$
 (II-22)

Comparing (II-22) with (II-4) shows that

$$\Phi(\lambda) d\lambda = |\overline{d}F(\lambda)|^2$$
. (II-23)

If in addition to being uncorrelated the increments $dF(\lambda)$ are independent one can apply the central limit theorem to (II-20), considering J(t) for any t as the limit of a sum of independent increments $\sim dF(\lambda)$. One concludes that J(t)s normally distributed. For the application of the central limit theorem it is essential that $|dF(\lambda)|^2 \sim d\lambda$.

For linear systems it is thus often possible to assume a normal distribution. This is done, for example, in problems of the shot effect, Brownian motion, and black body radiation. In homogeneous turbulence the increments $dF(\lambda)$ are incorrelated, but not independent. The central limit theorem does not apply.

8. Zeros and Extrema of a Stochastic Function

RICE [16] has obtained a formula for the number of times per unit time $N_0(\xi)$ a stochastic function J(t) passes through the value ξ . $N_0(\xi)$ can be expressed in terms of the joint probability $p_{01}(\xi, \eta)$ of the function J and its derivative J'

 $N_0(\xi) = \int |\eta| \, p_{01}(\xi, \eta) \, d\eta \,.$ (II-24)

(II-24) expresses the fact that J spends the time $p_{01}(\xi,\eta) d\xi d\eta$ between ξ and $\xi + d\xi$ having a slope in the interval $\eta, \eta + d\eta$. The crossing of the interval $d\xi$ takes the time $\tau - d\xi/|\eta|$ and hence (II-24) results for the expected number of crossings, regardless of slope. Applying (II-24) to the derivative of J an analogous result can be found for $N_1(\eta)$, etc. Specifically, $N_0(0)$ gives the expected number of zeros of J(t) per unit time, $N_1(0)$ the expected number of extrema.

(II-24) is important when one is interested in the number of times J reaches or exceeds a certain value ξ rather than the length of time ξ is exceeded. Structural fatigue problems are typical problems of this type.

For a double Gaussian distribution $N_0(0)$ is easily expressed as:

$$N_0(0) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{J'^2}{J^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\overline{\omega^2}} .$$
 (II-25)

Consider for the moment f as a velocity component, the independent variable f as a space variable, and ω as a wave number in space. Viscous dissipation of a wave in hydrodynamics is proportional to the square or mean square of the wave number. (II-25) can then be interpreted in the following way: the mean viscous dissipation of a one-dimensional, Gaussian, stochastic velocity field is equal to the dissipation of a harmonic wave having the same average number of zeros.

For a non-Gaussian process like turbulence (II-25) is not exactly correct. Measurements [91] show that the dissipation in turbulence is larger than the harmonic wave with an equal number of zeros. This is apparently due to the fact that the nonlinearity introduces a saw tooth character into the fluctuations. For the same number of zeros, the dissipation is then larger.

Mathematically it means that $p_{01}(\xi, \eta)$ is not the product $p_0(\xi)$ $p_1(\eta)$ and not double Gaussian. The step from (II-24) to (II-25) can not be made.

9. Generalization to Homogeneous Fields in More Than One Dimension

In the study of homogeneous turbulence, vectors or tensors that are stochastic functions of vectors are needed. The concept of power spectrum and correlation function is easily extended. For example, to study isotropic, homogeneous turbulence, von Kármán introduced the correlation tensors of various ranks. The correlation tensor $\varphi_{ij}(\vec{r})$, for example, is defined in terms of thevelocity components u_i at two points $P_1(\vec{R})$ and $P_2(\vec{R}+\vec{r})$ by

$$\varphi_{ij}(\vec{r}) = \overline{u_i(\vec{R}) \ u_j(\vec{R} + \vec{r})} \ . \tag{II-26}$$

Generalizing (II-3) and (II-4) we have

$$\Phi_{ij}(\vec{K}) = \frac{1}{8 \pi^3} \int d\vec{r} \, \varphi_{ij}(\vec{r}) \, e^{-i \vec{K} \vec{r}}, \quad \varphi_{ij}(\vec{r}) = \int d\vec{K} \, \Phi_{ij}(\vec{K}) \, e^{+i \vec{K} \vec{r}}. \quad (\text{II-27})$$

There is no difficulty in extending this generalization further to tensors of higher rank and with more independent variables. In the following, for example, the will be useful to consider correlation tensors in space and time. In this case \vec{r} and \vec{K} are four-dimensional vectors.

In general, all properties of stationary processes, that is, processes that are comogeneous in time can be generalized to random fields which are homogeneous in space or in space and time. In dealing with homogeneous fields we will thus be ble to use an ergodic property under similar conditions to those in Section II. 51). Evidently relations similar to (II-12), (II-13), and (II-14) hold by virtue of II-27) and suitable generalizations.

III. TURBULENCE EFFECTS UPON LINEAR SYSTEMS

In the following the response of linear systems to random forcing functions rising from turbulent fluctuations will be discussed. Turbulence acts as a andom forcing function in a large variety of physical situations ranging from ne motion of an airplane in gusty air to the scintillation of stars. Furthermore, ne process of measuring turbulent fluctuations by means of a hot-wire anemoteter or any other probe consists essentially in measuring the response of a retem upon which the turbulent fluctuations act as an impressed force.

Broadly speaking, turbulent fluctuations will have similar effects for large ale phenomena as molecular fluctuations have for small scale phenomena, ence one encounters macroscopic phenomena similar to Brownian motion, ayleigh type scattering for radio waves, etc. In the measuring process, twever, the phenomena encountered in turbulence differ from similar obsertions on molecular structures. For turbulence measurements it is possible principle to keep the fluctuations within the measuring apparatus itself gligibly small. A separation between the measuring instrument and the actuations can be realized here. On the other hand, we are interested in much pre detailed information concerning the fluctuations than is the case in most colecular fluctuation phenomena.

1. Use of the Correlation Functions and Power Spectra

We will assume in general that the fluctuations are homogeneous in time 1 space. Exceptions will be noted explicitly.

¹⁾ Actually, it is possible in this case to compute ensemble averages by averaging over one error coordinate only.

The correlation function appears in the discussion of the response of system, due to the use of an integral representation and the averaging process In one dimension let

$$v(T) = \int_{0}^{T} f(t) dt, \qquad (III-T)$$

then

$$v^{2}(T) = \int_{0}^{T} \int_{0}^{T} \overline{f(t) f(t')} dt dt'.$$
 (III-2)

Because of homogeneity

$$f(t) f(t') = \varphi(t - t')$$

where q denotes the correlation function or "auto-correlation function" of Since q depends only upon |t-t'| the integral can be reduced to a single it tegral

$$v^2 = 2 \int_0^T (T - \eta) \varphi(\eta) d\eta. \qquad (III-$$

(III-3) has two limiting cases which are often useful. $\varphi(\eta)$ may be nearly equate $\varphi(0) + f^2$ in the interval (O, T). That is, the correlation extends for longitudes. Then

$$\tau^2(T) = f^2 T^2 \qquad (T \ll \theta) \qquad (III-$$

or else φ may drop to zero in a time $T_1 \ll T$. In this case put

$$\varphi(\eta) = \theta \ \delta(\eta) \ f^2 \qquad (\theta \sim T_1)$$

where δ is the Dirac delta-function. Then

$$v^2(T) = 2 \overline{f^2} T \theta$$
. $(T \gg \theta)$ (III-

Equations (III-4) and (III-5) are, of course, well known in diffusion theory $v^2(T)$ is interpreted as the mean square displacement of a particle at the time T and $\overline{f^2}$ its mean square velocity. In this case the velocity is homogeneous time, the displacement not. Similar results can be written immediately space or in space and time.

2. Linear Langevin-Type Equations

Consider now a linear operator \mathfrak{L}_{ij} (for example, corresponding to a system of partial differential equations). Let $v_i(\vec{x})$ denote a vector field, $f_i(\vec{r})$ a force

nction

$$\mathfrak{Q}_{ij}(v_j) = f_i \,. \tag{III-6}$$

or a stochastic f_i . (III-6) is a generalized Langevin equation. For an infinite omain

$$v_{j}(\vec{x}) = \int d\vec{s} \, \gamma_{jl}(\vec{s}) \, f_{l}(\vec{x} + \vec{s}) \,, \tag{III-7}$$

here $\gamma_{il}(\vec{s})$ denotes the fundamental solution of (III-6). For homogeneity it is constant coefficients in \mathfrak{L}_{ij} .

From (III-7) we obtain the mean square v_{ii} or the correlation $v_{ij}(\hat{r})$ exactly in the simplest case given above (III-2). Thus

$$\overrightarrow{v_i(\vec{x}+\vec{r})} \ \overrightarrow{v_i(\vec{x})} = \iint d\vec{s} \ d\vec{s'} \ \gamma_{il}(\vec{s}) \ \gamma_{jm}(\vec{s'}) \ f_l(\vec{x}+\vec{r}+\vec{s}) \ \overrightarrow{f_m(\vec{x}+\vec{s'})} \ . \ \ (\text{III-8})$$

this way the correlation function of the response v_{ij} can be expressed in rms of the correlation function of the forcing function f_{lm} :

$$v_{ij}(\mathbf{r}) = \int \int d\vec{s} \, d\vec{s}' \, \gamma_{il}(\vec{s}) \, \gamma_{jm}(\vec{s}') \, f_{lm}(\vec{r} + \vec{s} - \vec{s}') \,. \tag{III-9}$$

troducing the power spectrum tensors, V_{ij} and F_{ij} , of v_{ij} and f_{ij} , and Γ_{ij} fined by¹)

$$\Gamma_{ij}(\vec{K}) = \int d\vec{s} \, \gamma_{ij}(\vec{s}) \, e^{-i \, \vec{K} \, \vec{s}}$$
 (III-10)

have

$$V_{ij}(\vec{K}) = \Gamma_{il}(\vec{K}) \ \Gamma_{jm}^*(\vec{K}) \ F_{lm}(\vec{K}) \ . \tag{III-11}$$

nd \vec{K} do not need to be three-dimensional vectors. If \mathfrak{L}_{ij} includes time derivves \vec{r} will include time as one variable and \vec{K} the time angular frequency ω . \mathfrak{L}_{ij} does not involve time derivatives, time enters into the problem as an ternal parameter only. In this case (III-11) can be written with a three-nensional k

$$V_{ij}(\vec{k}, t) = \Gamma_{il}(\vec{k}, t) \Gamma_{jm}^{*}(\vec{k}, t) F_{lm}(\vec{k}, t)$$
 (III-12)

I-12) is similar to the equations given recently by UBEROI and KOVASZNAY] in slightly different terminology and derivation.

Equation (III-11) is the generalization of the relation linking the power ctrum $\Phi(\omega)$ of a forcing function f(t) to the power spectrum of a response . In the latter case we have simply

$$V(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 \Phi(\omega)$$
 (III-13)

¹⁾ The Γ_{ij} are used in Zeilon's construction of the fundamental solution. See for example: NK and VON MISES, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Vol. 1. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1930), p. 865.

where $|\Gamma(\omega)|^2$ denotes the absolute square of the admittance of the circular or operator linking v(t) to f(t). Similarly $\Gamma_{ij}(\vec{K})$ enters into the relation between Γ_{ij} and F_{ij} , the corresponding power spectrum tensors. Γ_{ij} is obtained from the operator \mathfrak{L}_{ij} in exactly the same way as the complex admittance is a tained from a one-dimensional operator: $\partial/\partial x_j$ is replaced by ιK_j in \mathfrak{L}_{ij} .

In general, problems involving boundaries of the region are more compared. As an example, let \mathfrak{L}_{ij} include time derivatives. Some interesting situations lead to the problem where a forcing function $f_i(\vec{x}, t)$ which is homogeneous space is switched on at time t = 0. The space correlation tensors $v_{ij}(\vec{r}, t)$ to be computed as functions of time. An example of this type will be discussilater on.) We have

$$\mathfrak{Q}_{ij}(v_j) = f_i \quad (t \ge 0) , \quad f_j , v_j = 0 \quad (t < 0) . \tag{III-1}$$

Then

$$v_{j}(\vec{x},t) = \int d\vec{s} \int_{0}^{t} d\sigma \, \gamma_{jl}(\vec{x} - \vec{s}, t - \sigma) \, f_{l}(\vec{s}, \sigma)$$
 (III-

or

$$v_{ij}(\vec{r},t) = \int \int d\vec{s} \, d\vec{s}' \times \int_{0}^{t} d\sigma \, d\sigma' \, \gamma_{il} \, (\vec{s},t-\sigma) \, \gamma_{jm} \, (\vec{s}',t-\sigma') \, f_{lm}(\vec{r}+\vec{s}-\vec{s}',\sigma-\sigma') \, .$$
 (III-

The relation for the spectral tensors becomes

$$V_{ij}(\vec{k},t) = \int_0^t \int_0^t d\sigma \, d\sigma' \, \Gamma_{il}(\vec{k},t-\sigma) \, \Gamma_{jm}(\vec{k},t-\sigma') \, F_{lm}(\vec{k},\sigma-\sigma') \, . \quad (\text{III-} \vec{k},\sigma') \, = \int_0^t \int_0^t d\sigma \, d\sigma' \, \Gamma_{il}(\vec{k},\tau') \, d\sigma' \, \Gamma_{il}(\vec{k},\tau') \, . \quad (\text{III-} \vec{k},\sigma') \, \Gamma_{il}(\vec{k},\sigma') \, . \quad (\text{III-} \vec{k},\sigma') \, . \quad (\text$$

Thus in this type of problem it is necessary to know the space-time correlat of the forcing function even if only the space correlation of the response desired.

3. Some Typical Examples

(A) Hot-Wire Anemometer

Equation (III-6) describes the process of measurement of fluctuating proposed in most instances. An elementary case is the response of a hot-wave anemometer exposed to the fluctuating velocity u(t). Here the voltage satisfies the approximate equation

$$M \frac{dv}{dt} + v = c u(t), \qquad (III-)$$

here M denotes the so-called time constant of the hot-wire and c its sensitivity, ence, the observation of the mean square voltage fluctuation yields

$$v^2 = c^2 \int_0^\infty \frac{\Phi_1(\omega)}{1 - M^2 |\omega|^2} d\omega, \quad u^2 = \int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega. \quad (III-19)$$

The so-called compensation method of hot-wire anemometry (DRYDEN and TETHE [25]) consists in removing the factor $1 - M^2 \omega^2$ from (III-19) by a cond properly chosen linear circuit. Let v(t) denote the output of this second cuit

$$\mathfrak{L}(\Gamma) = v$$
.

en $\mathfrak L$ has to be chosen such that $|I'(\omega)|^2=1+M^2\,\omega^2$. Then

$$V^2 \approx u^2$$
.

r spectral measurements $\Gamma(\omega)^{-2}$ has to possess a very sharp maximum for, $\omega = \omega_0$. If a circuit possesses this quality, (III-13) gives for the mean rare response

$$v^2 = f(\omega_0) \int |\varGamma(\omega)|^2 d\omega$$
 .

If the scale of the fluctuations is not very large compared to the wire gth we have to take into account that the wire averages over its length l. nce the wire does not measure u(t) but rather

$$U(t) = \frac{1}{l} \int_{0}^{l} u(t, z) dz.$$
 (III-20)

only the mean square of *u* is required, or certain moments of the spectrum, corrections are easily obtained. For example, we have in homogeneous bulence (III-3)

$$U^{2} = \frac{2}{l^{2}} u^{2} \int_{0}^{l} (l-z) \varphi(z) dz.$$
 (III-21)

short wires $\varphi(z)$ can be developed in powers of z and introducing the called microscale λ of isotropic turbulence, we find

$$\overline{U^2} = \overline{u^2} \left[1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{l^2}{\lambda^2} + \cdots \right].$$

a very long wire we may apply the equivalent of (III-5) and find

$$U^2 - 2u^2 \frac{1}{l}$$
,

re Λ now corresponds to the integral scale of turbulence.

For the measurements of spectrum and correlation functions the leng corrections are considerably more involved. UBEROI and KOVASZNAY [33] has recently given a general approach to the problem using equations equivale to (III-11) or (III-12). They found the correction for wire length in the measurement of the one-dimensional spectrum of isotropic turbulence:

$$G_1(k_1) = \frac{l^2}{4} \int\limits_{k_1}^{\infty} W\left(\frac{l}{2} \sqrt[4]{k^2 - k_1^2}\right) \frac{E(k) (k^2 - k_1^2)}{k^3} dk$$
, (III-2)

where $\mathcal{G}_1(k_1)$ denotes the one-dimensional power spectrum as measured with wire of length l. E(k) is the three-dimensional spectrum, $k= l^{'}k_1^2-k_2^2-k_1^2$ and W a function defined by

$$W(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \frac{dy}{\sqrt{x^3 - y^3}}.$$
 (III-2)

In [33], W(x) is plotted and several special cases are discussed. An intesting result is obtained if the true spectrum is assumed to be of the form k. In this case it is shown that the measured spectrum at high frequencies approaches the form $k_1^{(n-1)}$. This is an important result with respect to comparisof spectrum measurements with theoretical results concerning the form of spectra where the exponent n is often of primary concern.

(B) The Effect of Turbulence Upon the Propagation of Waves

Turbulence in the atmosphere, in wind tunnels, etc. will cause fluctuation in the refractive index for the propagation of waves. The velocity fluctuation themselves as well as the temperature fluctuations will amount to variation in the propagation velocity for sound waves while the fluctuations in dens and temperature will cause fluctuations in the refractive index for election magnetic radiation. Problems of this type have become rather important recent years and a number of investigations have been carried out ([20] to [2 [27], [29] to [32]). Here a few typical effects will be discussed. We have: distinguish between two types of problems: the effect of the fluctuations m appear mainly as a "noise problem", that is, the interest may lie in the primi signal while turbulence causes mainly a disturbance and diffusion of this sign Or else the disturbance in a primary signal or wave may be used to obta information about the turbulence pattern itself. Especially simple cases oc: when either the wave length of the radiation is small compared to the so of turbulence and geometrical optics applies, or the scale of turbulence small compared to the wave length and we deal with a problem in diffracti

The Passage of a Light Ray Through a Turbulent Boundary Layer

As a simple problem consider the diffusion of a ray of light which traverses boundary layer of thickness δ . Assume the incident ray normal to the layer, a the direction α . Within the layer the refractive index n is assumed to be of the form

$$n = n_0(x) [1 + n_1(z, y, z, t)], \quad \overline{n} = n_0(x).$$
 (III-24)

he unit vector \vec{s} in the direction of the light ray can be written

$$\vec{s} = \vec{l_1} + \vec{\alpha}$$
, $\vec{\alpha} \vec{l_1} = 0$.

or small n_1 and $\vec{\alpha}$ it follows from the geometrical optical equation:

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dx} = -\frac{1}{n_0} \cdot \frac{dn_0}{dx} \vec{\alpha} + \nabla_2 n_1, \qquad (III-25)$$

iere

$$\nabla_2 n_1 \equiv \nabla n_1 - \frac{\partial n_1}{\partial x} \dot{l_1}.$$

II-25) corresponds to diffusion in a field of force. The force field is due to be mean gradient of n. Here n_1 is homogeneous in space and time. $\vec{\alpha}$ is homogeneous in time, but not in space. Integrating, squaring and averaging of II-25) yields

$$\alpha^{2} = [n_{0}(\delta)]^{-2} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\delta} n_{0}(x) \ n_{0}(\xi) \ (\nabla_{2} \ n_{1})_{x} \ (\nabla_{2} \ n_{1})_{\xi} \ dx \ d\xi \ . \tag{III-26}$$

he ray is assumed to enter at x=0. For homogeneous turbulence of a scale .1 th $A/\delta \ll 1$ and with $(\partial n_1/\partial y)^2 = (\partial n_1/\partial z)^2$ this yields

$$\alpha^2 = 4 n_1^2 \frac{\delta}{\Lambda} \cdot \frac{1}{\delta} \int\limits_0^\delta \left(\frac{n_0(x)}{n_0(\delta)} \right)^2 dx. \tag{III-27}$$

(III-26) applies, for example, to the effect of "noise" caused by wind tunnel rbulence upon the performance and ultimate resolution of a schlieren system d similar problems with electromagnetic waves or sound.

Optical Measurement of Turbulence

KOVASZNAY [26] has shown that a shadowgraph taken of a field of turbulent nsity fluctuations can be used to determine the correlation function of the nsity fluctuations.

Assume a shadowgraph is taken at $x \to 0$ of a layer extending from $x \to 0$ x = l. The relative light intensity distribution h(y, z) on the plate is related

to the refractive index n by

$$h(y,z) = \operatorname{const} \int_{0}^{t} \nabla_{2}^{2} n \, dx, \qquad (III-28)$$

where

$$\nabla^{\frac{2}{2}} = \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}.$$

Kovasznay prepares two identical photographic slides. From the transparence of these two plates placed face to face he obtains the correlation function h_{r_2} by displacing one with respect to the other. From (III-28) then follows,

$$h_{\eta\zeta} = h(y,z) h(y+\eta,z+\zeta) = \text{const} \int_{0}^{\infty} \left[\nabla_{2}^{2}(n) \right]_{x,y,z} (\nabla_{2}^{2}n)_{\xi,y+\eta,z+\zeta} dx d\xi.$$
(III-2d)

For small scale isotropic and homogeneous turbulence Kovasznav finds, for example, that the three-dimensional spectrum of the refractive index fluctuations E(k) is related to the measured correlation function from the photograph by

$$k^{2} E(k) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} r \, \beta(r) \, J_{0}(k \, r) \, dr$$
 (III-30)

where $\beta(r) = h_{\xi,\eta} - h_{0,0}$, and J_0 is the Bessel function of the first kind an of zero order.

Dipole Scattering of Electromagnetic Waves [21]

The dipole moment $\vec{\pi}$ of a volume v due to an electric field strength E and a fluctuation in the dielectric constant D is given by

$$\pi(t) = \int_{\vec{v}} D(\vec{x}, t) \vec{E}(\vec{x}, t) d\vec{x}.$$

The scattered radiation becomes proportional to

$$\overline{|\pi|^2} = \int \int \overrightarrow{D(x,t)} \ \overrightarrow{D(x',t)} \ \overrightarrow{E(x,t)} \ \overrightarrow{E(x',t)} \ \overrightarrow{dx} \ \overrightarrow{dx'}. \tag{III-3}$$

 π^2 can thus be expressed in terms of the correlation function of D and relate to turbulent density fluctuations. Specifically, for fluctuations with a lengt scale Λ small compared with the wave length of the radiation and which varishowly in time we can put

$$D(\overrightarrow{x},t) D(\overrightarrow{x}',t) = \overline{D^2} \Lambda^3 \delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}')$$
 (III-3.

nd hence

$$\pi^2 = E^2 \Lambda^3 v D^2$$
 (III-33)

quivalent to Rayleigh scattering from very small scatterers.

In more general terms, scattering due to turbulent fluctuations of the efractive index can be put into the form of (III-6) by considering the Maxwell quations with a refractive index involving a small time and space dependent perturbation. The perturbation terms are then considered the forcing function III-6).

Thus, again writing n_1 for the fluctuation in refractive index we have, for xample, the equation for \vec{E}

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 2 \frac{n_1}{c^2} n_0^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla (\vec{E} \nabla n_1). \qquad (III-34)$$

Vriting $\vec{E} = \vec{E_0} - \vec{e}$ where \vec{e} denotes a small perturbation due to the presence f the fluctuations n_1 , (III-34) can be brought in the form of (III-6)

$$\mathfrak{L}(e_i) = f_i \tag{III-35}$$

rith

$$f_i = \frac{2 n_1}{c^2} n_0^2 \frac{\partial^2 E_{0i}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} (E_0 \nabla n_1)$$

nd the general formalism outlined above applies to the approximate system II-35).

Production of Sound by Turbulence

Turbulent fluctuations in an incompressible fluid represent pure shear otion or transversal waves. In a compressible fluid the longitudinal pressure aves and the transversal shear waves are coupled and hence a turbulent eld will be coupled with a sound field. The feeding of energy from turbulence to sound is a very important problem of turbulence in high-speed and pecially supersonic flows. Indeed, probably the only important difference of rbulent motion at high speeds as compared to low-speed turbulence is this upling with a longitudinal pressure field. The problem of sound production om turbulent fluctuations has recently been attacked in a general way by GHTHILL [30]. In this problem the forcing function in the sound wave equans comes from the turbulent, Reynolds stresses. The equation discussed by GHTHILL is

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} - a^2 \, \mathbf{1}^{-2} \, \varrho = \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_i \, \partial x_j} \,,$$

here ϱ denotes the density of the fluid and a the velocity of sound. τ_{ij} is a ress tensor, to which the largest contribution comes from the turbulent actuations.

The radiated acoustic power then involves correlations of the derivatives of τ_{ij} . It is interesting to note that Lighthill is able to make reasonable predictions for the dependence of the radiative power on velocity of the flow, Macli number, etc. without a detailed knowledge of the turbulent stresses.

(C) The Effect of Turbulence Upon the Motion of Solid Bodies

A falling rain drop, an airplane moving in gusty air, smoke stacks in the wind, etc. execute on a macroscopic scale a type of motion analogous to Brownian motion in small scale. There are, however, essential differences mainly due to frequency characteristics of the forcing function as compared to the proper frequencies of the systems. In Brownian motion and related phenomena we mostly assume a white power spectrum of the fluctuating force. A white spectrum is equivalent to a δ -function for the correlation function. It has been seen above how much the formalism is simplified if the correlation length or time is short compared to the characteristic dimensions of the system Another great simplification in Brownian motions results from the fact that the probability distribution can be assumed normal or simply related to a normal distribution. In turbulence this is often not even a good approximation. Finally the forcing function and the damping in Brownian motion result from the same general molecular mechanism. Any dissipation appears in heat and thus in the forcing function. This fact is material in the trend toward equipartion of energy In the turbulent counterpart to Brownian motion the forcing function and the damping may involve quite different mechanisms. The dissipated kinetic energy of a fluctuating rigid system may go directly into heat or may pass through a stage of turbulence. Only the latter case is closely similar to Brownian motion.

Consider, for example, an airplane moving through gusty air as a system under the influence of a random forcing function. Then it is clear that the system is sensitive mainly to a medium range of frequencies of gusts. The very slow gusts are counteracted by the pilot while the very rapid gusts are averaged out by the size of the plane. Hence, a problem like this corresponds to the behavior of a system, which has a generalized admittance which vanishe for very small and very high wave numbers, in a field of forces characterized by a specific generalized power spectrum. So far the state of turbulence in the atmosphere has not been known with sufficient accuracy and in sufficient detail to provide the necessary information for treating such a problem. Much progress has been made in the last few years. In some recent investigations the response of an airplane was actually used to obtain the spectrum of turbulence in the atmosphere [24]. Measurements like these correspond roughly to, say-KAPPLER's determination of the Avogadro number from the Brownian motion of a torsional balance.

In the example of the airplane it is obviously of great importance to know also the probability distribution of the atmospheric turbulence as well as the "filtered" distribution function of, say, the stress at some part of the structure resulting from the gusts. Even if the systems considered are assumed linear this problem is by no means trivial. For structural fatigue considerations we require also the number of reversals of a given load, a problem related to the number of zeros or extrema of a random function.

(D) The Effect of Turbulence of a Conducting Fluid on a Magnetic Field

Isotropic, homogeneous turbulence in a conducting fluid and its influence on a magnetic field H has been the subject of several recent studies ([19] and [23]). In these studies the approximate equations governing the behavior of a magnetic field in a moving conductor are usually put into a form similar to the KÁRMÁN-HOWARTH equation in turbulence (Section V). The statistical properties are then discussed along the lines of isotropic turbulence theory. Here a different problem is discussed. The approximate equations for the magnetic field H in a turbulent conducting fluid with conductivity σ and permeability m are

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \lambda \nabla^2 \vec{H} = \operatorname{curl}(\vec{u} \times \vec{H})$$
 (III-37)

here $\lambda = (4\pi \mu \sigma)^{-1}$ and u(x,t) is the turbulent velocity field. H is assumed zero for $t \leq 0$. At t = 0 a constant field H_0 is switched on. The perturbation field $H = H = H_0$ due to the turbulence will be studied. Here we deal with a typical example for which the operator includes a time derivative and where a homogeneous forcing function is switched on at t = 0. Choosing $H_0 \parallel x_1$, we have, since div u = 0

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} - \lambda \, \Gamma^2 \, h_i = H_0 \, \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = f_i \, H_0. \tag{III-38}$$

From (III-17) we obtain the following equation for the spectral tensor of $h,\,H_{ij}$

$$H_{ij}(\vec{k},t) = H_0^2 \int_0^t \int d\sigma \, d\sigma' \, \Gamma(k,t-\sigma) \, \Gamma^*(k,t-\sigma') \, F_{ij}(\vec{k},\sigma-\sigma') \, . \quad \text{(III-39)}$$

 $\Gamma(k, t)$ is the space Fourier transform of the fundamental solution $\gamma(\vec{x}, t)$ ilefined by

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - \lambda \nabla^2 \gamma = \delta(\vec{x}) \delta(t) , \quad \gamma(0) = 0 . \tag{III-40}$$

hus

$$\Gamma(k,t) = e^{-\lambda k^2 t} \,. \tag{III-41}$$

(III-39) becomes

$$H_{ij}(\vec{k},t) = H_0^2 \int_0^{\cdot} \int d\sigma \, d\sigma' \, e^{-\lambda k^2 (2t-\sigma-\sigma')} \, F_{ij}(\vec{k},\sigma-\sigma')$$
 (III-42)

or

$$H_{ij}(\overrightarrow{k},t) - 2H_0^2 \frac{e^{-\lambda k^2 t}}{\lambda k^2} \int_0^t \sinh(\lambda k^2 \sigma) F_{ij}(\overrightarrow{k},t-\sigma) d\sigma. \qquad \text{(III-43)}$$

 F_{ij} is the space Fourier transform of the space-time correlation f_{ij} . The space time correlation tensor of $\partial u_i/\partial x_1$ does not appear to be easy to write down in general. Thus, only two limiting simple cases are considered here. If

$$F_{ij}(\vec{k}, t) = F_{ij}^{(1)}(\vec{k}) T \delta(t)$$
 (III-44)

ZAMP

then

$$H_{ij} = H_0^2 F_{ij}^{(1)}(\vec{k}) \frac{T}{\lambda k^2} \left[1 - e^{-2\lambda k^2 t} \right].$$
 (III-45)

If

$$F_{ij}(\vec{k}, t) = F_{ij}^{(1)}(\vec{k})$$
 (III-40)

then

$$H_{ij} = H_0^2 F_{ij}^{(1)}(\vec{k}) \ \frac{1}{\lambda^2 \ k^4} \ [1 - e^{-\lambda k^2 t}]^2 \ . \ \ (\text{III-47}$$

These two extreme cases differ in the characteristic time; in (III-45) the time scale of the forcing function enters while in (III-47) the only characteristic time is λk^2 . Both are proportional to $F_{ij}(\vec{k})$ which is related to the spectrum tensor $\Phi_{ij}(\vec{k})$ of isotropic homogeneous turbulence (see Section IV) by

$$F_{ij}(\vec{k}) = k_1^2 \, \Phi_{ij}(\vec{k}) \,. \tag{III-48}$$

The magnetic field increases with time and the perturbation reaches a stead state provided of course that the turbulence is kept up by an external agen. The ultimate magnetic energy in the perturbation and the spectral distribution depends upon the space and time correlation of the turbulence.

In the cases studied by Batchelor [19] and Chandrasekhar [23] thincrease and steady state of a weak random field is discussed. The compariso of their results with (III-42); etc. is therefore not directly possible. The mechanism responsible for the increase in field strength is, however, the same.

BIBLIOGRAPHY1)

I. General

- 1 AGOSTINI, L., and BASS, I., Les Théories de la Turbulence, Publ. sci. techn. Minist. Air, Paris (1950).
- 2 BATCHELOR, G. K., Recent Developments in Turbulence Research, Proc. VIIth int. Congr. appl. Mech., London (1948).
- 3 CHUANG, F. K., COLE, J. D., and ROSHKO, A., On the Statistical Theory of Turbulence, Final Report NACA Contract NAw-5777, Calif. Inst. Techn. (1951).
- 4 CUMMING, BETTY L., A Review of Turbulence Theories, Australian Council sci. and indust. Res., Report No. ACA-27 (1946).
- 5 DRYDEN, H. L., Some Recent Contributions to the Study of Transition and Turbulent Boundary Layers, NACA T. N. 1168 (1947).
- 6 DRYDEN, H. L., A Review of the Statistical Theory of Turbulence. Quart. appl. Math. 1, 7 (1943).
- 7 GOLDSTEIN, S. (Ed.), Modern Developments in Fluid Dynamics (Oxford University Press, 1938).
- NARMAN, TH. VON, and LIN, C. C., On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence, in: Advances in Applied Mechanics, Vol. II (Academic Press, New York, 1951).
- 9 PILLOW, A. F., A Review of Hydrodynamical Stability and its Bearing on Transition to Turbulent Flow in the Boundary Layer, Australian Council sci. and indust. Res., Report A-35 (1945).
- 10" "Problems of Cosmical Aerodynamics", Proceedings of the Symposium on the Motion of Gaseous Masses of Cosmical Dimensions, Paris (1949). Central Air Document Office, Dayton, Ohio (1951).
- 11] SCHLICHTING, H., Grenzschicht-Theorie (G. Braun, Karlsruhe, 1950).

Part II

- 12 CHANDRASEKHAR, S., Stochastic Processes in Physics and Astronomy, Rev. modern Phys. 15, 1 (1943).
- 13 Cramer, H., Mathematical Methods in Statistics (Princeton University Press, 1951).
- 14] FELLER, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications (John Wiley & Sons, New York, 1950).
- 15] KAMPÉ DE FÉRIET, J., Le tenseur spectral de la turbulence homogène non isotrope dans un fluide incompressible, C. r. Acad. Sci. Paris 227, 760 (1948).
- [16] RICE, S. O., Mathematical Analysis of Random Noise, Bell Techn. J. 23, 282 (1944); 24, 46 (1945).
- [17] WANG, M. C., and UHLENBECK, G. E., On the Theory of Brownian Motion, Rev. modern Phys. 17, 323 (1945).
- [18] Wiener, N., Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series (John Wiley & Sons, New York, 1950).
- 1) No attempt is made to include a complete list of references. It is hoped, however, that the ist of references gives a representative survey of recent work in turbulence. The references are arranged according to the parts of the paper.
- Many of the American papers are published by the National Advisory Committee for Aeronaucics (NACA), Washington, D.C.; T.N. and T.R. refer to "Technical Note" and "Technical Report"
- of the Committee respectively. The notes and reports are available from the NACA.

Part III

- [19] BATCHELOR, G. K., On the Spontaneous Magnetic Field in a Conducting Liquid in Turbulent Motion, Proc. Royal Soc. [A], 201, 405 (1950).
- [20] Bergmann, P. G., Propagation of Radiation in a Medium with Random Inhomogeneities, Phys. Rev. 70, 486 (1946).
- 211 BOOKER, H. G., and GORDON, W. E., A Theory of Radio Scattering in the Troposphere, Proc. Inst. Radio Eng. 38, 401 (1950).
- 22] CHANDRASEKHAR, S., A Statistical Basis for the Theory of Stellar Scintillation, Proc. Royal Astron. Soc. (in press).
- [23] CHANDRASEKHAR, S., The Invariant Theory of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics, Proc. Royal Soc. [A] 204, 435 (1950); 207, 301 (1951).
- [24] CLEMENTSON, G. C., An Investigation of the Power Spectral Density of Atmospheric Turbulence, Ph. D. Thesis, Mass. Inst. Techn. (1950).
- [25] DRYDEN, H. L., and KUETHE, A. M., The Measurement of Fluctuations of Air Speed by the Hot-Wire Anemometer, NACA T. R. 320 (1929).
- [26] KOVASZNAY, L. S. G., Technique for the Optical Measurement of Turbulence in High Speed Flow, Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. (ASME), Berkeley, Calif. (1949).
- [27] LIEBERMANN, L., Effect of Temperature Inhomogeneities in the Ocean on the Propagation of Sound, J. acoust. Soc. 23, 563 (1951).
- [28] LIEPMANN, H. W., On the Application of Statistical Concepts to the Buffeting Problem, J. aeron. Sci. (1952) (in press).
- [29] LIEPMANN, H. W., The Deflection and Diffusion of a Light Ray Passing Through a Boundary Layer, Douglas Aircraft Co., Inc., Report SM-14397 (1952).
- [30] LIGHTHILL, M. J., On Sound Created Aerodynamically, I: General Theory Proc. Royal Soc. [A], 211, 564 (1952).
- [31] PEKERIS, C. L., Note on Scattering in an Inhomogeneous Medium, Phys. Rev 71, 268 (1947).
- [32] OBUKHOV, A., Über die Schallstreuung in der turbulenten Strömung, C. r. Doklady U. S. S. R. 30, 616 (1941).
- [33] UBEROI, M. S., and KOVASZNAY, L. S. G., Influence of Resolving Power on Measurement of Correlations and Spectra of Random Fields, Project Squid Techn. Report 30 (1952) Johns Hopkins University.

(Received: July 7, 1952.)

(To be continued in ZAMP III/6)

Vol. III, 1952

Impulsive Motion of an Infinite Plate in a Viscous Compressible Fluid¹)

By Milton D. van Dyke, Pasadena, Calif.2)

1. Introduction

One of the standard solutions of incompressible viscous flow is the motion due to an infinite flat plate impulsively started moving in its own plane with uniform velocity. Admitting compressibility greatly complicates this simple problem. Viscous dissipation heats the fluid, producing pressure and density gradients and velocities normal to the plate which culminate in a receding shock wave.

One method of attacking this problem is to linearize the equations of motion for small values of the Mach number M. This approach, initiated by LAGER-STROM, COLE, and TRILLING [1]³), was generalized and carried to fruition by HOWARTH [2], who succeeded in calculating values of the pressure on the plate. The method yields a perturbation field proportional to M^2 , and perhaps represents the first step of a series solution in powers of M^2 . HOWARTH also investigated the initial stages of the motion using the full equations.

Another method of attacking the problem is to start with the boundary ayer approximation, which is useful for large time. The resulting solution is not limited to small M^2 , but is valid for arbitrarily high Mach numbers provided the time elapsed since the start of the motion is correspondingly large. Illingworth [3] has given the boundary layer solution, and Stewartson [4] has also wriefly discussed its effect upon the outer flow field.

In the present paper the boundary layer solution is improved in a systemtic manner. The procedure involves alternately iterating upon the boundary ayer solution in the boundary layer and upon the acoustic solution in the uter flow field. The two solutions are matched at the outer edge of the boundry layer by comparing their asymptotic expansions. For simplicity, the asumptions are made of Prandtl number equal to 1, linear variation of viscosity

Research prepared under Office of Naval Research Contract N 6 ONR-244, Task Order III, Project NR 061-036.

²) Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology. At present, eronautical Research Scientist, N.A.C.A. Ames Aeronautical Laboratory, Moffett Field, Calirnia

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 353.

with enthalpy, and an insulated plate. The results complement Howarth's solution, and agree with it in the region of common validity. The third approximation is carried out in detail. Interaction between the boundary layer and the outer flow field is found to reduce the skin friction.

The author is indebted to P. A. LAGERSTROM, who suggested the problem and guided the present study, and to Lester Lees, who offered helpful criticism.

2. Transformation of Equations

Suppose an infinite insulated flat plate lies initially at rest on the plane y=0 in a viscous compressible heat-conducting fluid. At time t=0 it is set impulsively into motion in its own plane, moving in the positive x-direction with uniform velocity U. The velocity components u and v, pressure p, density ϱ , and enthalpy i depend only upon y and t. The equations of continuity momentum, energy, and state are

$$\varrho_t + (\varrho \, v)_y = 0 \,, \tag{1a}$$

$$\varrho\left(u_t + v u_y\right) = (\mu u_y)_y, \qquad (1b)$$

$$\varrho(v_t + v v_y) = \frac{4}{3} (\mu v_y)_y - p_y, \qquad (1c)$$

$$\varrho(i_t + v i_y) - (p_t + v p_y) - \mu(u_y^2 + \frac{4}{3}v_y^2) + \frac{1}{\sigma}(\mu i_y)_y, \qquad (1d)$$

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \varrho i. \tag{1e}$$

Here the viscosity μ and thermal conductivity λ depend only upon the enthalpy and the Prandtl number $\sigma = \mu \, c_p/\lambda$ is assumed to be constant. The appropriate boundary conditions are

$$u(y, 0) = v(y, 0) - 0 , \quad u(0, t) - U , \quad (t > 0)$$

$$i(y, 0) - i_{0} , \quad v(0, t) = 0 ,$$

$$p(y, 0) - p_{0} , \quad i_{y}(0, t) = 0 ,$$

$$\varrho(y, 0) = \varrho_{0} ,$$

$$(2)$$

where subscript 0 indicates values in the initially undisturbed fluid.

It is convenient to transform the co-ordinate normal to the plate, introducing in place of y and t new independent variables Y and T defined by

$$Y = \int_{0}^{y} \frac{\varrho}{\varrho_{0}} dy , \quad T = t . \tag{3}$$

Then

$$y_{T} = -\frac{\varrho_{0}}{\varrho} Y_{t}, \qquad y_{Y} = \frac{\varrho_{0}}{\varrho},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} + Y_{t} \frac{\partial}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\varrho_{0}}{\varrho} Y_{t} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\varrho}{\varrho_{0}} \cdot \frac{\partial}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\varrho_{0}}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

$$(4)$$

The role of this transformation is to simplify the operator $\partial/\partial t + v(\partial/\partial y)$ which appears in equations (1). Thus, integrating the continuity equation (1a) between 0 and y gives

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} v = -\int \frac{\varrho_t}{\varrho_0} dy = -Y_t \tag{5}$$

o that

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial v}. \tag{6}$$

The solution is further simplified by assuming that the viscosity is proportional to the enthalpy so that according to the equation of state (1e)

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{p}{p_0} \,. \tag{7}$$

Then the momentum and energy equations (1b) to (1d) reduce to

$$u_T = v_0 \left(\frac{p}{p_0} u_Y \right)_Y, \tag{8a}$$

$$v_I = \frac{4}{3} \nu_0 \left(\frac{p}{p_0} v_Y \right)_Y - \frac{p_Y}{p_0}, \tag{8b}$$

$$i_{I} = \frac{p_{I}}{\varrho} = v_{0} \frac{p}{p_{0}} \left(u_{Y}^{2} - \frac{4}{3} v_{Y}^{2} \right) - \frac{v_{0}}{\sigma} \left(\frac{p}{p_{0}} i_{Y} \right)_{Y},$$
 (8c)

where $v_0 = \mu_0/\varrho_0$.

3. Boundary Layer Solution

For purposes of iterating upon the boundary layer solution, the last three quations are written as

$$\frac{p_Y}{p_0} - \frac{4}{3} v_0 \left(\frac{p}{p_0} v_Y \right)_Y - v_T, \tag{9a}$$

$$u_T - v_0 u_{YY} = v_0 \left(\frac{p - p_0}{p_0} u_Y \right)_Y,$$
 (9b)

$$i_{T} - v_{0} u_{Y}^{2} - \frac{v_{0}}{\sigma} i_{YY} = v_{0} \frac{p - p_{0}}{p_{0}} u_{Y}^{2} + \frac{4}{3} v_{0} \frac{p}{p_{0}} v_{Y}^{2} + \frac{p_{T}}{\rho} + \frac{p_{T}}{\rho} + \frac{v_{0}}{\sigma} \left(\frac{p - p_{0}}{\rho_{0}} i_{Y}\right)_{Y}.$$
(9c)

(The first two have been interchanged so that the iteration scheme proceeds in order.)

For large time, that is, large values of the "Reynolds number",

$$R = \frac{U^2 t}{r_0}$$
 (10)

the right-hand sides of these equations can be neglected. Then according to the first equation (9a) the pressure is constant through the boundary layer:

$$\phi = \phi_0 \,. \tag{11}$$

The second equation (9b) is identical with the equation for the incompressible problem, which has the solution

$$u = U \text{ ERFC } \eta$$
 (12a)

where

$$\eta = \frac{Y}{2\sqrt{v_0}T} \,. \tag{12b}$$

The general solution of the third equation (9c) for enthalpy has been given by Illingworth [3]. However, the result is greatly simplified if the Prandt number σ is assumed to be 1. Then, as first shown by Crocco [5], the enthalpy is a quadratic function of u alone. With the present boundary conditions

$$i = i_0 + U u - \frac{1}{2} u^2.$$
(13)

Because the pressure is constant to a first approximation, it follows that

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{i}{i_0} = 1 + (\gamma - 1) M^2 \operatorname{ERFC} \eta \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ERFC} \eta \right). \tag{14}$$

Here the Mach number M is the ratio of the speed of the plate U to the speed of sound in the undisturbed fluid, which is given by $c_0^2 = (\gamma - 1) i_0$.

These results are expressed in terms of the distorted normal co-ordinate Y whose relationship to the physical co-ordinate y can now be determined According to equation (4), $y_Y = \varrho_0/\varrho$, so that integrating equation (14) wit respect to Y gives

$$y = Y \left[1 + (\gamma - 1) M^2 \left(\text{erfc } \eta - \frac{1}{2} \text{ erfc}^2 \eta \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \cdot \frac{1}{\eta} \text{ erf } \sqrt{2 \eta} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\eta} e^{-\eta^2} \text{ erf } \eta \right) \right].$$

$$\left. (13)$$

The promotive velocity v in the boundary layer can now be determined from the continuity equation. According to equations (4) and (5), $v = y_T$, so that lifter matring equation (15) gives

$$\frac{v}{U} = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\pi}} M^2 \sqrt{\frac{v_0}{U^2 T}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ Erf } \sqrt{2} \eta - e^{-\eta^2} \text{ Erf } \eta \right).$$
 (16)

As usual in boundary layer theory, the condition that v vanishes far from the plate has been given up. Infinite values of η should be interpreted as referring not to the undisturbed flow, but to conditions at the outer edge of the boundary ayer. Therefore, the normal velocity just outside the boundary layer is

$$\frac{v}{U}_{\eta \to \infty} = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M^2 \sqrt{\frac{v_0}{U^2 T}} \tag{17}$$

nd the displacement thickness δ is

$$\delta(t) = \int_{0}^{t} v \big|_{\eta \to \infty} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\gamma - 1) M^{2} \sqrt{\nu_{0} T}.$$
 (18)

4. Outer Flow Field

The velocity component u parallel to the plate vanishes exponentially as $\to \infty$, so that at the outer edge of the boundary layer there exists only a ormal velocity component. Therefore, to a first approximation, the flow field utside the boundary layer is that which would result from moving the plate ormal to itself with the velocity given by equation (17). If the structure of he receding shock wave were of interest, this problem should be solved inuding the effects of viscosity. For example, linearizing the equations would ad to a piston problem of the sort treated in Ref. [1], Section 2.2. However, r purposes of improving the solution in the boundary layer, it is sufficient the first step to treat the outer flow as an acoustical problem.

For purposes of iterating upon the acoustic solution, equations (1) are ritten as

Neglecting the right-hand sides leads to the acoustic equation for v:

$$v_{yy} - \frac{1}{C_0^2} v_{tt} = 0. {(20)}$$

The appropriate initial and boundary conditions are

$$v(y,0) = v_t(y,0) = 0,$$

$$v(0,t) = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} M^2 \sqrt{\frac{v_0}{t}}. \quad (t > 0)$$
(21)

As usual, the boundary condition has been imposed at the plane y=0 rather than at $y=\delta(t)$. Thus the edge of the boundary layer is represented by $\eta=\infty$ for the boundary layer solution, but by y=0 for the outer flow solution. This solution of this problem is

for $t > y/c_0 \ge 0$ and v = 0 otherwise. The corresponding result for the pressur is found to be

$$p = p_0 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M^2 \varrho_0 c_0 \sqrt{\frac{\nu_0}{t - y/c_0}}. \qquad (23)$$

In order that this solution may later be matched with the boundary layer solution, it is expanded in series for small values of $y/c_0 t$, and then expressed in terms of the boundary layer variables T and η , which gives

$$\phi = \phi_0 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M^2 \varrho_0 c_0 \sqrt{\frac{v_0}{t}} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{c_0 t} + \cdots \right]
= \phi_0 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M^2 \varrho_0 c_0 \sqrt{\frac{v_0}{T}} + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M^2 \varrho_0 v_0 \frac{\eta}{T} + \cdots$$
(2)

5. Second Approximation for Pressure in Boundary Layer

Having found a first approximation for the outer flow field, we return the boundary layer. There a second approximation can be obtained by iteration Thus, substituting the first approximations for p [equation (11)] and v [equation (16)] into the right-hand side of equation (9a) and integrating with respect to Y gives

$$\phi = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\pi}} M^2 \frac{\varrho_0 \nu_0}{T} \left(\frac{1}{3} \eta e^{-\eta^2} \text{ ERF } \eta + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta \text{ ERF } \sqrt{2} \eta \right) + h(T)$$
 (2)

where h(T) is an arbitrary function which must be determined by matching with the outer flow solution. Now for large η this is approximately

$$p = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M^2 \varrho_0 \nu_0 \frac{\eta}{T} + h(T), \qquad (26)$$

which can be matched with the outer flow solution of equation (24) by proper choice of the function h(T). The agreement between terms of order v_0 is deceptive; the result is actually correct only to order $v_0^{1/2}$, so that the main term in equation (25) cannot be used at this stage. Hence the second approximation for pressure in the boundary layer is

$$p = p_0 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M^2 \varrho_0 c_0 \sqrt{\frac{\nu_0}{T}}. \qquad (27)$$

At the surface of the plate $(\eta = 0)$ the pressure increase is

$$\frac{p_s - p_0}{p_0} = \frac{\gamma (\gamma - 1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{M^2}{c_0} \mid \frac{r_0}{T} = \frac{\gamma (\gamma - 1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{M^3}{\sqrt{R}}.$$
 (28)

This is precisely the asymptotic result for large time found by HOWARTH[2] using the method of linearization for small M^2 . His solution is based upon the asymption that $\sigma = 3.4$ rather than 1, which suggests that the result is inlependent of Prandtl number.

6. Second Approximation for u in Boundary Layer

Let the second approximation for tangential velocity be $u \vdash u'$, where u is he first approximation given by equation (12), and u' is a small correction for u and the second approximation for u into the right-hand side of equation (9b) gives

$$u'_T - v_0 u'_{YY} = \frac{\gamma (\gamma - 1)}{\sqrt{2} \pi} M^3 \sqrt{v_0} \frac{1}{T^{3/2}} \eta e^{-\eta^2}.$$
 (29)

he correction must not disturb the already correct initial and boundary alues, so that

$$u'(y, 0) = u'_t(y, 0) = u(0, t) = 0.$$
 (30)

The solution of this problem is found to be

$$u' = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \gamma (\gamma - 1) M^3 \sqrt{\frac{\nu_0}{T}} \eta e^{-\eta^2},$$
 (31)

hich again vanishes exponentially as $\eta \to \infty$.

In the same way, iterating upon equation (9c) leads to a second-order correction to enthalpy in the boundary layer to be added to the first approximation of equation (13):

$$i' = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \, \pi}} \, M \, U \, \sqrt{\frac{\nu_0}{T}} \, \left(1 + \frac{2 \, \gamma}{\sqrt{\pi}} \, M^2 \, \eta \, e^{-\eta^2} \, \text{ERF} \, \eta \right).$$
 (32)

Here the initial condition $i = i_0$ at t = 0 has been given up in favor of requiring the solution to approach the acoustic value at the outer edge of the boundary layer.

Next, improved values of ϱ and Y can be calculated, and then a second order correction to normal velocity is found which is to be added to the first approximation of equation (16):

$$v' = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{M^2}{c_0} \cdot \frac{r_0}{T}$$

$$\times \eta \left[1 + \gamma \left(\gamma - 1 \right) M^2 \left\{ \text{ERFC } \eta \left(1 - \frac{1}{2} \text{ ERFC } \eta \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} \text{ ERF } \eta \right\} \right]. \tag{33}$$

It will be seen later that at the surface of the plate the corrections to u and μ compensate each other, so that to second order the skin friction is unchanged

7. Second Approximation for Outer Flow Field

Returning to the outer flow field, we seek a second approximation be iteration. Substituting the acoustic solution into the right-hand sides of equations (19) leads to a nonhomogeneous wave equation to be solved for v. As boundary condition near the plate we require that the solution when expressed in terms of boundary layer variables shall for large η agree to second order (order v_0) with the boundary layer solution of equations (16) and (33). This matching can be accomplished, which is some assurance of the correctness of the procedure. This leads to the remarkable result that to second as well as first order the outer flow field is just that produced in an inviscid fluid by solid piston moving according to the displacement thickness of equation (18). Thus to second order in the outer flow field

$$v = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M^{2} \sqrt{\frac{v_{0}}{t - y/c_{0}}} - \frac{(\gamma - 1)^{2}}{2 \pi} \cdot \frac{M^{4}}{c_{0}} \cdot \frac{v_{0}}{t - y/c_{0}} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{4} \cdot \frac{y/c_{0}}{t - y/c_{0}}\right)$$

$$\phi = \phi_{0} + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M U \varrho_{0} \sqrt{\frac{v_{0}}{t - y/c_{0}}}$$

$$- \frac{(\gamma - 1)^{2}}{2 \pi} M^{4} \varrho_{0} \frac{v_{0}}{t - y/c_{0}} \left(1 - \frac{\gamma + 1}{4} \cdot \frac{t - 2y/c_{0}}{t - y/c_{0}}\right).$$
(38)

8. Third Approximations for p and u in Boundary Layer

The expression for pressure in the boundary layer given by equation (25) remains valid to third order. The arbitrary function h(T) can now be determined to this order by expressing the outer flow solution of equation (35) in terms of the boundary layer variables and comparing with equation (26). Again the matching is successful, with the result that in the boundary layer to third order

$$\phi = \phi_0 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M U \varrho_0 \sqrt{\frac{v_0}{T}}
+ \frac{\gamma - 1}{\sqrt{3}} M^2 \varrho_0 \frac{v_0}{T} \left[\eta \left(\frac{1}{3} e^{-\eta^2} \operatorname{ERF} \eta + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ERF} \sqrt{2} \eta \right) + \frac{(\gamma + 1)(\gamma - 1)}{8 \sqrt{\pi}} M^2 \right].$$
(36)

The pressure increase at the surface of the plate is

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\gamma (\gamma - 1)}{\sqrt{2 \pi}} \cdot \frac{M^3}{\sqrt{R}} + \frac{\gamma (\gamma + 1) (\gamma - 1)^2}{8 \pi} \left(\frac{M^3}{\sqrt{R}}\right)^2, \tag{37}$$

which is to this approximation just the pressure on the surface of a solid piston noving with the displacement thickness.

Now let u'' be a third-order increment in tangential velocity, to be added to he first- and second-order contributions of equations (12) and (31). Substituting the second approximation for u and the third approximation for p into ne right-hand side of equation (9b) gives

$$u_{I}'' - r_{0} u_{YY} = -\frac{\gamma (\gamma - 1)}{2 \pi} \cdot \frac{M^{3}}{c_{0}} \cdot \frac{r_{0}}{T^{2}} e^{-\eta^{2}} \left[\frac{1}{3} (1 - 4 \eta^{2}) e^{-\eta^{2}} \operatorname{ERF} \eta \right]$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - 2 \eta^{2}) \operatorname{ERF} \sqrt{2} \eta + \frac{8}{3 \sqrt{\pi}} \eta e^{-2\eta^{2}} + \frac{\gamma - 1}{4 \sqrt{\pi}} M^{2} \eta (11 \gamma - 1 - 8 \gamma \eta^{2}) \right].$$
(38)

his is to be solved together with zero initial and boundary conditions. Some imputation yields the solution

$$\begin{split} & = \frac{\gamma \, (\gamma - 1)}{2 \, \pi} \cdot \frac{M^3}{c_0} \cdot \frac{\nu_0}{T} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \, \eta \, e^{-3 \, \eta^2} - \sqrt{2} \, (1 - 2 \, \eta^2) \, e^{-\eta^2} \, \text{ERF} \, \sqrt{2} \, \eta \right. \\ & + \frac{\sqrt{\pi}}{6} \, \eta \, e^{-\eta^2} \, \text{ERF}^2 \, \eta - \frac{1}{3} \, e^{-2 \, \eta^2} \, \text{ERF} \, \eta \\ & + \frac{7}{3 \, \sqrt{3}} \left(\text{ERF} \, \sqrt{3} \, \eta - 2 \, \eta \, e^{-\eta^2} \int_0^{\eta} e^{s^2} \, \text{ERF} \, \sqrt{3} \, s \, ds \right) \\ & + \frac{\gamma - 1}{4 \, \sqrt{\pi}} \, M^2 \left\{ 8 \, \gamma \, \eta^3 \, e^{-\eta^2} + \sqrt{\pi} \, (\gamma + 1) \, \left(\text{ERF} \, \eta - 2 \, \eta \, e^{-\eta^2} \int_0^{\eta} e^{s^2} \, \text{ERF} \, s \, ds \right) \right\} \right]. \end{split}$$

This vanishes exponentially at the outer edge of the boundary layer, but only as $\eta^3 e^{-\eta^2}$, whereas the first and second approximations vanish as $\eta^{-1} e^{-\eta^2}$ and $\eta^2 e^{-\eta^2}$ respectively. Thus each successive term in the boundary layer solution penetrates farther into the outer flow field, which is apparently the only way in which tangential velocities will arise in this procedure.

9. Third Approximation for Skin Friction

The skin friction coefficient is given by

$$c_f = \frac{(-u_y \mu)_{y=0}}{\varrho_0 U^2/2} = 2 \frac{v_0}{U^2} \left(\frac{p}{p_0}\right)_{y=0} \left(-\frac{u_Y}{U}\right)_{y=0}.$$
 (40)

The term $(p/p_0)_{y=0}$ is obtained from equation (37), and the last term can be calculated from equations (12), (31) and (39). The result is

$$c_{f} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \left[1 - \frac{\gamma (\gamma - 1)}{2 \pi} \cdot \frac{M^{4}}{R} \left\{ 1 + \gamma (\gamma - 1) M^{2} \right\} \right]. \tag{41}$$

The first term is the usual boundary layer result. It is independent of compressibility because of the assumption that viscosity is proportional to temperature. Consequently, the decrease of skin friction with Mach number (represente by the latter terms) is entirely the result of interaction between the boundary layer and outer flow field.

10. Discussion

The above procedure can, in principle, be continued indefinitely. In the next cycle, a shock discontinuity must be inserted between the outer flow field and the undisturbed fluid beyond, and account must be taken of disturbances reflected inward from the shock wave. Viscous terms in equations (19) will become effective at this stage, so that the outer flow field is not inviscid beyond the second approximation. At some later stage, the effects of viscosity with the shock wave must be considered.

Clearly the process yields only an asymptotic solution for large time. is not valid near t=0, because equation (41) would imply that an infinitimpulse per unit area is required to set the plate in motion.

The boundary layer approximation is permissible only if the maximum normal velocity is small compared with U. According to equation (17), the requires that

$$\frac{M^2}{\sqrt{R}} \ll 1. (42)$$

ikewise, acoustic theory is applicable to the outer flow only if the normal elocity at the edge of the boundary layer is small compared with the speed of bund, which requires that

$$\frac{M^3}{\sqrt[]{R}} \ll 1. \tag{42b}$$

hence the present solution is a perturbation scheme for small M^2/\sqrt{R} or $I^3 \mid R$, whichever is the larger. The preceding results suggest that the solution in be expanded in powers of these two parameters.

REFERENCES

LAGERSTROM, P. A., COLE, J. D., and TRILLING, L.: Problems in the Theory of Viscous Compressible Fluids, GALCIT Report, Calif. Inst. Technol., 1949.
 HOWARTH, L., Some Aspects of Rayleigh's Problem for a Compressible Fluid, Quart. J. Mech. appl. Math. 4, Part 2, 157-169 (1951).

ILLINGWORTH, C. R., Unsteady Laminar Flow of Gas Near an Infinite Flat

Plate, Proc. Cambridge Phil. Soc. 46, Part 4, 603-613 (1950).

Stewartson, K., On the Impulsive Motion of a Flat Plate in a Viscous Fluid, Quart. J. Mech. appl. Math. 4, Part 2, 182-198 (1951).

CROCCO, L., Lo strato limite laminare nei gas, Monogr. sci. Aeronaut. No. 3 (1946).

Zusammenfassung

Eine unendlich ausgedehnte Platte werde zur Zeit t=0 in ihrer eigenen bene mit konstanter Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt. Das betreffende römungsfeld einer zähen, kompressiblen Flüssigkeit wird untersucht. Die isung geht von der Grenzschichtnäherung aus und benutzt ein Verfahren sukzeszer Annäherungen, um den Effekt der Druckwelle, die wegen der Kompressität entsteht, darzustellen. In zweiter Näherung ergibt sich eine verbesserte enzschichtlösung und eine akustische Lösung ausserhalb der Grenzschicht ein der erstgenannten Lösung auftretende unbestimmte Funktion lässt sich is der Forderung berechnen, dass beide Lösungen am Rande der Grenzschicht ereinstimmen sollen. Aus der Wechselwirkung der äusseren Strömung mit der enzschicht ergibt sich eine Verminderung der Schubspannung an der Platte. Is benutzte Verfahren ist nur für grosse Werte eines dimensionslosen Zeitgrameters gültig.

ceived: April 10, 1952.)

La plaque rectangulaire fléchie d'épaisseur linéairement variab

Par Henry Favre1) et Bernhard Gilg, Zurich

Différents auteurs, notamment R. Gran Olsson, ont étudié la flexion de plaques rectangulaires d'épaisseur variable²). Le cas où cette variation es linéaire n'avait cependant pas encore été traité jusqu'ici. Or une telle variation peut être facilement réalisée, surtout dans le béton armé, en choisissant pour les faces de la plaque deux plans formant un petit angle. Nous avons donc estirutile d'étudier ce cas.

Après avoir établi l'équation différentielle régissant la flexion (§ 1), no indiquerons deux méthodes pour intégrer cette équation lorsque la plaque es appuyée le long du contour (§ 2). Nous ferons ensuite une application de d'méthodes, en supposant que la surcharge soit une pression hydrostatique (§ 2). Dans un dernier paragraphe (4), nous donnerons sous forme de diagramme les résultats d'un calcul numérique.

§ 1. Equation différentielle d'une plaque rectangulaire d'épaisseur linéairement variable

Soient a et b les côtés. Choisissons les axes x, y, z indiqués dans la figure et posons, pour l'épaisseur h en un point quelconque:

$$h = \left[1 - \lambda \left(\frac{2v}{b} - 1\right)\right] h_0,$$

d'où

$$(h)$$
, 0 $(1 - \lambda) h_0$, (h) , h $(1 + \lambda) h_0$,

 h_0 désignant la valeur de l'épaisseur de long de la droite y=b/2. Le nombre est la variation, divisée par h_0 , que subit h depuis cette droite jusqu'à l'un

¹⁾ Chaire de Mécanique, Ecole polytechnique fédérale.

²⁾ Citons entre autres: R. Gran Olsson, Die Biegung der rechteckigen Platte veränderlicher Die Thèse de l'Ecole polytechnique de Berlin (1933); Biegung der Rechteckplatte bei linear veränderlich Biegungssteijigkeit, Ing.-Arch. 5, 363 (1934); Biegung der Rechteckplatte von exponentiell veränglicher Dicke, Bauingenieur 21, 230 (1940); Biegung der Rechteckplatte bei linear veränderlich Steifigkeit und beliebiger Belastung, Bauingenieur 22, 10 (1941). – E. Reissner, Remark on in Theory of Bending of Plates of Variable Thickness, J. Math. Phys. 14, 43 (1937).

l'autre des côtés qui lui sont parallèles. Nous supposons donc que h varie uniquement dans la direction de l'axe y.

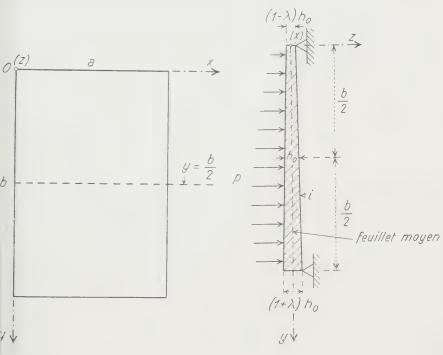


Fig. I

L'équation régissant la flexion d'une plaque où l'épaisseur varie selon une pi quelconque est, en coordonnées cartésiennes rectangulaires¹):

$$D\Delta\Delta\zeta + 2\frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Delta\zeta + 2\frac{\partial D}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta\zeta + \Delta D\Delta\zeta$$

$$(1 - v) \left(\frac{\partial^{2}D}{\partial x^{2}} \cdot \frac{\partial^{2}\zeta}{\partial y^{2}} - 2\frac{\partial^{2}D}{\partial x\partial y} \cdot \frac{\partial^{2}\zeta}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^{2}D}{\partial y^{2}} \cdot \frac{\partial^{2}\zeta}{\partial x^{2}} \right) = p,$$
(2)

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}, \tag{3}$$

étant le déplacement d'un point du feuillet moyen, I, l'opérateur de LAPLACE $^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, E, le module d'élasticité, v, le nombre de Poisson, et p(x, y), surcharge par unité de surface.

¹⁾ Voir S. TIMOSHENKO, Theory of Plates and Shells (McGraw-Hill Book Company, New-York Londres, 1940), p. 195.

Dans le cas étudié, l'équation (2) devient, compte tenu des relations (1) (3) et en posant pour abréger

$$D_{0} = \frac{E h_{0}^{8}}{12 (1 - v^{2})}:$$

$$\Delta \Delta \zeta = \frac{p}{D_{0}} - 3 \lambda \left[\frac{4}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \Delta \Delta \zeta \right]$$

$$- 3 \lambda^{2} \left[\frac{8}{b^{2}} \left\{ \Delta \zeta - (1 - v) \frac{\partial^{2} \zeta}{\partial x^{2}} \right\} + \frac{8}{b} \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta \right]$$

$$+ \left(\frac{2y}{b} - 1 \right)^{2} 11\zeta \right] - \lambda^{3} \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \left[\frac{24}{b^{2}} \left\{ 1\zeta - (1 - v) \frac{\partial^{2} \zeta}{\partial x^{2}} \right\} \right]$$

$$(4)$$

Cette équation différentielle n'est évidemment applicable que si l'épaisseur dest partout petite par rapport aux autres dimensions et si le déplacement d'un point quelconque du feuillet moyen est lui-même petit par rapport à hace que nous supposerons essentiellement dans la suite. Nous admettons égale ment qu'aucune force n'agisse dans le plan de ce feuillet.

 $+\frac{12}{h}\left(\frac{2y}{h}-1\right)\frac{\partial}{\partial y}\Delta\zeta+\left(\frac{2y}{h}-1\right)^2\Delta\Delta\zeta$.

Les expressions des moments de flexion M_x , M_y et de torsion M_{xy} , pa unité de longueur, sont les mêmes que lorsque l'épaisseur est constante:

$$\begin{split} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \nu \, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \nu \, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy} &= -\left(1 - \nu\right) \, D \, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} \; . \end{split}$$

Il en est de même de celles des tensions σ_x , σ_y , τ_{xy} en fonction des moments

$$\sigma_x = \frac{M_x}{h^3/12} z$$
, $\sigma_y = \frac{M_y}{h^3/12} z$, $\tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{h^3/12} z$, (6)

z désignant la distance d'un point de la plaque au feuillet moyen. En particulier les valeurs de ces tensions aux points z = h/2 de la face opposée i à celle or agit la surcharge p sont données par les formules:

$$(\sigma_x)_i = \frac{6 M_x}{h^2}, \quad (\sigma_y)_i = \frac{6 M_y}{h^2}, \quad (\tau_{xy})_i = \frac{6 M_{xy}}{h^2}.$$
 (7)

§ 2. Méthodes d'intégration, dans le cas où la plaque est appuyée le long du contour

Le déplacement ζ dépend non seulement de x, y, mais aussi de λ . Développons ζ en une série illimitée, procédant selon les puissances croissantes de cett

dernière variable:

$$\zeta(x, y, \lambda) = \zeta_0(x, y) + \zeta_1(x, y) \lambda + \zeta_2(x, y) \lambda^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \lambda^i.$$
 (8)

Pour déterminer les fonctions $\xi_i(x, y)$, introduisons l'expression (8) dans les deux membres de l'équation (4), puis identifions les coefficients des mêmes puissances de λ . Nous obtenons le système d'équations différentielles simultanées:

$$\frac{\lambda^{0}}{A} \begin{vmatrix} A\Delta \zeta_{0} &= \frac{b}{D_{0}}, \\ \lambda^{1} \begin{vmatrix} \Delta \Delta \zeta_{1} &= -3 \left[\frac{4}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_{0} + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \right] + |\zeta_{0}|, \\ \lambda^{2} \begin{vmatrix} \Delta \Delta \zeta_{2} &= -3 \left[\frac{4}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_{1} + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \Delta \Delta \zeta_{1} \right] \\ -3 \left[\frac{\lambda^{2}}{b^{2}} \left\{ J\zeta_{0} - (1 - v) \frac{\partial^{2}\zeta_{0}}{\partial x^{2}} \right\} + \frac{8}{b} \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \zeta_{0} \\ + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right)^{2} \Delta \Delta \zeta_{0} \right], \\ \beta^{i} \begin{vmatrix} \Delta \Delta \zeta_{i} &= -3 \left[\frac{4}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_{i-1} + \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right) \Delta \Delta \zeta_{i-1} \right] \\ -3 \left[\frac{8}{b^{2}} \left\{ J\zeta_{i-2} - (1 - v) \frac{\partial^{2}\zeta_{i-2}}{\partial x^{2}} \right\} + \frac{8}{b} \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \zeta_{i-2} \\ + \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right)^{2} J J\zeta_{i-2} \right] \\ - \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right) \left[\frac{24}{b^{2}} \left\{ J\zeta_{i-3} - (1 - v) \frac{\partial^{2}\zeta_{i-3}}{\partial x^{2}} \right\} \right]$$

La plaque étant appuyée le long du contour, les conditions aux limites sont:

 $+\frac{12}{b}\left(2\frac{v}{b}-1\right)\frac{\theta}{\theta v}\left[1\zeta_{i-3}+\left(2\frac{v}{b}-1\right)^{2}\right]1\zeta_{i-3}$

$$\zeta = 0$$
 et $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} = 0$, (10)

désignant la direction de la normale au contour, au point considéré. Pour e ces conditions soient satisfaites quel que soit λ , il est nécessaire, d'après (8), e l'on ait en tout point du contour:

$$\zeta_i \equiv 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial n^2} \equiv 0 \ . \qquad (i - 1, 2, ..., \infty) \quad (11)$$

Revenons au système (9). La première équation contient seulement la fonction inconnue ζ_0 . Cette équation n'étant autre que celle d'une plaque rectangulaire posée d'épaisseur constante h_0 , nous pouvons l'intégrer par la méthode de Navier. Dans ce but, commençons par développer le second membre qui est une fonction connue de x, y, en une série double de sinus, en posant:

$$\frac{p}{D_0} = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}, \qquad (12)$$

οù

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{0}^{\frac{a}{2}} \sin \frac{m \, \pi \, x}{a} \, dx \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x, y) \sin \frac{n \, \pi \, y}{b} \, dy. \tag{13}$$

Posons ensuite:

$$\mathbb{I}_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m \, \pi \, x}{a} \sin \frac{n \, \pi \, x}{b} \,. \tag{14}$$

En introduisant les séries (12) et (14) dans la première des équations (9), e en identifiant, nous obtenons pour les coefficients:

$$B_{mn} = \frac{A_{mn}}{\pi^4 D_0 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \,. \tag{15}$$

On vérifie facilement que la valeur ainsi obtenue pour ζ_0 satisfait aux conditions aux limites (11).

En introduisant cette valeur dans le membre de droite de la seconde de équations (9), ce membre devient une fonction connue de x, y. On peut alor le développer en une série de sinus et déterminer ζ_1 , comme on l'a fait pour ζ_i . En introduisant ensuite, dans le membre de droite de la troisième des équation (9), les valeurs obtenues pour ζ_0 et ζ_1 , on est ramené à des opérations analogue aux précédentes, pour le calcul de ζ_2 , et ainsi de suite.

La méthode est tout à fait générale. Son application suppose seulement que la fonction p(x,y) soit développable en série, ce qui est toujours le cas dans la pratique. Cependant, une difficulté se présente dans les calculs. Si ζ_0 s'exprima à l'aide d'une série double, les fonctions ζ_1, ζ_2, \ldots se présenteront en réalitz sous la forme de sommes de séries, dont une seule est double, les autres ayant un ordre de multiplicité supérieur à deux. L'exemple traité dans le § 3 l'montrera éloquemment.

Les séries multiples étant relativement peu commodes pour les calcul numériques, il sera donc indiqué, toutes les fois qu'on pourra le faire, de cherches à appliquer la méthode de MAURICE LÉVY. Celle-ci consistera ici à développer les seconds membres en séries simples et à mettre également les fonctions ζ_i sou

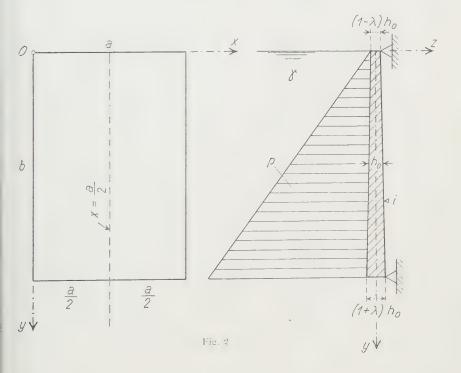
a même forme. Cette seconde méthode ne sera toutefois applicable que si la urcharge p a des valeurs égales en deux points symétriques par rapport à la roite x = a/2.

L'exemple traité au paragraphe suivant, où il est possible d'appliquer les eux méthodes, fera bien ressortir leur différence.

§ 3. Cas d'une pression hydrostatique

Supposons que deux côtés soient verticaux et que la plaque limite un assin entièrement rempli d'un liquide de poids spécifique γ (figure 2). On a, ans ce cas:

$$p = \gamma y. \tag{16}$$



Première méthode

La première des équations (9) devient:

$$\Delta \Delta \zeta_0 = c \ y \ , \tag{17}$$

en posant, pour simplifier,

$$\hat{D}_{0}^{\prime} = c. \tag{13}$$

En remplaçant, dans la formule (13), f(x, y) par c y, et en intégrant, d'obtient:

$$A_{mn} = (-1)^{n-1} \frac{8 b c}{\pi_{mn}^2}, \quad \left\{ \begin{array}{c} m = 1, 3, 5, ..., \infty \\ n = 1, 2, 3, ..., \infty \end{array} \right.$$

d'où, en vertu de (14), (15) et en posant

$$\varrho = \frac{a}{b}$$
: (1)

$$\zeta_0 = \frac{8 a^5 c}{\pi^6 \varrho} \sum_{m=1,3,\dots,n}^{\infty} \sum_{1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n (m^2 + n^2 \varrho^2)^2} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} . \quad (20)$$

La seconde des équations (9) s'écrit, compte tenu de (17):

$$\Delta \Delta \zeta_{1} = -3 \left[\frac{4}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_{0} + c \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) y \right]. \tag{2}$$

En partant de l'expression (20) de ζ_0 , on obtient sans difficulté:

$$\frac{\partial}{\partial y} \, \Delta \zeta_0 = \frac{8 \, a^2 \, c}{\pi^3} \sum_{m=1,3,\dots,n}^{\infty} \sum_{1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m \, (m^2 + n^2 \, \varrho^2)} \sin \frac{m \, \pi \, x}{a} \cos \frac{n \, \pi \, y}{b} \, . \tag{2}$$

Développons $\cos(n \pi y/b)$ en série simple de sinus, en appliquant des fo mules analogues à (12) et (13):

$$\cos\frac{n \pi y}{b} = \sum_{n'=1}^{\infty} A_{n'} \sin\frac{n' \pi y}{b},$$

où

$$A_{n'} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \cos\{\pi (n' + n)\}}{n' + n} + \frac{1 - \cos\{\pi (n' - n)\}}{n' - n} \right], \quad (n' \neq n)$$
$$- \frac{1 - \cos\{\pi (n' + n)\}}{\pi (n' + n)}. \quad (n' = n)$$

Introduisons ce développement dans (22), ce qui donne pour $\partial A_{50}^2/\partial y$ I série triple:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{8 a^{2} c}{\pi^{4}} \sum_{m=1,3,\dots,n}^{\infty} \sum_{1,2,\dots,n'=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{m (m^{2} + n^{2} \varrho^{2})} \times \left[\frac{1 - \cos\{\pi (n' + n)\}}{n' + n} + \underbrace{\frac{1 - \cos\{\pi (n' - n)\}}{n' - n}}_{0,\sin n' n} \right] \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n' \pi y}{b}.$$
(23)

En développant (2 y/b - 1) y en série double, on obtient:

$$\left(\frac{2y}{b} - 1\right) y = \frac{16b}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \times \left[\frac{(-1)^n}{2} - \cos(n\pi) - \frac{2}{n^2\pi^2} \left\{1 - \cos(n\pi)\right\}\right] \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}.$$
(24)

Le membre de droite de l'équation (21) devient ainsi, en tenant compte de (23) et (24), la somme d'une série triple et d'une série double. Posons en conséquence:

$$\zeta_{1} = \sum_{m=1,3,\dots,n}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots,n'=1,2,\dots}^{\infty} C_{mnn'} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n' \pi y}{b} + \sum_{m=1,3,\dots,n=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots,n=1,2,\dots}^{\infty} D_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}.$$
(25)

Substituons les expressions (23), (24) et (25) dans l'équation (21), puis identifions. Nous obtenons directement les valeurs des coefficients $C_{mnn'}$ et D_{mn} qui, introduites dans (25), donnent finalement, après quelques transformations:

$$\xi_{1} = \frac{24 a^{5} c}{\pi^{6} \varrho} \left\{ \frac{8 \varrho^{2}}{\pi^{2}} \sum_{m=1,3,\dots,n}^{\infty} \sum_{1,2,\dots,n'=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{m (m^{2} + n^{2} \varrho^{2}) (m^{2} + n'^{2} \varrho^{2})^{2}} \right\} \\
\times \left(\frac{1}{n' + n} - \frac{1}{n' - n} \right) \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n' \pi y}{b} \\
+ \sum_{0, p. \text{ val. paires des dénom.}} \frac{(-1)^{n} + \frac{4 [1 - (-1)^{n}]}{n^{2} \pi^{2}}}{m n (m^{2} + n^{2} \varrho^{2})^{2}} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \right\}.$$
(26)

Cette fonction satisfait aux conditions aux limites (11).

Nous avons également calculé ζ_2 , qui est la somme d'une série quadruple, nl'une série triple et d'une série double. Il n'y aurait aucune difficulté à déterminer ζ_3 et même ζ_4 . Ces calculs seraient toutefois moins utiles, car, dans la bratique, l'exactitude obtenue en limitant le développement (8) aux trois premiers termes suffira en général.

Deuxième méthode

Posons:

$$\zeta_0 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_{0n} \sin(\alpha_n x) , \qquad (27)$$

$$\alpha_n = \frac{n \, \pi}{a} \,, \tag{28}$$

ù

 Y_{0n} désignant une fonction de la variable y. La série (27) satisfait aux conditions (11) le long des côtés x = 0 et x = a. Introduisons cette série dans la première des équations (9), en multipliant en outre le second membre par

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,...}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\alpha_n x);$$
 (29)

nous obtenons:

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(Y_{0n}^{\text{IV}} - 2 \alpha_n^2 Y_{0n}'' + \alpha_n^4 Y_{0n} \right) \sin \left(\alpha_n x \right) = \frac{4 c y}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(\alpha_n x \right) ,$$

où Y_{0n}^n et Y_{0n}^{IV} désignent la dérivée seconde et la dérivée quatrième de Y_{0n} par rapport à y.

En identifiant, dans les deux membres, les coefficients de $\sin(\alpha_n x)$, on esconduit à l'équation différentielle ordinaire:

$$Y_{0n}^{1V} - 2\alpha_n^2 Y_{0n}'' + \alpha_n^4 Y_{0n} = \frac{4cy}{a\alpha_n}$$

La solution générale de cette équation est:

$$Y_{0n} = A_{0n} \cosh (\alpha_n y) + B_{0n} \sinh (\alpha_n y) + C_{0n} \alpha_n y \cosh (\alpha_n y) + D_{0n} \alpha_n y \sinh (\alpha_n y) + \frac{4 c y}{a \alpha_n^3},$$

$$(30)$$

où A_{0n} , ..., D_{0n} désignent des constantes.

Les conditions aux limites (11) exigent que

$$Y_{0n} = 0$$
 et $Y''_{0n} = 0$, (3)

pour y = 0 et y = b.

Ces conditions, exprimées à l'aide de la solution (30), conduisent à quatréquations linéaires qui, résolues par rapport aux constantes A_{0n}, \ldots, D_{0n} donnent les valeurs:

$$A_{0n} = 0, \quad B_{0n} = -\frac{4 b c}{a \alpha_n^5 \sinh(\alpha_n b)} \left(1 + \frac{b \alpha_n}{2 \lg h(\alpha_n b)} \right),$$

$$C_{0n} = \frac{2 b c}{a \alpha_n^5 \sinh(\alpha_n b)}, \quad D_{0n} = 0.$$
(32)

En introduisant ces valeurs dans le second membre de (30), puis en substituant dans (27), on obtient finalement:

$$\frac{\zeta_{0} = \frac{4 b c}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n}^{5}} \left[\frac{y}{b} - \frac{\sinh(\alpha_{n} y)}{\sinh(\alpha_{n} b)} \left(1 + \frac{b \alpha_{n}}{2 \tanh(\alpha_{n} b)} \right) + \frac{\alpha_{n} y \cosh(\alpha_{n} y)}{2 \sinh(\alpha_{n} b)} \right] \sin(\alpha_{n} x)}{\left[+ \frac{\alpha_{n} y \cosh(\alpha_{n} y)}{2 \sinh(\alpha_{n} b)} \right] \sin(\alpha_{n} x)}.$$
(33)

Posons ensuite:

$$\zeta_1 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_{1n} \sin \left(\alpha_n x \right) , \qquad (34)$$

$$\alpha_n = \frac{n \, \pi}{a} \,, \tag{28}$$

 7_{1n} ne dépendant que de y. La série (34) satisfait aux conditions (11) le long les côtés x=0 et x=a.

En introduisant les séries (27) et (34) dans la seconde des équations (9), elle-ci devient, compte tenu des relations (17) et (29):

$$\sum_{n=1,3,...}^{\infty} \left(Y_{1n}^{\text{IV}} - 2 \alpha_n^2 Y_{1n}^{"} + \alpha_n^4 Y_{1n} \right) \sin \left(\alpha_n x \right)$$

$$-3 \sum_{n=1,3,...}^{\infty} \left\{ \frac{4 \alpha_n^8}{b} \left[2 C_{0n} \cosh \left(\alpha_n y \right) - \frac{4 c}{a \alpha_n^6} \right] + \frac{4 c}{\pi n} \left(\frac{2 y^2}{b} - y \right) \right\} \sin \left(\alpha_n x \right) ,$$

ù C_{0n} est la constante donnée par la troisième des formules (32).

En identifiant, on obtient pour Y_{1n} l'équation différentielle ordinaire:

$$\begin{split} Y_{1n}^{\text{IV}} - 2\,\alpha_n^2\,Y_{1n}'' + \alpha_n^4\,Y_{1n} \\ 3\,\left[\frac{1}{b}\,\frac{\alpha_n^3}{b} \left[2\,C_{0n}\cosh\left(\alpha_n\,y\right) - \frac{4}{a}\frac{c}{\alpha_n^6} \right] + \frac{4}{\pi}\frac{c}{n}\left(\frac{2}{b}\frac{y^2}{b} - y \right) \right], \end{split}$$

ont la solution générale est:

$$Y_{1n} = A_{1n} \cosh(\alpha_n y) + B_{1n} \sinh(\alpha_n y) + C_{1n} \alpha_n y \cosh(\alpha_n y) + D_{1n} \alpha_n y \sinh(\alpha_n y) + G_1 + G_2 y^2 \cosh(\alpha_n y) + G_3 y + G_4 y^2,$$
(35)

Ţ

$$--\frac{48 c}{a b \alpha_n^7}, \quad G_2 = -\frac{6 c}{a \alpha_n^4 \sinh{(\alpha_n b)}}, \quad G_3 = \frac{12 c}{a \alpha_n^5}, \quad G_4 = -\frac{24 c}{a b \alpha_n^5}, \quad (36)$$

 $_{n}, \ldots, D_{1n}$ étant des constantes.

Les conditions aux limites exigent que

$$Y_{1n} = 0$$
 et $Y''_{1n} = 0$ (37)

our y = 0 et y = b. On en déduit :

$$A_{1n} = \frac{48 c}{a b \alpha_n^7}, \quad B_{1n} = \frac{6 c}{a \alpha_n^5 \sinh(\alpha_n b)} \left\{ b - \frac{8 \left[\cosh(\alpha_n b) - 1\right]}{b \alpha_n^2} \right\},$$

$$C_{1n} = \frac{6 b c}{a \alpha_n^5 \sinh(\alpha_n b)}, \quad D_{1n} = \frac{6 c}{a \alpha_n^6 \sinh(\alpha_n b)}.$$
(38)

Les fonctions Y_{1n} sont donc complètement déterminées, et conséquenment ζ_1 .

Posons encore

$$\zeta_2 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_{2n} \sin(\alpha_n x) , \qquad (3)$$

où

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a},\tag{2}$$

 Y_{2n} ne dépendant que de y.

En procédant comme nous l'avons fait pour Y_{0n} et Y_{1n} , on obtient pour léfonctions Y_{2n} :

$$\frac{Y_{2n} - A_{2n} \cosh(\alpha_n y) + B_{2n} \sinh(\alpha_n y) - C_{2n} \alpha_n y \cosh(\alpha_n y)}{+ D_{2n} \alpha_n y \sinh(\alpha_n y) + H_1 + H_2 y + H_3 y^2 + H_4 y^3} + H_5 y^2 \cosh(\alpha_n y) - H_6 y^2 \sinh(\alpha_n y) + H_7 y^3 \cosh(\alpha_n y)},$$
(4

οù

$$H_{1} = -\frac{192 c}{a b \alpha_{n}^{7}}, \quad H_{2} = \frac{24 c}{a \alpha_{n}^{5}} \left(1 + \frac{4 (5 r)}{b^{2} \alpha_{n}^{2}}\right),$$

$$H_{3} = -\frac{96 c}{a b \alpha_{n}^{5}}, \quad H_{4} = \frac{96 c}{a b^{2} \alpha_{n}^{5}}, \quad H_{5} = -\frac{24 c}{a \alpha_{n}^{4} \sinh{(\alpha_{n} b)}},$$

$$H_{6} = \frac{6 c}{a \tilde{\alpha}_{n}^{4} \sinh{(\alpha_{n} b)}} \left(-\frac{1 - 3 r}{b \alpha_{n}} + \frac{1 - r}{\tanh{(\alpha_{n} b)}}\right), \quad H_{7} = \frac{2 (7 + r) c}{a b \alpha_{n}^{4} \sinh{(\alpha_{n} b)}}.$$

$$\begin{split} A_{2n} &= \frac{192\,c}{a\,b\,\alpha_n^7}\,, \quad D_{2n} = \frac{24\,c}{a\,\alpha_n^6} \frac{24\,c}{\sinh{(\alpha_n\,b)}}\,, \\ B_{2n} &= -\frac{2\,b\,c}{a\,\alpha_n^5 \sinh{(\alpha_n\,b)}} \, \left[3\,\left(7 - 3\,v \right) + \frac{48\,\left(3 + v \right)}{b^2\,\alpha_n^2} + \frac{\left(7 - 5\,v \right)\,b\,\alpha_n}{\,\mathrm{tgh}\,(\alpha_n\,b)} \right. \\ &\quad + \frac{96\,\cosh{(\alpha_n\,b)}}{b^2\,\alpha_n^2} - \frac{3\,\left(7 - 11\,v \right)}{b\,\alpha_n\,\mathrm{tgh}\,(\alpha_n\,b)} - \frac{18\,\left(1 - v \right)}{\,\mathrm{tgh}^2\,(\alpha_n\,b)} - \frac{6\,\left(1 - v \right)\,b\,\alpha_n}{\,\mathrm{tgh}^3\,(\alpha_n\,b)} \right], \\ C_{2n} &= -\frac{6\,b\,c}{a\,\alpha_n^5 \sinh{(\alpha_n\,b)}} \, \left[\begin{array}{ccc} 7 - 11\,v \\ b^2\,\alpha_n^2 \end{array} \right. + v - 3 + \frac{6\,\left(1 - v \right)}{b\,\alpha_n\,\mathrm{tgh}\,(\alpha_n\,b)} \\ &\quad + \frac{2\,\left(1 - v \right)}{\,\mathrm{tgh}^2\,(\alpha_n\,b)} \, \right]. \end{split}$$

 ζ_2 est ainsi connu. Pour la raison invoquée à propos de la première méthoc nous n'avons pas calculé d'autres fonctions ζ_i .

En introduisant les valeurs (20), (26), ... ou (33), (34), (39), ... de ζ_0 , ζ_1 , dans la formule (8), on obtient le déplacement ζ en fonction de x, y. Les formules (5) permettent ensuite de calculer les moments de flexion et de torsio

 M_x , M_y et M_{xy} , d'où l'on déduit les tensions à l'aide des relations (6) et (7). Nous ne donnerons pas ici les valeurs explicites de ces grandeurs, pour ne pas dourdir notre exposé. On pourrait d'ailleurs calculer également les réactions éparties le long des côtés, ainsi que les réactions concentrées agissant aux quatre sommets du rectangle.

Remarque. Nous avons supposé que la surface libre du liquide était au même iveau que le côté supérieur de la plaque (figure 2). Les deux méthodes que ous avons indiquées permettent cependant de résoudre sans difficulté le cas ù la surface libre est située au-dessous de ce côté, et celui où elle est située au-essus.

Ce dernier cas est évidemment le plus simple, car il suffit d'ajouter, à la aleur de \mathbb{C} que nous venons de calculer, celle correspondant à une pression onstante p_0 , agissant sur toute la surface de la plaque. On trouve par exemple, a utilisant la seconde méthode et en posant

$$\frac{\dot{p}_0}{D_0} = c_0: {(43)}$$

$$\frac{\zeta_0 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[A_{0n} \cosh(\alpha_n y) + B_{0n} \sinh(\alpha_n y) + C_{0n} \alpha_n y \cosh(\alpha_n y) + D_{0n} \alpha_n y \sinh(\alpha_n y) + \frac{4 c_0}{\alpha_n^5 a} \right] \sin(\alpha_n x), \qquad (44)$$

$$A_{0n} = -\frac{4c_0}{\alpha_n^5 a}, \quad B_{0n} = \frac{-1}{\sinh(\alpha_n b)} \cdot \frac{2c_0}{\alpha_n^4 a} \left[1 - \cosh(\alpha_n b)\right]$$

$$\left[\frac{2}{\alpha_n} - \frac{b}{\sinh(\alpha_n b)}\right], \quad C_{0n} = \frac{2c_0}{\alpha_n^5 a} \cdot \frac{1 - \cosh(\alpha_n b)}{\sinh(\alpha_n b)}, \quad D_{0n} = \frac{2c_0}{\alpha_n^5 a};$$
(45)

$$\frac{C_{1}}{A_{1n} \cosh(\alpha_{n} y) + B_{1n} \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \cosh(\alpha_{n} y)}{A_{1n} \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y)} + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \cosh(\alpha_{n} y)}{A_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y)} + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \cosh(\alpha_{n} y)} + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \cosh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \cosh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \cosh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \cosh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \cosh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \cosh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n} y \sinh(\alpha_{n} y) + C_{1n} \alpha_{n}$$

$$\frac{c_2 - \sum_{n=1,3,...}^{\infty} \left[A_{2n} \cosh(\alpha_n y) + B_{2n} \sinh(\alpha_n y) + C_{2n} \alpha_n y \cosh(\alpha_n y) + D_{2n} \alpha_n y \sinh(\alpha_n y) + H_1 + H_2 y + H_3 y^2 + H_4 y^2 \cosh(\alpha_n y) + H_5 y^2 \sinh(\alpha_n y) + H_6 y^3 \cosh(\alpha_n y) + H_7 y^3 \sinh(\alpha_n y) \right] \sin(\alpha_n x),}$$

οù

$$\begin{split} A_{2\,n} &= -\frac{24\,c_0}{a_n^5\,a} \left[1 + \frac{4\,(1+\nu)}{\varkappa_n^2\,b^2} \right], \\ B_{2\,n} &= -\frac{c_0}{\alpha_n^5\,a \sinh\left(\alpha_n\,b\right)} \left\{ \alpha_n\,b \left[\frac{4\,\nu - 8 + 2\,(7 - 5\,\nu)\cosh\left(\alpha_n\,b\right)}{\sinh\left(\alpha_n\,b\right)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{12\,(1-\nu)\left[1 - \cosh\left(\alpha_n\,b\right)\right]\cosh^2\left(\alpha_n\,b\right)}{\sinh^3\left(\alpha_n\,b\right)} \right] + 24\left[1 - \cosh\left(\alpha_n\,b\right)\right] \\ &\quad + 12\,(23 + 5\,\nu) \left[\frac{1 - \cosh\left(\alpha_n\,b\right)}{\sinh\left(\alpha_n\,b\right)} \right]^2 - \frac{36\,(7 + 3\,\nu)\left[1 - \cosh\left(\alpha_n\,b\right)\right]}{\alpha_n\,b \sinh\left(\alpha_n\,b\right)} \\ &\quad + \frac{96\,(1 - \nu)\left[1 - \cosh\left(\alpha_n\,b\right)\right]}{\varkappa_n^2\,b^2} \right\}, \\ C_{2\,n} &= 2\,\alpha_n^5\,a \sinh\left(\alpha_n\,b\right) \left\{ 30 - 12\,\nu - 2 + \cosh\left(\alpha_n\,b\right) \right. \\ &\quad \times \left[\frac{(1 - \nu)\left[1 - \cosh\left(\alpha_n\,b\right)\right]}{\sinh^2\left(\alpha_n\,b\right)} - 1 \right] \\ &\quad + \frac{12}{\alpha_n\,b} \left[4 \sinh\left(\alpha_n\,b\right) - \frac{4\,(23 + 5\,\nu)\left[1 - \cosh\left(\alpha_n\,b\right)\right]}{\sinh\left(\alpha_n\,b\right)} \right] \\ &\quad + \frac{72}{\alpha_n^2\,b^2} \left(7 + 3\,\nu\right) \left[1 - \cosh\left(\alpha_n\,b\right)\right] \right\}, \\ D_{2\,n} &= \frac{12\,c_0}{\alpha_n^5\,a} \left[1 + \frac{2\,[1 - \cosh\left(\alpha_n\,b\right)]}{\alpha_n\,b \sinh\left(\alpha_n\,b\right)} + \frac{3\,(7 + 3\,\nu)}{\alpha_n^2\,b^2} \right], \\ H_1 &= \frac{24\,c_0}{\alpha_n^5\,a} \left[1 + \frac{4\,(\frac{1 + \nu)}{\alpha_n\,b \sinh\left(\alpha_n\,b\right)}}{k^2\,b^2} \right], \quad H_2 = -\frac{96\,c_0}{\alpha_n^2\,a\,b}, \\ H_3 &= \frac{96\,c_0}{\alpha_n^2\,a\,b^2}, \quad H_4 = -\frac{12\,c_0}{\alpha_n^4\,a\,b} \left[\frac{2\,[1 - \cosh\left(\alpha_n\,b\right)]}{\sinh\left(\alpha_n\,b\right)} + \frac{5\,(5 + \nu)}{\alpha_n\,b}, \\ H_5 &= -\frac{6\,c_0}{\alpha_n^4\,a\,b} \left[4 + \frac{(1 - \nu)\left[1 - \cosh\left(\alpha_n\,b\right)\right]}{\sinh^2\left(\alpha_n\,b\right)}, \quad H_7 = \frac{2\,c_0\,(7 + \nu)}{\alpha_n^4\,a\,b^2} \right]. \end{split}$$

§ 4. Application numérique

Revenons au cas de la figure 2. Nous avons fait les calculs numériques complets, par la seconde méthode, en supposant la plaque carrée (a = b) et $\lambda = 0,2^{1}$. Pour le nombre de Poisson, nous avons pris $\nu = 0,25$.

Les diagrammes de la figure 3 représentent les valeurs obtenues pour les grandeurs ζ , M_x et M_y , le long de l'axe vertical de la plaque (x=a/2), pour trois approximations du calcul. Dans la première, on a limité la série (8) à son premier terme, dans la deuxième, à son second terme, etc.

On voit que la convergence est assez rapide et qu'il serait inutile de calculer une quatrième approximation. C'est pourquoi tous les calculs ont été faits en définitive en ne gardant que les trois premiers termes de la série (8).

La figure 4 montre les courbes de niveau des surfaces représentant les fonctions ζ , M_x , M_y et M_{xy} . Il est intéressant de constater que la surface ζ est quasi symétrique par rapport au plan horizontal y=b/2, ce qui montre que la plaque étudiée se déforme sensiblement comme si son épaisseur et sa surcharge étaient constantes. Cela signifie que la variation d'épaisseur compense, en quelque sorte, la variation de la pression, quant aux déformations.

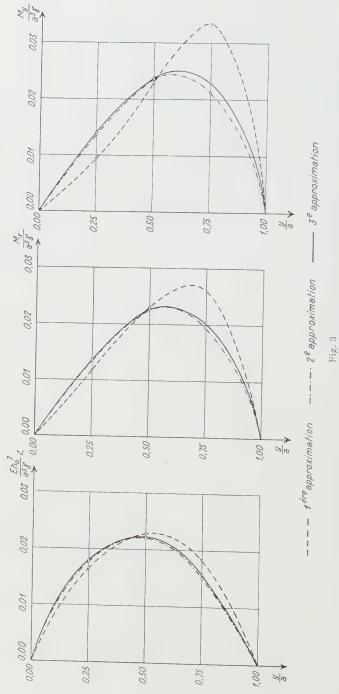
Les surfaces M_x , M_y et M_{xy} sont, par contre, loin de présenter ce caractère. Ce fait est d'ailleurs compréhensible, car la partie inférieure de la plaque, étant moins déformable que la partie supérieure, accuse des moments plus grands que dans cette dernière, où les pressions hydrostatiques sont d'ailleurs plus jaibles.

Enfin, la figure 5 montre les courbes de niveau des surfaces $(\sigma_x)_i$, $(\sigma_y)_i$ et $(\tau_{xy})_i$. Les deux premières surfaces sont, comme celle de ζ (figure 4), sensiblement symétriques par rapport au plan horizontal y = b/2. Cela est dû à un effet de compensation, analogue à celui que nous avons signalé plus haut à propos de ζ . La surface $(\tau_{xy})_i$ n'accuse malheureusement pas ce caractère de symétrie: dans la partie inférieure de la plaque règnent des tensions tangenfielles beaucoup plus grandes que dans la partie supérieure²).

Les caractères de symétrie que nous avons pu relever, qui existent malgré l'asymétrie de la surcharge par rapport à l'axe y = b/2, montrent éloquentment prôle joué par la variation linéaire d'épaisseur de la plaque. Ce rôle est favolable, puisqu'il contribue à donner une bonne répartition aux déformations et aux tensions normales dans le domaine considéré.

1) Il s'agit, par exemple, d'une plaque dont l'épaisseur varie de 8 à 12 cm.

²⁾ Les tensions tangentielles ne sont pas nulles le long du contour. Ce fait entraîne, comme uns le cas où l'épaisseur est constante, l'existence de réactions supplémentaires qu'il serait facile calculer.



Plaque de la figure 2. Cas où $a=b,\lambda=0,2$ et $\nu=0,25$. Diagrammes des grandeurs ς , M_x et M_y , le long de l'axe vertical de la plaque (x=a/2), pour les trois premières approximations.

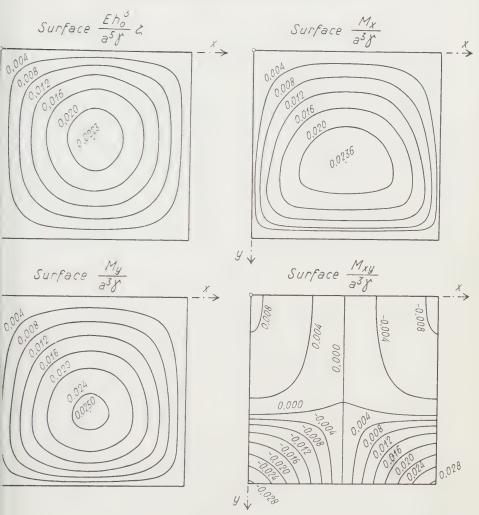
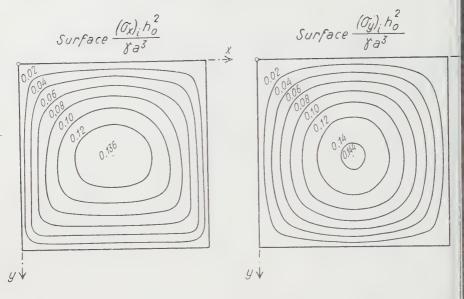
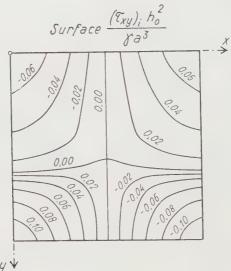


Fig. 4 eque de la figure 2. Cas où a=b, $\lambda=0$,2 et $\nu=0$,25. Courbes de niveau des surfaces $\zeta,$ $M_x,$ M_y et $M_{xy}.$





 $\begin{array}{c} \text{Fig. 5} \\ \text{Plaque de la figure 2. Cas où } a=b, \lambda=0.2 \text{ et } v=0.25. \\ \text{Courbes de niveau des surfaces } (\sigma_x)_i, (\sigma_y)_i \text{ et } (\sigma_{xy})_i. \end{array}$

Summary

This paper deals with bending of simply supported rectangular plates of linearly varying thickness. The solution of the partial differential equation of the middle surface may be reduced to the integration of a system of simpler equations by development in a series. Any of these equations has a form similar to the equation of a rectangular plate of constant thickness. The solution may be found either by the method of multiple trigonometrical series (NAVIER) or, for symmetrically distributed load, by simple series (MAURICE LÉVY).

The case of hydrostatic pressure is discussed in detail. A numerical example, with graphical results, clearly shows the influence of variability of thickness on bending, on twisting and bending moments, and on normal and shearing forces.

(Reçu le 13 juin 1952.)

Die automatische Kursregelung von Flugzeugen

Von Rudolf Glaus, Minneapolis, Minn. 1)

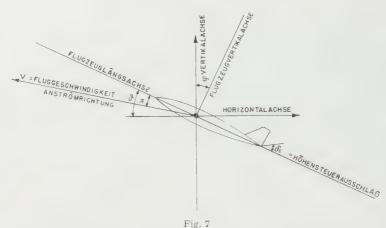
(Fortsetzung und Schluss)

7. Die automatische Kursregelung eines Flugzeuges in der Längsachse

Bei einem Langstreckenflug wird ein Flugzeug meistens in einer konstanten föhe geflogen. Dem Piloten stehen Instrumente, wie der Höhenmesser und las Variometer, zur Verfügung, welche ihm Änderungen in der vertikalen flugrichtung anzeigen. Wenn in konstanter Höhe geflogen wird, dann ist der Anstellwinkel z gleich dem Winkel θ . Hierbei ist θ definiert als der Winkel wischen Längs- und Horizontalachse des Flugzeuges, während der Anstellzinkel z als der Winkel zwischen Anströmrichtung und Flugzeuglängsachse bezeichnet wird, wie aus Figur 7 ersichtlich.

Infolge Brennstoffverbrauches ändert sich der Anstellwinkel z bei konstant sehaltener Motorenleistung. Damit das Flugzeug auf gleicher Höhe bleibt, muss geändert werden. Aufgabe der automatischen Kursregelung ist es jetzt, einen ommandierten Winkel θ_e so einzuhalten, dass sich die Höhe des Flugzeuges icht ändert. Hierbei kann der Eingang θ_e vom Piloten selber oder aber automatisch durch einen Höhenregler verändert werden. Der Ausgangswinkel θ_a lird durch einen Vertikalkreisel gemessen, wie in Figur 7 angedeutet. Das Hockdiagramm der ganzen Längssteuerung ist in Figur 8 dargestellt. Die Abeichung ϵ_1 ist wiederum die Differenz zwischen θ_e und θ_a . Sie wirkt über nen Regler auf eine Verstärker-Servomotor-Kombination. Der Ausgang des ervomotors ist über Kabel mit dem Höhensteuer verbunden. Ein Höheneuerausschlag δ_e ergibt durch das Flugzeug eine Änderung von θ_a , die, wie

¹⁾ Minneapolis-Honeywell Regulator Company, Aeronautical Division.



Schematische Darstellung eines Flugzeuges in der Längsachse.

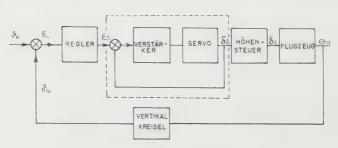


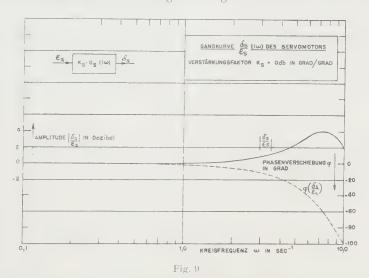
Fig. 8
Blockdiagramm für Flugzeuglängssteuerung.

bereits erwähnt, vom Vertikalkreisel gemessen wird. Damit erhalten wir einem geschlossenen Regelkreis. Alle Komponenten im Blockdiagramm von Figur 8 sollen als gegeben betrachtet werden, mit Ausnahme des Verstärkungsfaktors K_R des Reglers. Dieser soll so eingestellt werden, dass das maximale Amplitudenverhältnis $|\vartheta_a/\vartheta_e\rangle$ (i ω) | gleich 1,3 wird. Es ist ebenfalls nach der Eigenfrequenz ω_a des geschlossenen Regelkreises gefragt. Als erstes werden jetzt die Gangkurven der einzelnen Regelelemente bestimmt werden.

Regler, Verstärker und Servomotor

In unserm Beispiel sind sowohl Regler wie Verstärker und Servo elektrische Komponenten des C-1-Autopiloten, hergestellt durch die Minneapolis-Honeywell Regulator Co. Die Reglergangkurve ist vollständig beschrieben durch einem variablen Verstärkungsfaktor K_R , da die dynamischen Eigenschaften vernach-

lässigt werden können. Der Verstärkerfrequenzgang ist ebenfalls nur durch eine Konstante bestimmt. Hingegen weist der Servo dynamische Eigenschaften auf, die nicht vernachlässigt werden dürfen. Die Ausgangsseite des Servo treibt über ein Reduktionsgetriebe die Seiltrommel und ein Potentiometer. Am Potentiometer wird eine Spannung proportional der Seiltrommeldrehung abgegriffen und zum Verstärkereingang zurückgeführt. Somit wird jeder Eingangsspannung des Verstärkers ein bestimmter Drehwinkel der Seiltrommel zugeordnet. Der Frequenzgang $\delta_{\rm e} \varepsilon_{\rm e}$ der Verstärker-Servomotor-Kombination wurde experimentell bestimmt und ist in Figur 9 dargestellt.



Das Blockdiagramm in Figur 8 kann jetzt vereinfacht werden, indem δ_s/ε_s als ein Block, wie die gestrichelte Linie andeutet, gezeichnet wird.

Das Höhensteuer

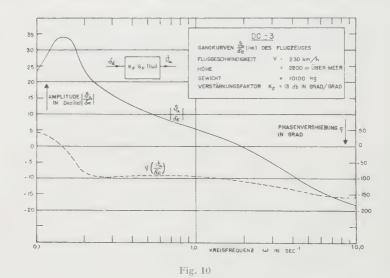
Das Höhensteuer wird mittels Drahtseilen durch den Servomotor bewegt. Als Flugzeug soll in unserem Beispiel eine DC-3 verwendet werden. Da die Eigenfrequenz von Höhensteuer und Drahtseilen viel höher ist als der Frequenzbereich, in welchem die übrigen Komponenten arbeiten, wird das dynamische Verhalten dieser Teile vernachlässigt. Hingegen ist zu beachten, dass der Hötensteuerausschlag für einen konstanten Drehwinkel der Servoseiltrommel mit ler Fluggeschwindigkeit variiert. Der Steuerausschlag ist am grössten am Boden und nimmt mit zunehmender Fluggeschwindigkeit infolge der auf das Iöhensteuer einwirkenden Luftkräfte und der Elastizität der Drahtseile ab. Da wir in unserem Fall nur einen Flugzustand betrachten, reduziert sich die

Gangkurve des Höhensteuers zu einem konstanten Verstärkungsfaktor

$$K_E = 0.44 \frac{\text{H\"ohensteuerausschlag in Grad}}{\text{Servodrehwinkel in Grad}} = -7 \text{ Dezibel}$$
. (27)

Das Flugzeug

Die dynamischen Eigenschaften eines Flugzeuges sind abhängig von Fluggeschwindigkeit, Höhe, Gewicht und Schwerpunktslage. Deshalb muss eine optimale Regeleinstellung entsprechend diesen variablen Parametern geändert werden. Wir betrachten aber hier nur den Fall, wo Fluggeschwindigkeit, Höhe Gewicht und Schwerpunktslage als konstant vorausgesetzt sind. Somit kann das Verhalten des Flugzeuges in seiner Längsachse durch eine Gangkurve beschrieben werden. Der Frequenzgang K_F G_F wurde im Flugzeug direkt experimentell durch sinusförmiges Variieren des Höhensteuers aufgenommen und ist in Figur 10 aufgezeichnet. Er kann ebenfalls aus der Differentialgleichung des



Flugzeuges abgeleitet werden, falls die aerodynamischen Konstanten für diesen bestimmten Flugzustand bekannt sind [9], [10]¹). Der analytische Ausdruck für die Flugzeuggangkurve $K_F F_{F(p)}$ hat die Form:

$$K_F G_{F(p)} = \frac{\vartheta_a}{\delta_e} (p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + b_4 p^4}.$$
 (28)

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 382!

Hierbei sind die Werte für die verschiedenen a und h durch die aerodynamischen Konstanten bestimmt. Die Berechnung des Frequenzganges mit Gleichung (28) ist sehr mühsam, da die Ausdrücke für die darin auftretenden Konstanten einen komplizierten Aufbau haben. Andererseits ist eine direkte Bestimmung des Frequenzganges im Flugzeug zeitraubend und kostspielig. Es wird deshalb oft die Antwortkurve des Flugzeuges aufgenommen und daraus der Frequenzgang bestimmt.

Der Vertikalkreisel

Dieser Kreisel errichtet eine vertikale Bezugsachse im Raum und ist als ein Pendel mit einer sehr langen Schwingungsdauer zu betrachten. Die Gangkurve des Vertikalkreisels kann durch eine Konstante $K_{\Gamma K}$ beschrieben werden, da das uns interessierende Frequenzspektrum viel kürzere Schwingungsperioden hat als der Kreisel. In unserm Beispiel ist:

$$K_{\Gamma K} = 1 \frac{\text{Grad}}{\text{Grad}} = 0 \text{ Dezibel.}$$
 (29)

Die Gangkurve K $G_{(i\omega)}$ des aufgeschnittenen Regelkreises

Es ist:

$$K G_{(im)} = K_R K_S G_{S(im)} K_E K_E G_{E(im)} K_{VK}$$
 (30)

$$K = K_R + K_S + K_E + K_F + K_{VK}$$
 in Dezibel. (31)

Hierbei ist K_R noch unbestimmt, während die übrigen Verstärkungsfaktoren gegeben sind. Es wird:

$$K = K_R + 6$$
 in Dezibel, (32)

$$G_{(i\,\omega)} = G_{S(i\,\omega)} G_{F(i\,\omega)} \tag{33}$$

oder

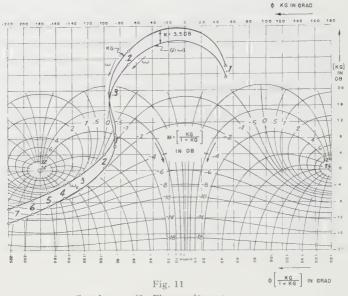
$$|G_{(i\omega)}| = |G_{S(i\omega)}| + |G_{F(i\omega)}|$$
 in Dezibel, (34)

$$\varphi_{\lceil G_{(i\,\omega)} \rceil} = \varphi_{\lceil G_{S(i\,\omega)} \rceil} + \varphi_{\lceil G_{F(i\,\omega)} \rceil}. \tag{35}$$

 $\vec{r}_{(i\omega)}$ ist im Nichols-Diagramm, Figur 11, aufgetragen.

Die Kurve $G_{\alpha m}$ wird jetzt so lange in der Vertikalrichtung verschoben, bis sie Tangente an die M-Kurve 1,3 – 2 db ist. Der Ordinatenunterschied der beiden Kurven ist gleich dem Verstärkungsfaktor K des aufgeschnittenen Regelkreises und wird aus Figur 11 abgelesen:

$$K_{max} = 3.5 \text{ Dezibel};$$
 (36)



Gangkurven für Flugzeuglängssteuerung.

daraus können wir den grösstmöglichen Verstärkungsfaktor K_R des Reglers mit Gleichung (32) bestimmen:

$$K_R = -2.5 \text{ db} = 0.75 \frac{\text{Grad}}{\text{Grad}}.$$
 (37)

Die Eigenfrequenz ω_e des geschlossenen Regelkreises wird ebenfalls aus Figur 11 abgelesen:

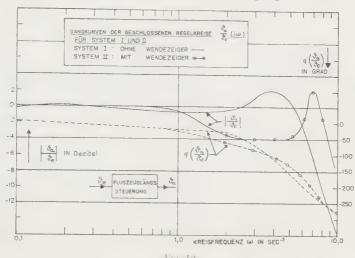
$$\omega_e = 3.75 \,\mathrm{s}^{-1}. \tag{38}$$

In Figur 12 ist die Gangkurve des geschlossenen Regelkreises für das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung über den Logarithmus der Frequenz aufgetragen. Diese Darstellungsart ergibt ein übersichtliches Bild über die Regelgüte des geschlossenen Systems.

Es ist ersichtlich, dass die Regelung über einen Frequenzbereich von 0,1 biss 2,5 s⁻¹ ein Amplitudenverhältnis von ungefähr 0 Dezibel und vernachlässigbarer Phasenverschiebung hat. Über diesen Frequenzbereich vermag der Ausgang dem Eingang sozusagen verzögerungsfrei zu folgen. Es soll jetzt untersucht werden, wie das System in Figur 8 verbessert werden kann. Oder anders ausgedrückt:

Der Verstärkungsfaktor K und die Eigenfrequenz ω_e sollen erhöht werden, und zwar wiederum für ein

$$\frac{\vartheta_a}{\vartheta_e} \; (i\; \omega)_{max} = 1,3 = M_{max}.$$



ie Vergrösserung des Verstärkungsfaktors K in einem Regelkreis hat eine reifache Wirkung: Erstens wird der Effekt von Störungen auf das statische erhalten der Regelung verkleinert, zweitens die Geschwindigkeit, mit welcher is System bei einer plötzlichen Eingangsänderung antwortet, erhöht, und rittens die Stabilität des Regelkreises vermindert. In unserm Fall hat K breits den maximalen Wert erreicht, der mit unserm Stabilitätskriterium leriert werden kann. Infolgedessen brauchen wir ein zusätzliches Regelehent, um die Gangkurve des aufgeschnittenen Regelkreises $KG_{(i\omega)}$ so zurmen, dass der Verstärkungsfaktor K erhöht werden kann. Als zusätzliches egelehement verwenden wir einen Wendezeiger, der nichts anderes als ein lerbelasteter Kreisel ist und die zeitliche Änderung von ϑ_a misst. Dadurch gibt sich ein Blockdiagramm, wie aus Figur 13 ersichtlich ist.

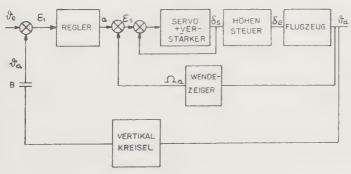


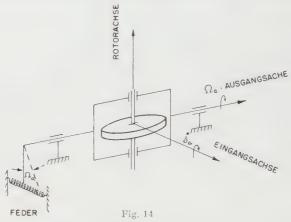
Fig. 13

Blockdiagramm für Flugzeuglängssteuerung mit Wendezeiger.

Es ist:

$$\dot{\vartheta}_a = \frac{d\vartheta}{dt} = \rho \,\vartheta \,. \tag{3}$$

Der grundsätzliche Aufbau eines Wendezeigers ist aus Figur 14 ersichtlich.



Schematische Darstellung eines Wendezeigers.

Der ideale Wendezeiger vermöchte allen zeitlichen Änderungen von θ_a für je beliebige Frequenz zu folgen. Es würde dann der Ausgang:

$$\Omega_a = K_W \not \! p \, \vartheta_a \, .$$
 (

Hierbei ist K_W die sogenannte Kreiselkonstante und in unserm Beispiel als angenommen. Bei der praktischen Ausführung eines Wendezeigers können odynamischen Eigenschaften von Kreiselmasse, Federn und Reibungskräften der Lagerung des Kardanringes im allgemeinen nicht mehr vernachlässigt weden. Sie werden mit Hilfe eines Systems zweiter Ordnung in die Gangkurdes Wendezeigers einbezogen. Wir erhalten dann:

$$\frac{\Omega_a}{\vartheta_a} (i \, \omega) = K_{\dot{\theta}} \, \frac{\omega_{e_m} \, i \, u}{-u^2 + 2 \, \xi \, i \, u + 1} \, . \tag{4}$$

Es bedeuten:

$$u = \frac{\omega}{\omega_{e_m}}$$

 $\omega = \text{St\"{o}rfrequenz s}^{-1}$

 $\omega_{e_m}=$ Eigenfrequenz von Wendezeiger s⁻¹

 ξ = Verhältnis von tatsächlicher Dämpfung zu kritischer Dämpfung des Wendezeigers.

In unserm Beispiel ist

$$\omega_{e_m} = 10 \, \mathrm{s}^{-1} \quad \text{und} \quad \xi = 0.2 \, .$$

Die Gangkurve $(\Omega_n|\theta_n|(i|\omega))$ wird erhalten durch Ersetzen von u durch ω/ω_{e_m} und ist in Figur 15 aufgetragen.

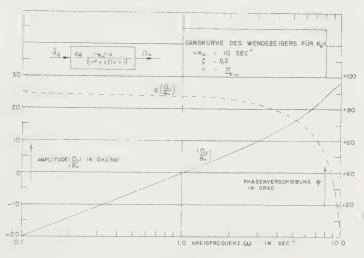


Fig. 15

Wir erhalten jetzt:

$$\varepsilon_1 = \vartheta_e - \vartheta_a$$
 (42)

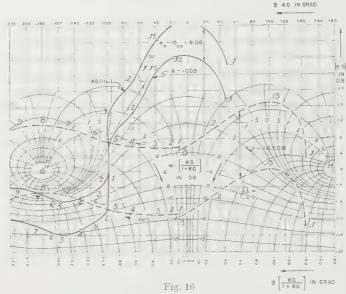
$$\varepsilon_{\rm S} = a - \Omega_a$$
, (43)

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_S - \delta_S$$
 (44)

lle Gangkurven und deren Verstärkungsfaktoren sind gleich wie im vorigen eispiel, nur dass jetzt die Gangkurve von (Ω_a/θ_a) $(i\ \omega)$ zusätzlich dazukommt. Die Bestimmung der Verstärkungsfaktoren K_R und K_e der beiden Regelkreise rfolgt so, dass die Regelung bei B zuerst aufgeschnitten und der innere Regelreis, durch Bestimmen von K_b , eingestellt wird. Es wird systematisch so vorgangen:

Zeichne die aufgeschnittene Gangkurve (Ω_a/ε_s) $(i\ \omega)$ ins Nichols-Diagramm und stelle den Verstärkungsfaktor K_θ so ein, dass M-2 Dezibel ist. Aus Figur 16 erhalten wir:

$$K_{\dot{\theta}} = -16.5 \text{ db} = 0.15 \frac{\text{Grad}}{\text{Grad s}^{-1}}$$
 (45)



Gangkurven für Flugzeuglängssteuerung mit Wendezeiger.

b) Berechne (ϑ_a/a) $(i\ \omega)$. Aus dem Nichols-Diagramm kann sofort Ω_a/a ablesen werden. Daraus erhalten wir:

$$\frac{\theta_a}{a} (i \omega) = \frac{\Omega_a}{a} (i \omega) \frac{1}{\Omega_a} \frac{1}{(i \omega)} = A.$$

Figur 13 kann jetzt wie in Figur 17 in ein Blockdiagramm vereinfacht werd

c) Die Gangkurve des Vertikalkreisels ist gleich 1, und die Gangkurve Reglers besteht ebenfalls nur aus einem Verstärkungsfaktor K_R , der vore gleich 1 angenommen wird. Damit erhalten wir durch Eintragen von A

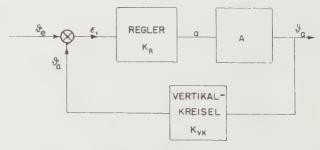


Fig. 17

Vereinfachtes Blockdiagramm der Flugzeuglängssteuerung mit Wendezeiger,

Nichols-Diagramm (Figur 16) und Verschieben dieser Kurve, bis sie M-2 db berührt, direkt K_R als Ordinatenunterschied. Da A Amplituden aufweist, die -20 db überschreiten, ist in Figur 16 als Amplitude (A+10 db) aufgetragen.

Wir erhalten

$$K_R = 18 \text{ db} = 7.9 \frac{\text{Grad}}{\text{Grad}} \tag{47}$$

ld.

$$\omega_e = 7 \text{ s}^{-1}$$
 (48)

abelle 2 ist eine Zusammenstellung der Verstärkungsfaktoren K und Eigenequenzen ω_e der beiden Regelsysteme.

Tabelle 2

		aktor des auf- Regelkreises	Eigenfrequenz des geschlossenen Regelkreises ω_e s $^{-1}$
	K _{db}	Kab	
System I (ohne Wendezeiger)	3,5	1,5	3,75
System II (mit Wendezeiger)	24	17	7,0

Aus Tabelle 2 ist ersichtlich, dass der Verstärkungsfaktor K in System II ngefähr zehnmal grösser ist als in System I, während die Eigenfrequenz fasterdoppelt wurde.

Die Gangkurve des geschlossenen Regelkreises (θ_m, θ_e) (i ω) mit Wendezeiger ebenfalls in Figur 12 eingezeichnet. Aus diesem Diagramm ist ersichtlich, ass die Amplitude bei $\omega=1~\rm s^{-1}$ von 0 db auf -4 db abzusinken beginnt, um um auf das Maximum von 2 db anzusteigen. Dieser Amplitudenverlauf ürde nicht den gewünschten Gütegrad der Regelung ergeben. Der Grund eser negativen Amplitudenausbuchtung ist darin zu finden, dass die Eigeneunz des Wendezeigers zu tief gewählt wurde. Aus Figur 16 ist ersichtlich, ass die Gangkurve bei $\omega=5~\rm s^{-1}$ zu steigen beginnt. In diesem Frequenzreich macht sich die Resonanz des Wendezeigers bemerkbar. Durch Wählen mer höheren Messwerkeigenfrequenz, zum Beispiel $\omega_{e_m}=20~\rm s^{-1}$, kann das insteigen der Gangkurve herausgezögert werden. Damit kann $G_{(i,\omega)}$ noch weiter ich oben verschoben werden, und die Annäherung an die Kurve M=0 db rid wesentlich verbessert. Mit dieser Änderung würde der gewünschte Güterad der Regelung erreicht.

8. Schlussfolgerungen

Die Berechnung einer Regelung und deren optimale Einstellung wird wesentlich erleichtert durch Verwenden der Gangkurve des aufgeschnittenen Regelkreises.

- b) Mit Hilfe des Nichols-Diagramms kann unverzüglich die Gangkurve des schlossenen Regelkreises sowie dessen Stabilität, Eigenfrequenz ω_e unwaximaler Verstärkungsfaktor K bei gegebenem M-Kriterium bestimwerden.
- c) Falls eine Regelung den gestellten Anforderungen nicht genügt, so midie Gangkurve KG durch Zufügen weiterer Regelelemente umgeformt wirden. Diese Umformung wird wesentlich erleichtert durch das Nichols-Digramm, da nur darauf geachtet werden muss, dass die Gangkurve KG ülleinen möglichst grossen Frequenzbereich der Kurve Mille ode folgt.
- d) Die Praxis hat erwiesen, dass in vielen Fällen mit Hilfe des M-Kriteriu direkt von der Gangkurve KG auf das Verhalten der Antwortkurve schlossen werden kann. Hiermit wird die Entwerfung und Änderung v. Regelsystemen, bei vorgeschriebener Regelgüte, wesentlich vereinfacht, nur die Gangkurve des aufgeschnittenen Regelkreises benötigt wird.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] WAGNER, K. W., Operatorenrechnung (Johann Ambrosius Barth, Leip 1940).
- [2] DOETSCH, G., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (Spring Berlin 1937).
- [3] GARDNER, M. F., und BARNES, J. L., Transients in Linear Systems (Jowiley & Sons, New York 1942).
- [4] Brown, G. S., und Campell, D. P., Principles of Servomechanisms (Jo Wiley & Sons, New York 1948).
- [5] JAMES, H. M., NICHOLS, N. B., und PHILIPS, R. S., Theorie of Servo-mec nisms (McGraw-Hill Book Company, New York 1947).
- [6] Bode, H. W., Network Analysis and Feedback Amplifier Design (D. v. Nostrand Co., New York 1945).
- [7] HAENNY, JOST, Regelungstheorie (Lehmann, Zürich 1947).
- [8] GREENWOOD, I. A., HOLDAM, I. V., und DUNCAN, MACRAE, Electronic struments (McGraw-Hill Book Company, New York 1948).
- [9] Perkins, C. D., Airplane Performance Stability and Control (John Wiley Sons, New York 1949).
- [10] DURAND, W. F., Aerodynamic Theory, Bd. 5 (Durand Reprinting Committee Pasadena 1943).

Summary

This paper describes a method for the analysis and optimum design of serv mechanisms. The transferfunctions of the open loop as well as the Nichols' dl gram are used for the systematic and rapid solution of control problems. As example of the application of this method, the calculation of an automatic control for the longitudinal axis of an aircraft is carried out. The simplest case is fit considered, using a vertical gyro to control the pitchaxis of the airplane. order to improve this system, a rategyro is added. This more complex systemers at the same time as a sample for the investigation of a multiloop system (Eingegangen: 19. November 1951.)

Kriterium der Gleitbereitschaft metallischer Vielkristalle

Von F. Rohner, Neuhausen am Rheinfall¹)

1. Einleitung

Wenn bei der Gleitung Bindungen zwischen den betroffenen Atomen zu ösen wären, müssten ideale Metallkristalle Elastizitätsgrenzen in der Grössendrung von 1000 kg mm² aufweisen. Die Elektronentheorie der Metalle hat um aber gezeigt, dass die metallische Bindung als kollektive Wechselwirkung wischen dem negativen Elektronengas und den positiven Atomrümpfen zutande kommt, dass also gar keine lokalisierten Bindungen zwischen einzelnen bestimmten Metallatomen existieren. Arbeit gegen die Bindungskräfte müsste dei der Gleitung deshalb nur geleistet werden, wenn diese zwangsweise mit iner bleibenden oder auch nur vorübergehenden Volumzunahme des gleitenden fetallkristalls, etwa einer Dilatation in der Normalen zur Gleitebene, verknüpft väre. Das ist aber nicht der Fall; je nach der Lage des Gleitsystems zur Beanpruchungsrichtung kann die Gleitung sogar mit einer vorübergehenden Normalontraktion verlaufen²). Die Erklärung des Widerstandes der Metallkristalle egen Gleitung bzw. die Ableitung der Grösse ihrer Elastizitätsgrenze muss eshalb auf anderer Basis gesucht werden.

W. L. Bragg³) hat 1942 die Ansicht ausgesprochen und begründet, dass in Kristallit erst dann gleiten werde, wenn er durch den Gleitprozess seine lastische Spannungsenergie verringern könne. Die elastischen Spannungen rerden auf den Kristalliten durch seine Nachbarkristallite übertragen; dies ilt sowohl für innere wie für äussere Spannungen. Bragg fasst diese einem einzelkristalliten durch seine Nachbarn aufgedrückten Spannungen als Schubbannungen auf und leitet ab, dass Gleitung eintreten könne, sobald in einem Eristalliten die Schubspannung σ den der Gleichung (1) entsprechenden Betrag treiche:

$$\sigma = G \left[\frac{s}{2 I_L} \right]. \tag{1}$$

Tabei bedeuten G, s und L den Gleitmodul bzw. den Atomabstand bzw. den Purchmesser des Gleitelements in der Gleitrichtung.

ROHNER⁴) führte 1947 aus, dass – da sich der Kristallit bei Zugbeansprung im elastischen Bereich als untergeordneter Bestandteil seines Kollektivs,

¹⁾ Forschungsinstitut der Aluminium-Industrie-AG.

²⁾ E. Schmid und W. Boas, Kristallplastizität (Springer, Berlin 1935), S. 284.

³⁾ W. L. Bragg, Nature 149, 511 (1942).

⁴⁾ F. ROHNER, J. Inst. Mct. 73, 303 (1947).

des Vielkristalls, betrage – der technische Elastizitätsmodul des Vielkristal und nicht der Gleitmodul des Kristalliten in die Formel eingehen müsse Schliesslich sei noch auf die Arbeit von Wood und Rachinger verwiesent diese Autoren schliessen sich den Anschauungen von Bragg an. Bei alle bisherigen Ableitungen wurden Querkontraktionen, die sowohl bei der elast schen Dehnung wie bei der plastischen Gleitung auftreten, vernachlässig Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, das Kriterium der Gleitung oder, besse ausgedrückt, das Kriterium der Gleitbereitschaft unter Einbeziehung diese Querkontraktionen zu präzisieren.

2. Ableitung der Ansätze zur Berechnung der Spannungsenergien

Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, nehmen wir an, dass wir mit einem aus einigermassen isometrischen Kristalliten aufgebauten Vielkristat zu tun haben und dass – wie etwa bei Aluminium – keine beträchtliche Anischtopie der elastischen Eigenschaften in den Einzelkristalliten besteht. Zur weitern Vereinfachung führen wir unsere Überlegungen an einem würfelförmige Kristalliten durch, dessen Querschnitt durch Figur 1 dargestellt sei. Wir denkt uns diesen Kristalliten als Bestandteil seines Kollektivs, des Vielkristalls, eins eindimensionalen Dehnung in dem durch einen Pfeil angedeuteten Sinne unte zogen. Bei einer bestimmten kritischen Dehnung wird eine Gleitung, etwentlang der eingezeichneten Gleitebene, erfolgen. Hernach würde der Kristallifalls er nicht zwischen seine Nachbarkristallite eingespannt wäre, die in Figur dargestellte Form aufweisen. Allgemein ausgedrückt: Wenn die Dimensioner des würfelförmigen Kristalliten der Figur 1

$$c=1$$
 , $b=1$, $a=1$

sind, so sind die Dimensionen des Kristalliten nach der Gleitung gemäss Figur

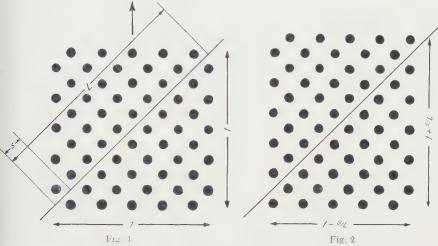
$$c=1+rac{s}{L}$$
 , $b=1-rac{s}{L}$, $a=1$,

wobei s und L Atomabstand bzw. Durchmesser des Kristalliten oder Gleielements in der Gleitrichtung bedeuten. Wenn die Gleitung bei der kritische Dehnung ε erfolgt ist, muss der Zustand Figur 2, damit die Passung mit de Nachbarkristalliten (die auf Grund ungünstigerer Orientierung und Grösse erspäter gleiten sollen) erhalten bleibt, durch elastische Gegenspannungen aufolgende Dimensionen zurückgeführt werden:

$$c=1+arepsilon$$
, $b=1-rac{arepsilon}{m}$, $a=1-rac{arepsilon}{m}$.

Das sind die Dimensionen, die der Kristallit vor Einsetzen der Gleitung – i elastisch gedehnten Zustand – aufwies. Dabei bedeutet m die Poissonsche Zah

¹⁾ W. A. Wood und W. A. Rachinger, J. Inst. Met. 75, 571 (1949).



Querschnitt durch würfelförmiges Gleitelement mit eingezeichneter Gleitebene.

Gleitelement von Figur 1 nach der Gleitung.

Die Einpassungsverformung wird sich zwar nur zum Teil an dem verformten Kristalliten, zum andern Teil aber an seinen Nachbarkristalliten auswirken. Uns nteressieren hier jedoch nur die energetischen Verhältnisse. Für deren Ableitung können wir uns denken, die Einpassungsverformung erfolge voll am verformten Kristalliten. Effektiv werden Gleitung und Einpassung gleichzeitig miteinander rfolgen. Gleitung wird nur möglich sein, wenn die zur Einpassung aufzuwenlende Verformungsenergie nicht grösser ist als die zur Erzielung der Dehnung en den Kristalliten hineingesteckte Energie. Unsere Aufgabe besteht also in der Ermittlung der Verformungsenergie für die Zurückführung des spannungslos gedachten Kristalliten nach der Gleitung (Tabelle 1, Zustand III) auf die Dimensionen des Kristalliten im elastisch gedehnten Zustand (Tabelle 1, Zutand II). Diese Verformungsenergie der Einpassung ist dann mit der Verfornungsenergie der Dehnung von Zustand I auf Zustand II zu vergleichen Tabelle 1).

Tabelle 1

Dimensionen des Einheitskristalliten im Ausgangszustand I, im elastisch gedehnten Zustand II und, nach der Gleitung um einen Atomabstand, im elastisch vollständig entspannten Zustand III

71	Kristallitendimensionen			
Zustand	С	b	а	
III II I	$1 \\ 1 + \varepsilon \\ 1 + s/L$	$ \begin{array}{c} 1 \\ 1 - \varepsilon/m \\ 1 - s/L \end{array} $	1 - arepsilon / m	

Die Verformungsenergien berechnen sich nach der Formel (2):

$$E_{(\varepsilon)} = G \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{1}{m-2} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \right)^2 \right].$$

 $E_{(e)}$ bedeutet dabei die Verformungsenergie pro Volumeinheit, G den Gle modul, der mit dem Elastizitätsmodul E in folgender Beziehung steht:

$$G=E \frac{m}{2(m+1)}.$$

Für den Spezialfall

$$arepsilon_1 = arepsilon$$
 , $arepsilon_2 = -rac{arepsilon}{m}$, $arepsilon_3 = -rac{arepsilon}{m}$

(Verformungsenergie beim Übergang von Zustand I auf Zustand II) reduzie sich Formel (2) auf Formel (3):

$$E_{\varepsilon} = \frac{m-1}{m} G \varepsilon^2$$
.

3. Berechnung und Vergleich der Spannungsenergien

Die Dehnungen für den Übergang von Zustand III auf Zustand II (Tabelle betragen:

$$\begin{split} & \varepsilon_1 = \varepsilon - \frac{s}{L} = \frac{s}{L} \left(\varepsilon^* - 1 \right), \\ & \varepsilon_2 = \frac{s}{L} - \frac{\varepsilon}{m} = \frac{s}{L} \left(1 - \frac{\varepsilon^*}{m} \right), \\ & \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon}{m} = -\frac{s}{L} \cdot \frac{\varepsilon^*}{m}, \\ & \text{wobei } \varepsilon^* = \varepsilon \overset{L}{\longrightarrow}. \end{split}$$

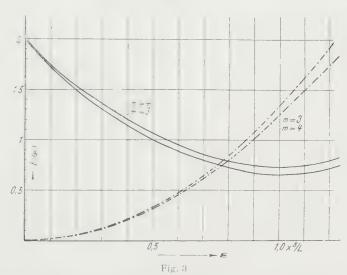
Wir können bei allen Dehnungen deren gemeinsamen Faktor s L weglasse

$$\varepsilon_1^* - \varepsilon^* = 1$$
, $\varepsilon_2^* = 1 - \frac{\varepsilon^*}{m}$, $\varepsilon_3^* = \frac{\varepsilon^*}{m}$;

das bedeutet, dass wir als Einheit der Dehnung s/L wählen. Ferner lassen waus den Berechnungen der Spannungsenergien den Faktor G weg, was dara hinausläuft, dass wir die Verformungsenergie statt für das Volum 1 für d. Volum 1/G erhalten.

Die Poissonschen Zahlen der meisten Metalle liegen zwischen 3 und Tabelle 2 gibt die Lösungen für m-3, Tabelle 3 für m-4. In Figur 3 sind die Ergebnisse dieser Berechnungen zusammenfassend dargestellt. Die Spannungenergien für die primäre Dehnung sind durch strichpunktierte Linien dargstellt, die Spannungsenergien der Einpassung durch voll ausgezogene Linie-

Zu jeder Dehnung ε ergibt sich auf der strichpunktierten Linie die Dehnungsenergie E, \dots und auf der durchgehend ausgezogenen Linie die Einpassungsenergie E, die aufgewendet werden müsste, wenn nach Erreichung ler Dehnung ε^* Gleitung erfolgen würde. Solange die durchgehend ausgezogene Linie der Einpassungsenergie über der strichpunktierten Linie der Dehnungsmergie verläuft, ist Gleitung nicht möglich. Es ergibt sich somit, dass für m-3



'erlauf der zur Einpassung eines Kristalliten in seine Umgebung erforderlichen Spannungsenergie E is Funktion der Dehnung ε , bei der Gleitung erfolgt, und im Vergleich zur Verformungsenergie, ie zur Dehnung ε gehört; solange die Einpassungsenergie grösser ist als die zu ε gehörende Verformungsenergie, kann Gleitung nicht erfolgen.

 $-\cdot -\cdot$ zur Dehnung arepsilon gehörende Verformungsenergie,

Tabelle 2

Paperle 2

Dehnungsenergien $E_{(\varepsilon_1, -\varepsilon_1/m_1, -\varepsilon_1/m)}$ und Einpassungsenergien $E_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}$ für m=3 und verschiedene kritische Dehnungen ε^* , bei denen Gleitung supponiert wird

ε*	$E_{(\varepsilon, -\varepsilon/m, -\varepsilon/m)}$	€*	€2	€	$E_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}$
0	0	-1	1	0	2,00
0,3	0,12	-0.7 -0.4	0,9	- 0,1 - 0,2	1,32 0,88
0,9	1,08	-0.1 + 0.2	0,7	0,3 0.4	0,68 0,72
1,2	1,94	7 0,4	0,0	0,1	0,12

Tabelle 3

Dehnungsenergien $E_{(\varepsilon_1, -\varepsilon_2/m, -\varepsilon/m)}$ und Einpassungsenergien $E_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}$ für m=4 und v schiedene kritische Dehnungen ε^* , bei denen Gleitung supponiert wird

€*	$E_{(\varepsilon, -\varepsilon/m, -\varepsilon/m)}$	ε_1^*	ε*2	€\$	$E_{(arepsilon_1, arepsilon_2, arepsilon_3)}$
0	0	— 1	1	0	2,0
0,3	0,125	- 0,7	0,925	0,075	1,376
0,4	0,20	0,6	0,9	-0,10	1,20
0,6	0,45	- 0,4	0,85	-0,15	0,95
0,8	0,80	- 0,2	0,8	0,2	0,80
1,0	1,25	0,0	0,75	- 0,25	0,75
1,2	1,80	+ 0,2	0,70	- 0,30	0,80

Gleitung nicht möglich ist, bevor ε den Wert 0,75 s/L erreicht hat. Für m= liegt der entsprechende Wert bei $\varepsilon=0,8$ s L. Damit haben wir einen unter Grenzwert für die Elastizitätsgrenze gewonnen. Zur Erzielung der Dehnus $\varepsilon=0,75$ s/L ist die Spannung $\sigma=0,75$ E s/L erforderlich. Da Gleitung Erkleinern Spannungen nicht eintreten kann, muss die Elastizitätsgrenze grösser sein als 0,75 E s/L. Nach unserer Erfahrung, die wir durch Beispiersoeben noch belegen werden, liegt bei kalt bearbeitetem oder an sich feinkörrt gem Aluminium die $\sigma_{0,02}$ -Grenze in der Gegend von 2 E s/L, wenn für L rönigenographisch oder elektronenmikroskopisch bestimmte Kristallitendurchmeser eingesetzt werden. Bei diesen Messungen bleiben aber immer vorhanden intrakristallin eingebaute Fremdatome und Gitterbaufehler, die die freie Weilänge der Gleitung ebenso wie Kristallitengrenzen verkürzen, unberücksichtig Die Lage der $\sigma_{0.02}$ -Grenze des Aluminiums beim zirka 2,5fachen des deraberechneten untern Grenzwertes für σ_E erscheint also durchaus plausibel.

Die Grösse L, definiert als mittlere freie Weglänge der Gleitung oder æmittlerer Durchmesser der Gleitelemente, ist – wie soeben angedeutet wurderschwer erfassbar und trägt zu einem guten Teil die Schuld daran, dass wen experimentelles Material vorliegt, das zur Nachprüfung dieser Gesetzmässilkeiten geeignet wäre. Äussere Dimensionen der Proben, Korngrössen, Mosai blockgrössen, Konzentrationen von Fremdelementen in fester Lösung, Auscheidungen und Gitterbaufehler haben alle Einfluss auf die Grösse L. An selfeinen Drähten kann ein Überwiegen des ersten Faktors, der äussern Prober dimensionen, beobachtet werden, was die oft auffallend hohen spezifische Festigkeiten solcher Feindrähte erklärt. Bei Reinmetallen sind die letztaur geführten Einflüsse ausgeschaltet oder reduziert.

Bei Reinaluminium kann durch sehr ausgiebige Kaltbearbeitung die Knstallitengrösse bis zu 1 μ Kristallitendurchmesser reduziert werden. Weite

herunter kommt man nicht; wahrscheinlich vergrössern sich kleinere Kristalliten spontan durch Rekristallisation. Die Pulvermetallurgie erlaubt aber, Reinaluminiumkörper mit noch kleinern Kristalliten gewissermassen synthetisch herzustellen¹). Deren mittlerer Kristallitendurchmesser kann aus elektronenmikroskopischen Untersuchungen des zur Sinterung verwendeten Pulvers ziemlich genau abgeleitet werden. Wir haben für zwei solcher pulvermetallurgischer Erzeugnisse aus Reinaluminium, über die nähere Angaben in der erwähnten Arbeit¹) zu finden sind, mit 0,5 bzw. 0,3 μ mittlerer Kristallitengrösse die $\sigma_{0,02}$ -Grenze gemessen. In Tabelle 4 sind die erhaltenen Werte, im Vergleich zu maximal kaltbearbeitetem Reinaluminium, den aus der Formel $\sigma_{0,02} \sim 2E$ s L berechneten gegenübergestellt. Die gemessenen Werte liegen durchgehend etwas höher als die berechneten. Ein Vergleich der drei gemessenen $\sigma_{0,02}$ -Grenzen unter sich zeigt, dass sie sehr gut dem Gesetz gehorchen, nach dem sich die Elastizitätsgrenze umgekehrt proportional zu L verändern muss.

Tabelle 4

Gemessene und nach der Formel $\sigma_{0.02} \sim 2~E~s^*L$ berechnete Elastizitätsgrenzen von Reinaluminium verschiedener Kristallitengrösse L $(E=7000~kg~mm^2,~s=2.85~{\rm \AA})$

$ m kg/nim^2$	
gemessen	
5	
11	
15	

Die in dieser Arbeit entwickelte Betrachtungsweise führt also zur Auffassung, dass der Widerstand der Metalle gegen plastische Verformung nur inlirekt, über den Elastizitätsmodul, mit den Bindungskräften des Gitters zusammenhängt, dass er aber in erster Linie durch die Einpassungsspannungen bestimmt wird, die in jedem Gleitelement wenn der Zusammenhalt mit den Nachbarelementen gewahrt bleiben soll – aufgebracht werden müssen. Diese Auffassung führt zur Konsequenz, dass ein Idealkristall von makroskopischen Dimensionen einer Verformung praktisch keinen Widerstand entgegengesetzt, also schon bei minimsten Spannungen zu gleiten beginnt. Diese Konsequenz verträgt sich aber gut mit der Erfahrung. Idealkristalle von makroskopischen Dimensionen sind allerdings praktisch nicht realisierbar. Man ist aber heute mit der Raffination vieler Metalle und der Züchtung fehlstellenarmer Kristalle

R. Irmann, A. v. Zeerleder und F. Rohner, Festschrift Ros (Vogt-Schild AG., Solothurn 950), S. 77.

so weit, dass einer Extrapolation auf die Eigenschaften des wahren Idez kristalls in vielen Fällen keine Bedenken mehr entgegenstehen. Man komm dabei immer auf eine verschwindend kleine Festigkeit des Idealkristalls.

Summary

The first section of the paper is devoted to a brief discussion of some principle of the electron theory of metals, which show that there are no definite localizations between any definite atoms of the metallic lattice. Slip is possible without any bonds being disrupted or even any energy spent against bonding forces. a crystallite making part of a polycrystal slip is possible as soon as the elast strain energy can, by slipping, be reduced. On this assumption and taking immonsideration elastic and plastic transverse contractions a stress value is derived which can be considered as a lower limit for the advent of slip. It is inverse proportional to the diameter of the crystallite or more exactely to the free paper of slip and to some extent dependent on Poisson's ratio. Determinations of the elastic limit of wrought and of sintered pure aluminium samples are given a shown to be in accordance with this theory.

(Eingegangen: 10. Mai 1952.)

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

Bemerkungen über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren

Von Fritz Lüdi, Baden¹)

1.

Es wird gezeigt, dass die in einer früheren Arbeit über die Travelling-Wave Tube²) benützten Ausgangsgleichungen folgende Erweiterungen ohne zusätzlict Ableitungen über Raumladungskräfte enthalten:

- a) Plasmaschwingung (Plasmafrequenz),
- b) freier Einelektronenstrahl,
- c) Doppelstrahlverstärker,
- d) Travelling-Wave-Tube.

Dabei kommt als wesentliches Resultat heraus, dass die Plasmaschwingur (das heisst die Raumladungskräfte) nur bei b und c, aber nicht bei d eine Einfluss hat. Dieses Resultat steht offenbar im Widerspruch mit dem ander Autoren und sei damit zur Diskussion gestellt.

Die Ausgangsgleichungen der Arbeit [I] seien nochmals ohne das Ersatt schema angeschrieben.

- 1) AG. Brown, Boveri & Cie., Baden.
- 2) W. Frey und F. Lüdi, ZAMP 1, 237 (1950) (hier zitiert: Arbeit [I]).

(8)

Für die Helix

$$C \ \dot{U} - I' - I'_1 = 0 \ , \tag{1}$$

$$L \dot{I} - U' = 0 , \qquad (2)$$

$$L dx \dot{I} - dU_{\rm I} = 0. ag{3}$$

Für den Elektronenstrahl

$$\varrho_0 \, v - v_0 \, \varrho - i = 0 \,, \tag{4}$$

$$i' - \dot{\varrho} = 0 , \tag{5}$$

$$\dot{v} - v_0 v' = \frac{e}{m} E \tag{6}$$

Punkt bedeutet Ableitung nach der Zeit, Strich Ableitung nach der Koordinate x, ndex 0 Gleichstromanteil).

Dazu die Kopplungsgleichung

$$I_1 = i - C_l \dot{E} \tag{7}$$

 $dU_1 = E dx$.

 $_{l}=F/(4~\pi)$ ist die Längskapazität der Verzögerungsleitung pro Längeneinheit, ber welche Kreis und Elektronenstrahl miteinander gekoppelt sind. Gleichung (7) ntspricht der fundamentalen Maxwellschen Gleichung über die totale divergenzeie Stromdichte

$$c = i + \frac{1}{4\pi} \dot{\mathfrak{E}} .$$

in unseren Gleichungen sind Ströme statt Stromdichten und Ladungen pro änge 1 statt Ladungsdichten verwendet.) Es ist von ausschlaggebender Bedeu- \log dass E das totale Feld ist und sich in ein inneres E_i und ein äusseres E_a aufoalten lässt (vgl. Arbeit [I]).

E_i rührt von der Raumladung her und ist gegeben durch:

$$\dot{E} = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_{I}}$$

r $I_1=0$ (keine Helix). E_a ist das Feld, das durch die Ladungen auf der Kopplungskapazität $\dot{Q}=I_1$, r i = 0 (kein Elektronenstrahl) entsteht.

$$\dot{L}_a = \frac{l_1}{C_1}$$
.

ie eingangs erwähnten Erweiterungen werden nun einzig durch den Ersatz von leichung (7) durch

$$I_1 = \sum i_k + C_L \dot{E} , \qquad (7')$$

is heisst im allgemeinen Fall für mehrere Elektronenstrahlen, erreicht. Wie in er Arbeit [I] werden aus den Gleichungen (1) bis (6) und (7') einerseits das fluenzierte Feld E in Funktion der Elektronenströme i_k und andererseits die odulierten Elektronenströme i_k als Funktion des Feldes E ausgerechnet, wobei explizit in E_i und E_a aufgespalten ist; man erhält bei Verwendung des Ansatzes

für alle Wechselgrössen:

$$\left(E_{a} - \frac{\sum_{j} i_{k}}{\rho C_{i}}\right) = \frac{p \Gamma^{2} L}{p^{2} L C \Gamma^{2} (1 + p^{2} L C_{i})} \sum_{k} i_{k}, \qquad (i_{k} = \frac{e/m \cdot i_{0k}/v_{0k} \cdot p}{(p + \Gamma v_{0k})^{2}} \left(E_{a} - \frac{\sum_{j} i_{k}}{\rho C_{j}}\right).$$

2. Lösung der Gleichungen (8) und (9)

Für die verschiedenen Fragestellungen können die Gleichungen einzeln od in Kombination diskutiert werden.

a) Die Plasmafrequenz ergibt sich als direktes Nebenresultat aus (9) für er ruhendes Elektronenplasma $v_0=0$ ohne elektrischen Kreis $E_a=0$ mit p=j Ω

$$\Omega^2 = \frac{e}{m} 4 \pi \frac{\varrho_0}{F} \qquad \left(\varrho_0 = \frac{i_0}{v_0}\right) \quad (1)$$

und ist schon früher aus ähnlichen Grundgleichungen abgeleitet worden¹).

b) Ein Elektronenstrahl. Für $v_0 \neq 0$ erhält man aus (9) mit dem Wert (10) ölt charakteristische Gleichung für \varGamma

$$1 + \frac{\Omega_1^2}{(p + \Gamma v_{01})^2} = 0.$$
(1)

c) Zwei Elektronenstrahlen (Doppelstrahlverstärker). Es folgt analog aus (durch Elimination von i_1 und i_2

$$1 + \frac{\Omega_1^2}{(p + \Gamma v_{01})^2} + \frac{\Omega_2^2}{(p + \Gamma v_{02})^2} = v.$$
 (1)

d) Ein Elektronenstrahl mit Helix (Travelling-Wave-Tube). Hierfür ergibt (Elimination von i und $E=E_a-(i/p\ C_l)$ aus (8) und (9)

$$1 = \frac{-\Gamma^2 \Gamma_0^2/C}{\Gamma^2 \Gamma_0^2} \cdot \frac{e/m \cdot i_0/v_0}{(p - \Gamma v_0)^2} = 0.$$
 (10)

 Γ_0 ist der Wert für die Ausbreitungskonstante, den man aus (8) für die elektrenenstrahlfreie Helix i=0 erhält (vgl. Arbeit [I]).

3. Diskussion und Vergleich mit anderen Resultaten

Den Vergleich machen wir mit einer von R. Warnecke, O. Döhler un W. Kleen gemachten Publikation²).

b und c stimmen mit a und b der Arbeit [II] überein. Die Raumladungskräft und die Wechselwirkungskräfte zwischen zwei Strahlen erscheinen hier als W kung des inneren Feldes gemäss Gleichung (7).

¹⁾ G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik, 5. Auflage (Akademische Verlagsgesellsche Becker & Erler, Leipzig 1943), S. 676.

²⁾ Wireless Engineer 28, 167 (1951), Part. 1, Nr. 6 (hier zitiert: Arbeit [II]).

Bezüglich d tritt eine Diskrepanz mit der obgenannten Arbeit und den dort zitierten Autoren auf. Die Berücksichtigung der Raumladungskräfte gibt nämlich hier kein neues Resultat gegenüber den Berechnungen ohne Raumladungskräfte [Fall c in Arbeit [II], welcher gleichbedeutend mit dem Resultat der Arbeit [I]

st). Fall d der Arbeit [II] ist nach dieser Berechnung hinfällig.

Der Grund scheint uns in folgendem zu liegen: Die Berechnung der anderen Autoren erfolgt nicht unter Benützung der fundamentalen Kopplungsgleichung [7], sondern nur mit Hilfe des äusseren Feldes, zum Beispiel mit einer Energiebilanz (Arbeit [II]). Das innere Feld wird durch eine Zusatzbetrachtung eingeführt. Dadurch entsteht eine Unsymmetrie in den Gleichungen. Wenn zum Beispiel in Gleichung (8) links E durch E_a ersetzt wird, so bekommen wir mit (9) nuch eine von Ω abhängige charaktenstische Gleichung für die Travelling-Wave-Tube; sie entspricht dem Fall d der Arbeit [II] bzw. den dort zitierten Autoren Lhu und Jackson, Rydbeck, Lapostolle. Der tiefere physikalische Grund iegt offenbar darin, dass durch das mitlaufende Feld in der Helix die Raumadungskräfte kompensiert werden, was bei freien Elektronenstrahlen nicht der fall ist, und dies scheint unabhängig vom Kopplungsfaktor α zwischen Elektronenstrahl und Helix zu sein (vgl. Arbeit [I]; α hier = 1 gesetzt).

Die Folgerungen aus diesen Betrachtungen sind also in Übereinstimmung nit den Messungen von Cutler und Quate¹) und anderen Autoren, wonach durch

lie Überlagerung der beiden Raumladewellen

$$\varGamma_{1}=-\,j\,\frac{\omega}{v_{0}}\left(1+\frac{\varOmega}{\omega}\right),\quad \varGamma_{2}=-\,j\,\frac{\omega}{v_{0}}\left(1-\frac{\varOmega}{\omega}\right)$$

nach (11) längs eines freien Elektronenstrahles im Triftraum Maxima und Minima ler Verdichtungen auftreten und die Rauschzahl eines Klystrons bei passender Vahl des Laufwinkels zwischen Kathode und Modulationsresonator auf ein Mininum herabgedrückt werden kann. Dies gilt auch für den Eintritt in eine Traveling-Wave-Tube, nicht aber für deren Interaktionsraum.

Summary

It is shown that plasma oscillations have an effect in the field-free drift space f the klystron and in the double-beam tube, but not in the interaction space of he travelling-wave tube.

Eingegangen: 20. Mai 1952.)

¹⁾ C. C. Cutler und C. F. Quate, Phys. Rev. 80, 875 (1950).

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 3. Mai 1952 in Baden

Berichte über angewandte Physik und Mathematik

Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, von H. Ziegler, ETH., Züric

Die mechanischen Systeme können¹) in konservative [und zwar (a) nich-gyroskopische und (b) gyroskopische] sowie nichtkonservative [(c) dissipativ (d) zirkulatorische und (e) instationäre] Systeme eingeteilt werden. Die bei Stabilitätsuntersuchungen meist verwendeten statischen Verfahren (Gleichgewicht und Energiemethode) sind aber nur bei Systemen der Gruppe (a) mit der kinetischen gleichwertig. Bei anderen, vor allem solchen der Gruppe (d), führe sie vielfach zu Fehlschlüssen²).

Die Knicklast des tangential gedrückten Stabes, von M. Beck, Zürich³).

Da die Richtung der tangentialen Druckkraft durch den Ort des Stabend punktes allein nicht bestimmt wird, ist diese Belastung nichtkonservativ: «liegt ein zirkulatorisches System vor⁴). Die Knicklast muss deshalb mit der kinetischen Stabilitätskriterium berechnet werden⁵); dabei zeigt sich eindrücklich das Versagen des statischen Verfahrens.

Elektronisches Rechengerät zur Auswertung von Windkanalmessunger von H. R. Voellmy, Zürich⁶).

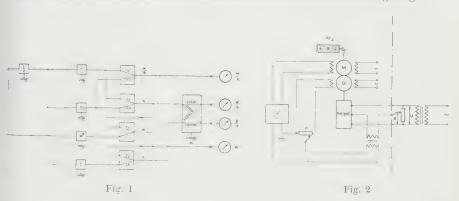
In der Messtechnik steht man immer wieder vor der Notwendigkeit, ein Vielzahl von zunächst bedeutungslosen Messgrössen in endgültige Messresulta umzurechnen. Diese Auswertearbeit benötigt nicht nur viel Zeit, sie ist auch einständige Quelle für Rechenfehler. Es liegt auf der Hand, hier Rechengeräte ein zusetzen, welche die Auswertung rasch und fehlerfrei durchführen.

Im folgenden wird ein elektronisches Rechengerät beschrieben, das zur Auwertung von 3-Komponenten-Messungen mittels Straingage-Wagen am Wingkanal dient. Die drei Komponenten M, W und A müssen dabei nach folgender Formeln berechnet werden:

$$\begin{split} \frac{M}{q} &= \frac{-c_1 \, n_1 + c_2 \, n_2}{q} \,, \\ \frac{W}{q} &= \frac{T \cos \alpha + N \sin \alpha}{q} \,, \\ \frac{A}{q} &= \frac{N \cos \alpha - T \sin \alpha}{q} \,, \end{split} \qquad \begin{aligned} N &= c_3 \, n_1 + c_4 \, n_2 \,, \\ \alpha &= \alpha^* + c_5 \, N \,, \\ T &= c_6 \, t + c_7 \, \alpha \,\,, \end{aligned}$$

- 1) Wie eine noch unveröffentlichte Untersuchung zeigt.
- 2) Vgl. H. Ziegler, Ing.-Arch. 20, 49 (1952).
- 3) Assistenz für technische Mechanik, ETH.
- 4) Vgl. Referat von H. Ziegler, Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik.
- ⁵) Vgl. M. Beck, ZAMP 3, 225 (1952).
- 6) Contraves AG.

wobei die Grössen n_1 , n_2 und t die Messgrössen sind, α^* und q Einstellgrössen bedeuten und die Koeffizienten $c_1 \dots c_7$ feste Werte sind. Das in Figur 1 dargestellte Blockschema zeigt, wie in diesem Analogiegerät obige Formeln durch Addieren und Subtrahieren von Spannungen und durch Multiplizieren von Spannungen mit Wellenstellungen realisiert werden. Mittels Potentiometern werden die Messund Einstellgrössen in ihre entsprechenden Spannungswerte verwandelt, wobei ein auf jedes Potentiometer umschaltbares Nachlaufvoltmeter die zahlenmässige Kontrolle der eingestellten Werte erlaubt. Sobald alle Eingangsgrössen eingestellt sind, werden mit dem gleichen Nachlaufvoltmeter der Reihe nach die Resultatwerte α , M/q, W q und A/q abgetastet und wiederum durch das Zählwerk angezeigt.



In Figur 2 ist das Schema des Nachlaufvoltmeters dargestellt. Die einzustellende (oder zu messende) Spannung e wird mit der Spannung an einem genau linearen Potentiometer verglichen (sogenannter Helipot, Präzisionspotentiometer mit total 10 Umgängen). Die Differenzspannung speist über einen Verstärker den Motor M stets so, dass die Differenzspannung verschwindet (sogenannter Nachlauf). Ein an der Potentiometerwelle mit entsprechendem Übersetzungsverhältnis angeschlossener Umlaufzähler zeigt somit direkt das Verhältnis der Spannung e zur Spannung U am Potentiometer an. Der auf der gleichen Welle sitzende Generator G bewirkt mit seiner Gegenspannung lediglich eine Stabilisierung des ganzen Nachlaufsystems, wobei die Nachlaufzeitkonstante am Potentiometer P eingestellt werden kann.

Der grosse Vorteil des Vergleichsvoltmeters mit Nachlauf besteht neben der zahlenmässigen Angabe der Werte in seiner Unempfindlichkeit gegen Schwankungen der Referenzspannung U, da stets ein Spannungsverhältnis bestimmt wird.

Das Rechengerät, das nicht grösser als ein normaler Radio ist, enthält demnach neben dem Netzteil einen Röhrengenerator mit Verstärkern zur Erzeugung der Referenzspannung U und zur Speisung der Motor-Generator-Gruppe, das Nachaufsystem mit den dazugehörenden Verstärkern und das Rechennetzwerk.

Die Genauigkeit des Rechengerätes hängt im wesentlichen von der Linearität des Helipots ab und beträgt rund 2 Promille, was für die meisten technischen Anwendungen genügen dürfte.

Während der Messung am Windkanal können nun von einem Gehilfen die aufenden Auswertungen vorgenommen und sogleich graphisch aufgetragen verden, so dass der Versuchsingenieur sein Messprogramm stets den erhaltenen Resultaten anpassen kann!

In weiterer Vereinfachung des Mess- und Auswertevorganges ist vorgeseher die von den Straingage-Wagen gelieferten Spannungen direkt in das Rechengers zu leiten, so dass der Vorgang des Übertragens der Werte wegfällt. Ferner werde die Resultate von mehreren Vergleichsvoltmetern auf Schreibgeräte übertragen so dass die gesuchten aerodynamischen Beiwerte direkt als Funktion des ebenfal aufgezeichneten Anstellwinkels aufgetragen werden.

Analogierechengeräte mit linearen Potentiometern, von Λ . P. Speiser Zürich¹).

Unter Verwendung von linear gewickelten Präzisionspotentiometern der käu lichen Bauart und von ohmschen Widerständen lassen sich Rechengeräte bauer Die elementaren Rechenoperationen werden durch einfache Schaltungen ausgeführt. Ausserdem können vorgegebene Funktionen mit einer oder mehreren Vzriablen durch Approximation mittels rationaler Funktionen dargestellt werder entsprechende Verfahren zur Ermittlung der Schaltungsparameter sind entwilkelt worden. Auf dieser Grundlage sind Geräte zur Auswertung von ständig wie derkehrenden mathematischen Ausdrücken sowie zur Lösung von nichtlinearer Gleichungssystemen gebaut worden. Die Geräte können mit bescheidenen Koste und innert kurzer Frist gebaut werden; sie sind robust, einfach zu bedienen un benötigen nur einfachste Stromquellen. Ein ausführlicher Bericht über dies Konstruktionen wird demnächst erscheinen.

Schaufelschwingungen, von CH. Bellenot, Baden²).

Der Autor führte einen Film über Schwingungen an Flügelgittern vor ungab dazu einige theoretische Erläuterungen.

Eine neue Auswertemethode für Hitzdrahtmessungen, von G. Dätwyler Zürich.

An Hand der Kingschen Gleichung (auch in stark verallgemeinerter Formüber das Wärmegleichgewicht bei Hitzdrahtsonden in Strömungen lässt sic zeigen, dass ein einfacher linearer Zusammenhang besteht zwischen äquivalente Geschwindigkeits- und Heizstromänderungen, die entgegengesetzt gleiche Tenperatur- und Widerstandsänderungen der Sonde bewirken.

Der Proportionalitätsfaktor zwischen den äquivalenten Geschwindigkeit und Heizstromänderungen ist eine eindeutige und universell gültige, ein für alle mal berechenbare Funktion der Reynolds-Zahl des Hitzdrahtes in der Strömung wie durch zahlreiche Messresultate experimentell bestätigt ist.

Hieraus lässt sich eine neue, einfache und rasche Auswertemethode für Tubulenzmessungen mit dem Hitzdrahtanemometer gewinnen.

Wahl der Grundbahnen zur Bestimmung ganzer Flugbahnscharen be Raketen, von E. Roth, Luzern, und R. Sänger, ETH., Zürich.

In einer früher erschienenen kurzen Mitteilung³) wurde darauf hingewiesen wie ein Satz von Poincaré über die Parameterabhängigkeit der Lösungen vor Differentialgleichungen zur Berechnung von Flugbahnscharen herangezoge werden kann. Sollen bei der Interpolation die extremalen Abweichungen von de wahren Werten dem Betrage nach einander gleich sein, so bedeutet dies eine spo

¹⁾ Institut für Angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ AG. Brown, Boveri & Cie.

³⁾ E. Roth-Desmeules, Zur Berechnung der Flugbahnscharen ferngesteuerter Raketen, ZAMP 487-489 (1951).

zielle Wahl der Parameterwerte der zu berechnenden Grundbahnen. Es wird gezeigt, dass nach geeigneter Variablentransformation diese Werte sich als Nullstellen von Tschebyschewschen Polynomen ergeben.

Synchronisierung von Reflexoszillatoren, von A. H. Abdel Dayem, Zürich1).

Es ist bekannt, dass man einen selbsterregten Generator durch eine eingeprägte Fremdspannung synchronisieren kann, sofern die Frequenz des Fremdsignals angenähert in einem einfachen rationalen Verhältnis zur Frequenz des selbsterregten Signals steht. Es existiert immer eine bestimmte Synchronisierungsbreite, welche sowohl von der Grösse des Fremdsignals und den Daten des Schwingsystems als auch von den Eigenschaften der nichtlinearen Kennlinie des Generators abhängig ist.

Wie in den verschiedenen Frequenzgebieten der Hochfrequenztechnik findet man auch im Mikrowellengebiet wichtige Anwendungen für den synchronisierten Generator. Daher ist die Kenntnis von Theorie und Anwendung der Synchronisierung selbsterregter Generatoren auch im Mikrowellengebiet von grosser Wichtigkeit. In einer demnächst erscheinenden Arbeit²) wird diese Frage insbesondere am Reflexoszillator (Reflexklystron) untersucht, der im Bereiche von 8 cm bis 1 cm Wellenlänge Verwendung findet, wenn keine grossen Leistungen erforderlich sind, wie zum Beispiel beim Überlagerungsempfang, bei Signalgeneratoren für Messzwecke usw.

Im wesentlichen besteht ein Reflexoszillator aus einem Schwingsystem (Hohl-raumresonator), das durch einen gesteuerten Strom erregt wird, das heisst einen Strom, der von der Spannung abhängig ist, die am Schwingsystem liegt. Diese Strom-Spannungs-Abhängigkeit ist durch eine nichtlineare Funktion darstellbar, die durch den Mechanismus von Geschwindigkeitsmodulation und «Bunching» gegeben ist. Mit Hilfe dieses vereinfachten Bildes lässt sich der eingeschwungene

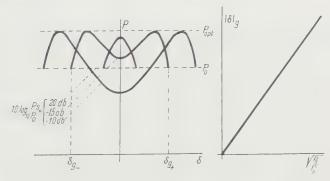


Fig. 1

Verhalten des durch ein Fremdsignal synchronisierten Reflexoszillators.

- P Ausgangsleistung im synchronisierten Zustand;
- Po Ausgangsleistung im «ungestörten» Zustand;
- P_{opt} optimale Ausgangsleistung vom Reflexoszillator;
- P. Leistung des eingeprägten Fremdsignals;
- P_g Leistung des emgeprage
- δ Verstimmung;
- $|\delta|_q$ Grenzverstimmung des Synchronisierungsgebietes.

¹⁾ Institut für Hochfrequenztechnik der ETH.

²⁾ Dissertation ETH. (1952).

Zustand des synchronisierten Reflexoszillators berechnen. Für einen durch ein unabhängiges Fremdsignal synchronisierten Reflexoszillator ergibt die theoretisch Berechnung die Resultate in Figur 1.

Für den Fall der gegenseitigen Synchronisierung zweier identischer Reflexoszillatoren sind die theoretisch berechneten Kurven in Figur 2 dargestellt.

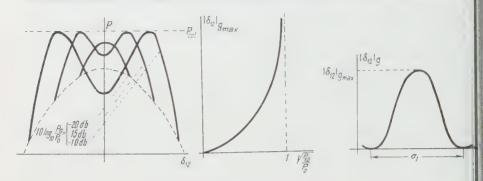


Fig. 2

Verhalten zweier identischer Reflexoszillatoren im gegenseitigen Synchronisieren.

P Ausgangsleistung von einem Reflexoszillator;

 P_{12} Leistung gekoppelt von einem Oszillator zum anderen;

 δ_{12} relative Verstimmung der Hohlraumresonatoren;

 ψ Länge des Kopplungsweges, dargestellt als Winkel.

Das Experiment bestätigt in allen Teilen die Aussagen der Theorie.

Ein Laboratoriumsgerät zum Auffinden von Undichtigkeiten in Hochvakuumsystemen (Leak-detector), von G. Weibel, Zürich¹).

Angesichts der technologischen Schwierigkeiten, hochvakuumdichte Gefässund Systeme (Glas-Metall-Verschmelzungen, Schweiss- und Lötnähte, Gussteilsusw.) herzustellen, haben Geräte zur Lokalisierung von Undichtigkeiten gross-Bedeutung gewonnen. Die Empfindlichkeit solcher Instrumente ist je nach Methode und apparativem Aufwand sehr unterschiedlich.

Im Institut für Hochfrequenztechnik an der ETH. wurde für das Arbeiten mit demontierbaren, experimentellen Röhrensystemen und verschiedenen Hilfsapparaten das nachfolgend kurz beschriebene Gerät entwickelt, welches hohe Empfindlichkeit bei relativ geringem Aufwand erzielt. Das Prüfen findet unte normalen Vakuum-Betriebsbedingungen statt. Mit einem Suchstrahl von Testgas wird das System von aussen her abgestrichen, während ein dem Vakuumraum angeschlossener Indikator auf Spuren eindringenden Testgases reagiert.

Das System spricht auf den beim Überstreichen der Undichtigkeit hineindif fundierenden Testgasimpuls genau so an wie ein elektrisches Netzwerk aus R- und C-Elementen auf einen eingespiesenen Stromstoss (Analogien in Grund gleichungen); Zeitkonstanten, Impulsflankensteilheit und asymptotischer Druck anstieg lassen sich aus den Systemgrössen ermitteln.

Die Verhältnisse an der Indikatormesszelle, hier beim vorliegenden Gerät ein normales Magnetron-Ionisationsmanometer («Philips-Manometer»), wurden ge

¹⁾ Institut für Hochfrequenztechnik der ETH.

nauer betrachtet; sowohl die Änderungen der Partialdrücke Luft-Testgas als auch damit verbundene Änderungen des Totaldruckes bewirken eine differentielle Variation des Manometerstromes. In einer Brückenschaltung oder mit Hilfe eines differenzierenden Netzwerkes wird sodann eine Signalspannung gewonnen, einem streng symmetrischen Gleichstromverstärker und Modulator zugeführt, welcher ein akustisches Signal mit einer der Eingangsspannung proportionalen Frequenz erzeugt.

Theoretisch kann der gebaute Leak-detector bei einem Vakuumrezipienten von V=5l und einer effektiven Saugleistung S=2l/s beispielsweise im Druckgebiet von $p=10^{-5}$ bis 10^{-6} mm Hg eine Einrinnmenge von $Q=10^{-8}$ l/s mm Hg mit einer Zeitkonstanten von T=2,5s noch deutlich anzeigen ($\Delta f=100$ Hz). Durch interne Gasquellen (Gasausbrüche diverser Art bei nicht gut entgasten Systemen) wird beim beschriebenen Indikator die nutzbare Empfindlichkeit herabgesetzt. Es wurde auf eine symmetrische Brückenschaltung mit zwei Manometerröhren verwiesen, die es gestattet, mit einfachen Mitteln zwischen Testgas und systemeigenem Gas zu diskriminieren (gasselektive Anzeige) und damit die volle Empfindlichkeit auszunutzen.

Literatur:

F. M. Penning, Tiefdruckmanometer, Philips' techn. Rdsch. 2, 201–208 (1937).
F. M. Penning und K. Nienhuis, Bauart und Anwendung einer neuen Ausführung des Philips-Vakuummeters, Philip's techn. Rdsch. 11, 116–123 (1949).

Über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren, von F. Lüdl, Baden¹).

Es wird gezeigt, dass die Plasmaschwingung im feldfreien Triftraum des Klystrons und in der Zweielektronenstrahlröhre einen Einfluss hat, nicht aber im Interaktionsraum der Travelling-Wave-Tube. Ausführliche Publikation siehe ZAMP 3, 390 (1952).

Wärmespannungen in elastischen Körpern, von F. Salzmann, Zürich²).
Ausführliche Darstellung dieses Problems siehe ZAMP 3, 129 (1952).

Der Einfluss der Molzahländerung auf den Wirkungsgrad von Verbrennungsmaschinen, von W. Traupel, Winterthur³).

Es wird gezeigt, dass die Änderung der Molzahl, die bei der Verbrennung im allgemeinen auftritt, einen Einfluss auf den Wirkungsgrad von Verbrennungsmaschinen (Verbrennungsmotoren und Gasturbinen) ausübt. Molzahlvergrösserung verbessert den thermischen Wirkungsgrad, Molzahlverkleinerung verringert ihn. Am Beispiel eines idealisierten Gasturbinenprozesses wird dies anschaulich gemacht. Bei Molzahlvergrösserung wäre es grundsätzlich sogar denkbar, aus einem Kreisprozess Arbeit zu gewinnen, selbst wenn die ganze fühlbare Wärme (Heizwert) dem Prozess sogleich wieder nach aussen entzogen wird. Damit besteht auch grundsätzlich die Möglichkeit, den Carnot-Wirkungsgrad zu überschreiten. Es wird dabei eine gewisse Wärmemenge der äusseren Umgebung entzogen und in Arbeit verwandelt, was keinen Widerspruch zum zweiten Hauptsatz darstellt, da ja ausserdem eine chemische Umsetzung vollzogen wird und die Entropiesumme im ganzen zunimmt.

¹⁾ AG. Brown, Boveri & Cie.

²⁾ Forschungsabteilung Escher-Wyss AG.

³⁾ Gebr. Sulzer AG.

Bei technischen Prozessen wird der Einfluss in bestimmten Fällen deutlic bemerkbar, und zwar im negativen Sinne (Molzahlverminderung bei Brenngaser die einen grossen Gehalt an CO aufweisen). Ein Brennstoff, bei dem ein grosse positiver Effekt erzielt werden könnte, wäre Methylalkohol. Genaueres siehe W. Traupel, Der Einfluss des Brennstoffes auf den Wirkungsgrad von Verbrer nungsmaschinen, Allg. Wärmetechn. 3, 1–9 (1952).

Rechnungs- und Messergebnisse über Hautkondensation an gewellte: Oberflächen, von R. Gregorig, Zürich¹).

Nach einer einleitenden Übersicht über Haut- und Tropfenkondensation wir die Möglichkeit der Hautkondensation an einer unebenen Oberfläche erörter Die Oberflächenspannungen rufen, der verschiedenen Krümmungen der Kondersatoberfläche wegen, sehr starke Druckgradienten hervor. Letztere können ei grosses Vielfaches (ein paar Zehnerpotenzen) grösser als diejenigen des Schwerch feldes sein. Starke Druckgradienten ergeben, aus Gleichgewichtsgründen, dünn. Kondensathäute, was nach der Theorie von Nusselt zu grossen Wärmeüber gangszahlen führt. Für einen Kondensator mit vertikalen Rohren, die mit Rille! parallel zur Rohrachse versehen waren, sind für gegebene geometrische Verhält nisse die mit Differenzenrechnung erhaltenen Wärmeübergangszahlen angege ben worden. Letztere sind durch Versuche bestätigt. Zwei Kennzahlen der Model! ähnlichkeit bestimmen die Nusseltsche Zahl des Wärmeübergangs. An Handieses Ähnlichkeitsgesetzes, das mit Versuchen bestätigt worden ist, wurden fü verschiedene Dämpfe die Wärmeübergangszahlen an gerillten Rohren mit jenen an glatten Rohren verglichen. Dabei betrug das Verhältnis der letztgenannten Wärmeübergangszahlen etwa (5 ÷ 7) zu 1.

Paul Felix Neményi June 5, 1895 – March 1, 1952

Neményi's life-long interest was pure mechanics. He worked mainly in five fields: static clasticity, fluid dynamics, hydrology and hydraulics, organization of mechanics, methods of research.

The first of his three major discoveries in elasticity was a new singularity method [Z. angew. Math. Mech. 9, 488 (1929); 10, 383 (1930)]. A number of rather complicated singularities, obtained by confluence of simple ones, are classified in terms of their influences in accordance with a duality principle, which gene ralizes Maxwell's reciprocity theorem.

His continuing interest in analogies may well have begun with his own discovery that the stream-lines of any potential flow of an incompressible fluid may serve also as stress trajectories for a plane elastic system. He first approached the problem through his method of singularities (Proc. int. Congr. appl. Mech 1930); later [Z. angew. Math. Mech. 12, 364 (1931)], he gave an analytic proof of the beautiful reformulation now called "Neményi's Theorem": given any net of isothermal curves, there exists a five parameter family of plane stress systeme for which these curves are stress trajectories. Phrased thus in terms of pure elasticity, it suggests another question: to what extent is the solution of a problem in continuum mechanics characterized by an associated trajectory system? This subject attracted Neményi throughout the rest of his life.

¹⁾ Escher-Wyss, Maschinenfabriken AG.

His third major discovery in elasticity is the reduction of the general extensional theory of thin shells of revolution with meridian y - f(x) to the remarkably simple equation

 $\frac{U_n''}{U_n} + (n^2 - 1) \frac{f''}{f} = 0.$

From "Neményi's stress functions" U_n , the general solution is obtained immediately [Proc. 6th int. Congr. Math. (1936), Proc. nat. Acad. Sci. 29, 159–162 (1943).

All this theoretical work illustrates the inverse or semi-inverse approach, which he summarized in a fine organizational summary [Advances in Applied Mechanics, Vol. II (Academic Press, New York, 1951), p. 123–151]. In papers written jointly with PRIM [Proc. nat. Acad. Sci. 34, 119 (1948); J. Math. Phys. 27, 130 (1948) and others], he applied it to obtain numerous exact solutions of he nonlinear equations of gas dynamics, many of them representing rotational and three-dimensional flows of nonuniform total energy.

For any person with a genuine question in mechanics, Neményi was always villing to supplement his great knowledge and deep understanding by hours of library work. Since 1946 many of his ideas were worked out by his pupils (in emporal order): C. Truesdell, R. C. Prim, A. Van Tuyl, A. W. Sâenz, R. Tourn, J. L. Ericksen. He had held posts in many institutions in Europe and America; at the time of his death he was Head of the Theoretical Mechanics Section at the U. S. Naval Research Laboratory.

C. TRUESDELL, Indiana University.

Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques

Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen, mit beonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Von Lösch-Schoblik B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951). 205 S., 22 Abb.; \$4.03.

Die von L. Euler in die Analysis eingeführte Gammafunktion (Fakultät) nd die verwandten Funktionen kommen in so vielen Gebieten der Mathematik or und sind für so zahlreiche Anwendungen ein unentbehrliches Instrument, ass die Kenntnis ihrer Haupteigenschaften zum Rüstzeug des Mathematikers nd des Physikers gehören muss. Das vorliegende Buch dessen Bearbeitung urch F. Lösch unter Zugrundelegung eines von F. Schoblik hinterlassenen lanuskriptes erfolgte – gibt eine Einführung in die Theorie und in die Anwenungen dieser Funktionen. Die Theorie ist aber an Formeln und Entwicklungen preichhaltig, dass eine Auswahl nötig war; sie wurde im Hinblick auf die Anendungen auf Physik und Technik getroffen. Das Studium des Werkes kann dem empfohlen werden, der im Besitze der Elemente der Theorie der analytichen Funktionen ist und sich eine gründliche Kenntnis der Gamma- und der erwandten Funktionen aneignen will.

Inhaltsangabe: I. (S. 1–100). – 1. Die Produktdarstellungen und die fundaentalen Eigenschaften der Fakultät. – 2. Die asymptotischen Darstellungen der akultät (Stirlingsche Formel). – 3. Die Reihendarstellungen der Fakultät. – Die Integraldarstellungen der Fakultät. – 5. Auswertung bestimmter Integrale irch Fakultäten. – 6. Die Funktionalgleichung $R_1(z)$ $f(z+1) + R_2(z)$ f(z) = 0.

Anwendungen auf die hypergeometrische Reihe und auf das Integral von Melliz Barnes.

II. (S. 101–151). – 1. $(z, \varrho)!$ und $Q(z, \varrho)$ als Funktionen von z. – 2. $(z, \varrho)!$ un $Q(z, \varrho)$ als Funktionen von ϱ . – 3. Die Integralexponentiale und verwandte Funktionen (Integralkosinus und -sinus usw.). – 4. Das Fehlerintegral und verwand-Funktionen. – 5. Die Hermiteschen Polynome. – 6. Die Funktionen des para

bolischen Zylinders und die Whittakerschen Funktionen.

III. (S. 152–203). Anwendungen. – 1. Eine elektrostatische Aufgabe. – 2. D Sitzreihenüberhöhung im Theater. – 3. Zur strahlentheoretischen Treffertheori – 4. Über kontinuierliche Leibrenten. – 5. Der Strahlungswiderstand einer Vetikalantenne. – 6. Wahrscheinlichkeits- und Fehlerrechnung. – 7. Wärmeleitun – 8. Die astronomische Strahlenbrechung. – 9. Beugung elektromagnetisch-Wellen. – 10. Übergangsbögen bei Bahnen. *M. Plancher*

The Lebesgue Integral. By J. C. BURKILL, Cambridge Tracts in Mathmatics and Mathematical Physics, No. 40 (Cambridge University Press, Cambridge 1951). 87 pp.; 12s, 6d.

Depuis la parution en 1905 du livre de Lebesgue Leçons sur l'intégration la recherche des fonctions primitives de nombreuses et importantes simplification ont été apportées par de la Vallée Poussin et d'autres à l'exposition et à démonstration des théorèmes. Il est maintenant possible d'exposer cette théor sous une forme extrêmement simple et accessible à toute personne tant soit pe familiarisée avec les éléments du calcul différentiel et intégral. Celle que présen M. Burkill dans cet opuscule est basée sur la théorie de la mesure des ensemble elle répond pleinement aux conditions de clarté et de simplicité que l'on permaintenant exiger et sa lecture peut être recommandée à qui désire être n' rapidement au courant des théorèmes essentiels de la théorie de l'intégrale.

Contenu: I. Ensembles de points. II. Mesure. III. L'intégrale de Lebesgu IV. Différentiation et intégration. V. Autres propriétés de l'intégrale. VI. L'int grale de Lebesgue-Stieltjes. Solution des exemples et des problèmes.

M. Planchen

Einführung in die theoretische Physik. Bd. 3, Teil 2. Quantentheor. Von C. Schaefer (W. de Gruyter, Berlin 1951). 510 S., 88 Abb.; DM 40.—.

Der in der zweiten Auflage vorliegende Band III, 2 enthält die Lehren die Quantentheorie bis und mit den Diracschen Gleichungen. Zunächst werden die Schwierigkeiten der klassischen Physik in der Theorie der Strahlung, der spezifischen Wärme, des Photoeffekts usw. geschildert. Es folgt an Hand der Bohschen Theorie eine sich über vier Kapitel erstreckende Darlegung des Atommodells von Bohr und die sich daraus ergebenden Folgerungen für Atombas Spektren und periodisches System. Dann wird in Kapitel 6 die Wellenmechameingeführt im Anschluss an de Broglie und Schrödinger. Ihre Anwendund Deutung behandeln Kapitel 7 und 8. Darauf wird nochmals das Probleder Strahlung aufgegriffen und, jetzt mit wellenmechanischen Methoden, eingehend geschildert (Auswahl- und Polarisationsregeln, Übergangswahrscheinlickeiten, Dispersion und Ramaneffekt). Das zehnte Kapitel schliesslich enthält de Diracsche Theorie des Elektrons und Positrons.

Gegenüber der ersten Auflage sind keine wesentlichen Änderungen im Sin. einer Modernisierung vorgenommen worden, was im Hinblick auf die erprote Darstellungsweise des Verfassers zu bedauern ist.

W. Baumgarten

Funzioni ellittiche. Di Francesco Tricomi (N. Zanichelli, Bologna 1951). 353 p.; l. it. 4500.—.

L'auteur s'est proposé de donner au lecteur qui connaît les premiers éléments le la théorie des fonctions analytiques un exposé aussi simple que possible de la héorie des fonctions elliptiques lui permettant de l'appliquer sans difficulté à des problèmes concrets. Laissant de côté les applications à l'algèbre et à la théorie les nombres, l'auteur a réussi à rassembler dans cet ouvrage l'essentiel de ce que loit connaître celui qui veut appliquer les fonctions elliptiques aux problèmes posés par la physique et la technique et pousser leur solution jusqu'aux résultats numériques. L'ouvrage répond donc pleinement au but cherché.

Un premier chapitre expose la théorie des fonctions elliptiques de Weiertrass et la représentation d'une fonction elliptique générale par ces fonctions. I se termine par l'étude du comportement des fonctions de Weierstrass à in-

ariants réels.

Le second chapitre traite des intégrales elliptiques, de leur réduction à trois spèces fondamentales et aux formes canoniques de Legendre. Il contient un ableau très pratique des formules qui ramènent une intégrale elliptique aux ormes de Legendre dans le cas où le polynome du 3° ou du 4° degré a ses oefficients réels.

Le chapitre III introduit les fonctions elliptiques de Jacobi et les fonctions hêta; il les relie aux fonctions de Weierstrass et montre l'utilité des fonctions hêta pour le calcul numérique des intégrales elliptiques de 3° espèce.

Le chapitre IV est consacré à l'étude des transformations du 1er et du 2e ordre

es fonctions de WEIERSTRASS et de JACOBI.

Le dernier chapitre, d'environ 80 pages, expose l'usage des tables numéques des fonctions et des intégrales elliptiques et donne de nombreuses appliations à des problèmes tels que la rectification de l'ellipse et de l'hyperbole, la echerche des géodésiques de l'ellipsoïde de rotation, le flambement d'une poutre, pendule simple, la détermination d'une transformation conforme à propos d'un roblème aérodynamique. Il est suivi d'une table récapitulative des principales primules établies dans le cours de l'ouvrage (18 pages), d'un tableau comparatif es notations de l'auteur et de celles employées dans les ouvrages classiques, 'une liste bibliographique et d'un indice alphabétique.

A noter pour le lecteur auquel la langue italienne n'est pas familière qu'une aduction allemande de la première édition par M. Krafft a paru en 1948

Leipzig (Akad. Verlagsgesellschaft) sous le titre Elliptische Funktionen.

M. Plancherel

Lectures on Classical Differential Geometry. By D. J. Struik (Addison-Vesley Press, Inc., Cambridge 1950). 221 pp., 120 figs.; \$6.00.

Das vorliegende Werk ist aus einer einsemestrigen Vorlesung des Verfassers im Massachusetts Institute of Technology hervorgegangen und legt die Grundegriffe der klassischen Kurven- und Flächentheorie dar. Die einzelnen Kapitel ind überschrieben mit: Kurven, Elementare Flächentheorie, Die Fundamentaleichungen der Flächentheorie, Geometrie auf der Fläche, Spezielle Gegenstände ist der Kurven- und Flächengeometrie (Enveloppen, Abbildungen und Landarten, Minimalflächen, Das Imaginäre in der Flächentheorie).

Das Buch ist sehr ausführlich gehalten. Struik verwendet die Vektorschreibeise, wie sie heute für diesen Gegenstand fast allgemein üblich ist. Die notwengen Hilfsmittel aus der Vektorrechnung sowie aus andern Zweigen der Matheatik sind jeweils, bevor sie gebraucht werden, in Kleinschrift in den Text ein-

gebaut. Die einzelnen Kapitel sind durch Aufgaben abgerundet, von denen d meisten vom Leser ohne fremde Hilfe gelöst werden können. So kann sich d Leser überprüfen; gleichzeitig offenbaren aber diese Aufgaben öfters einen inte essanten geometrischen Sachverhalt. Eine Serie von weniger elementaren Au gaben ist am Schlusse des Buches zusammengestellt.

Besondere Aufmerksamkeit hat der Verfasser den Illustrationen geschenkt sie zeichnen sich durchgehend durch grosse Anschaulichkeit aus. Einige dave sind äusserst gut geratene Photographien von mathematischen Modellen. Eben verdienen die zahlreichen historischen und biographischen Notizen Beachtung

Das Buch über Differentialgeometrie von Struik kann jedermann empfohlwerden, der sich über diesen Gegenstand orientieren möchte. Es eignet sich bisonders zum Selbststudium.

M. Jeg

Integraltafel: Erster Teil: Unbestimmte Integrale; Zweiter Teil: Bestimm Integrale. Herausgegeben von W. Größner und N. Hofreiter (Springer-Verlawien und Innsbruck, 1949/50). VIII + 166 S. bzw. VI + 204 S. sFr. 23.50 unsFr. 25.-.

Die beiden Tafeln enthalten zu den angegebenen Integralen auch theoretischanleitungen für den Gebrauch; ferner sind in vielen Fällen Rekursionsforme angegeben, die entlastend wirken. Bemerkenswert ist die gegenüber ähnlich Tafeln etwas stärkere Betonung der Bedürfnisse der reinen Mathematik.

1. Teil: Unbestimmte Integrale. Beginnend mit den Integralen von rational Funktionen mit Erläuterungen zur Partialbruchzerlegung bietet das Buch weite hin eine reichhaltige Sammlung von Integralen, die Wurzeln enthalten. Instisondere sind Anleitungen zur Umrechnung von elliptischen Integralen auf de Legendresche Normalform gegeben. Schliesslich folgen noch transzendente Integranden in mannigfacher Form und am Schluss des ersten Bandes Integrale übst

Jacobische und Weierstrasssche elliptische Funktionen.

2. Teil: Bestimmte Integrale. Dieser zweite Band enthält eine Fülle von wer vollem Material, insbesondere zahlreiche Integrale, die nur zwischen bestimmte numerisch gegebenen Grenzen in geschlossener Form ausgewertet werden könnes Der Praktiker wird eine solche Tafel um so mehr schätzen, als bestimmte Integral in der Literatur meist schwer zu finden sind. Im übrigen sind die verschieden Typen von Integralen nach den gleichen Gesichtspunkten angeordnet wie i ersten Band, jedoch mit einem besonderen Abschnitt über bestimmte Integravon Zylinderfunktionen.

Die besondere Reichhaltigkeit dieses Tabellenwerks macht es zu einem webvollen Hilfsmittel für das Integrieren.

H. Rutishaus

Proceedings of a Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery (Harvard University Press, Cambridge, USA., 1951). 293 pt 121 figs., \$8.—.

Das Werk (Band 26 der «Annals of the Computation Laboratory of Harva. University») ist ein ausführliches Protokoll eines Kongresses an der Harva. University im September 1949. Die 38 gehaltenen Vorträge sind wiedergegebe Die mathematischen wie die technischen Aspekte programmgesteuerter Rechemaschinen sind in gleicher Weise berücksichtigt.

Unter den technischen Arbeiten finden wir Beschreibungen einiger im Betrioder im Bau befindlicher Rechenautomaten, ferner Erläuterungen von neuelektrischen Schaltelementen; Erwähnung verdienen hier die Aufsätze Stat Magnetic Delay Lines, Coordinate Tubes for Use with Electrostatic Storage Tube

Electrochemical Computing Elements. Weitere Beiträge betreffen neue mathemaische Methoden; insbesondere sind folgende Arbeiten hervorzuheben: Numerical Methods Associated with Laplace's Equation. An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators, On the Monte Carlo Method. Andere Arbeiten behandeln sodann Anwendungen von programmgesteuerten Rechenmaschinen auf Probleme der theoretischen Physik, ler Aerodynamik, der Statistik und der Nationalökonomie. Den Abschluss bildet ein bemerkenswertes Referat The Future of Computing Machinery von L. N. RIDENOUR.

Das Buch stellt eine interessante Dokumentation über den Stand des prorammgesteuerten Rechnens im Jahre 1949 dar und vermittelt dem Fachmann ahlreiche wichtige Anregungen.

A. P. Speiser.

Grenzschicht-Theorie. Von H. Schlichfing (G. Braun, Karlsruhe 1951). 883 S., 295 Abb.; DM 45.—.

Die Strömungslehre erhielt einen entscheidenden Impuls, als Prandtl 1904 eine Grenzschichttheorie aufstellte. Zum ersten Male war es möglich, die bei rösseren Reynoldsschen Zahlen auftretenden Widerstände auf Körper zu verstehen. Dadurch, dass die Reibung vor allem in einer relativ dünnen Oberflächenchicht wirkt, während die äussere Strömung praktisch reibungsfrei läuft, wird ie ungeheuer schwierige Aufgabe der gleichzeitigen exakten Berücksichtigung on Reibung und Trägheit in zwei mindestens näherungsweise viel leichter löstere Teilaufgaben zerlegt. Schon früh gelang es Blasius, das Plattenproblem kakt zu lösen. Ein weiterer wichtiger Schritt gelang 1913/14, als man den Unterchied von laminarer und turbulenter Grenzschicht bei reibungs- und turbulenzweier Aussenströmung klar erkannte. Von da an ist ein stetiger Fortschritt zu erzeichnen, nachdem dann ausser der Göttinger Schule sich auch die übrige Velt an der Grenzschichtforschung beteiligte.

Die Grenzschichttheorie wird in allen Strömungslehrbüchern behandelt. Es behlte aber bisher (mindestens im deutschen Sprachgebiet) an einer Monographie, ie alles Wesentliche über Grenzschichten zusammenfasst und damit das mühreme Suchen in der verstreuten Literatur erpart. Schlichting, der selbst fundamental wichtige Beiträge vor allem zum Problem der Stabilität laminarer Schichen geleistet hat, war wie kaum einer berufen, diese Aufgabe zu übernehmen. So regt denn ein stattlicher Band vor, dessen Studium jedem, der näher mit Grenz-

chichten zu tun hat, aufs wärmste empfohlen werden kann.

Zuerst wird die Zähigkeit in elementarer Weise eingeführt und ihre Wirkung eschrieben. Nachher folgen die exakten Gleichungen und diejenigen Fälle, die kakt gelöst werden können. Entsprechend dem Ziel des Buches sind die Fälle dit starker Reibung (Stokes-Formel, Lagerschmierung) nur kurz behandelt. Es blgt dann die ausführliche Behandlung der laminaren Grenzschichten ohne und it Druckgradienten der Hauptströmung; auch sind nichtstationäre Fälle behandelt. Die Näherungsmethoden sind naturgemäss sehr eingehend dargestellt, obei sowohl ebene als auch rotationssymmetrische Fälle gleichmässig behandelt erden. Besonders interessant ist das Kapitel über Grenzschichtbeeinflussung, o ziemlich viele neue Ergebnisse, die in der Kriegs- und Nachkriegszeit gewonnen urden, mitgeteilt werden. Kompressible laminare Grenzschichten mit und ohne Värmeübergang folgen.

Das nun folgende Kapitel über die Entstehung der Turbulenz scheint dem eferenten eher etwas knapp gefasst. Man möchte gerne, dass der Verfasser, der gerade auf diesem Gebiet zu Hause ist, die Methodik der Stabilitätsrechnungen etwas ausführlicher darstellen würde. Hingegen ist die Übersicht über die bi herigen Lösungen sehr ausführlich und nützlich.

Der voll turbulenten Grenzschicht und den freien Strahlen ist der ganze Redes Buches gewidmet. Auch hier ist die neueste Entwicklung eher etwas zu kugekommen; der mehr elementare Standpunkt, der dem Ingenieur natürlich bsonders nützlich ist, wiegt hier vor. Besonders interessant ist auch das Kapitüber Rauhigkeit.

Man muss das Schlichtingsche Buch als ein Standardwerk bezeichnen, d für jeden, der mit der Strömung wirklicher Flüssigkeiten und Gase zu tun ha eine unentbehrliche Fundgrube darstellt. Ganz besonders werden die Ingenieu darüber glücklich sein, da es der Verfasser verstanden hat, von den mathemat schen Mitteln weisen Gebrauch zu machen, und die physikalische Wirklichke nicht aus den Augen verloren wird.

J. Acker

Nomography and Empirical Equations. By L. Johnson (John Wils & Sons, New York, 1952). 150 pp.; \$3.75.

Dieses neue Lehrbuch behandelt zwei verschiedene, verwandte Gebiete. Dieset, 90 Seiten umfassende Teil ist der Nomographie gewidmet, der zweit

kürzere, der analytischen Approximation empirischer Funktionen.

Im nomographischen Teil erörtert der Verfasser zunächst eingehend de Begriff der Funktionsleiter. Sodann entwickelt er die Konstruktionsregeln der Fluchtentafeln mit drei parallelen Leitern, der Z- oder N-Tafeln und der Tafemit zwei parallelen und einer krummlinigen Leiter, welche zu den Funktiontypen $f_1+f_2=f_3$, $f_1=f_2\cdot f_3$ und $f_1\cdot g_3+f_2+f_3=0$ gehören. Diese Tafeln erhalten bekanntlich Funktionsleitern, die in f_1 und f_2 regulär sind. In gewisse Fällen, etwa wenn diese Funktionen sehr grosse Werte annehmen, kann es wüßschenswert sein, in bezug auf $1/f_1$ und $1/f_2$ reguläre Leitern zeichnen zu können Dies kann durch geeignete kollineare Abbildung der erwähnten Tafeln erreic werden. Es ist ein Verdienst des Verfassers, diese Abarten von Tafeln und Funktionstypen besonders behandelt zu haben. – Eingehend werden auch Beziehungs zwischen vier und mehr Veränderlichen erfasst, die durch Verbindung der bishe genannten Tafeltypen mittels Zapfenlinien darstellbar sind.

Mit diesen einfachen Mitteln beherrscht der Autor eine grosse Menge praktscher Beispiele aus der Technik, der er auch zahlreiche Aufgaben entnimmt. A. kompliziertere Tafeltypen verzichtet er, und er lässt, was wesentlicher ist, aus das ganze Gebiet der Netztafeln beiseite. Insofern ist der Titel des Buches

weit gefasst.

Im zweiten Teil (Empirical Equations) geht es darum, beobachtete Folger von Wertepaaren einer Funktion zu approximieren mittels einer Funktion y(x) von vorgeschriebenem analytischem Bau, in der Hauptsache Potenzfunktioner oder weniggliedrige Polynome und Exponentialfunktionen. Als Verfahren zu Berechnung der Konstanten wird zwar die Methode der kleinsten Quadraskizziert. In beinahe allen Beispielen wird jedoch untersucht, ob das Beobachtungsmaterial bei Eintragung auf geeignetes Funktionspapier (einfach- oder doppeltlogarithmisch usw.) sich geradlinig anordnet, die Funktion also hier erste Grades wird. Durch Rückkehr zu den Variablen x und y ergibt sich dann d. Gesetz y(x).

Der Schreibende möchte an Johnsons Werk die leichtfassliche und elemetare Darstellung loben, besonders aber das klare Herausarbeiten der Resultaund ihre Zusammenstellung in Tabellen, die dem Benützer sehr nützlich setwerden.

E. Völle

Aspects of the Turbulence Problem

Survey Report

By Hans W. Liepmann, Pasadena, California¹)

Second Part2)

IV. GENERAL DISCUSSION

1. Equations of Motion. Reynolds Equations

We assume that the velocity components u_i , the pressure p, the density ϱ , the temperature T, etc. satisfy the general Navier-Stokes equations of motion, that is, we have

$$\frac{\partial \varrho \, u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho \, u_i \, u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \tau_{i\,k}}{\partial x_k}, \qquad (\text{IV-1a})$$

$$\frac{\partial \varrho \mathcal{J}}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u_k \mathcal{J}}{\partial x_k} = + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\tau_{ik} u_i + q_k \right], \quad (\text{IV-1b})$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} \div \frac{\partial \varrho}{\partial x_e} u_e = 0 \tag{IV-1c}$$

vith

$$\tau_{ik} = -\left[\phi + \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right]\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \quad \text{(IV-1d)}$$

$$q_k = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x_k},$$
 (IV-1e)

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} u_i u_i + h. \tag{IV-1f}$$

, μ are the two viscosity coefficients, α the heat conductivity, and h the nthalpy per unit mass of the fluid.

A direct approach to the turbulence problem would consist in solving (IV-1) or a given set of boundary or initial values and to compute mean values over he ensemble of solutions. Even for the most restricted problem, turbulence f an incompressible fluid, this appears to be a hopeless undertaking due to he nonlinear terms in the equations. Thus, the standard procedure, following Reynolds' classical studies, consists of averaging over the equations rather han over the solutions. In this way relations between averaged quantities are btained. However, due to the nonlinear transport terms, the system of equations obtainable in this way is undetermined since it is impossible to obtain n equation which involves only correlations of the same order, for example, ouble correlations.

¹⁾ California Institute of Technology.

²⁾ First Part see ZAMP 3, 321 (1952).

Indeed, averaging (IV-1a) for a field of flow consisting of a mean flow an turbulent fluctuations

$$u_i - U_i + u'_i$$
, $u_i = U_i$

yields Reynolds equations which couple the mean flow U_i to the quadratic mean values of the fluctuations. For example, for incompressible flow we have

$$\frac{\partial \varrho \ U_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho \ U_i \ U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tau_{ik} - \varrho \ \overline{u_i' \ u_k'} \right) \tag{IV-2a}$$

in which the "apparent" or Reynolds stresses now appear on the right han side. Multiplying (IV-1a) by u'_j , for example, and averaging we obtain a expression connecting the stress tensor $u'_i u'_j$ with the expression containing the triple correlations $u'_i u'_j u'_k$, etc. The same procedure evidently applies to the general compressible case except that more terms and equations are involved.

Hence, the method of averaging the equations can not lead to a final determined solution since it evidently does not exhaust the content of the original equations. The averaged equations require additional relations which have to come from statistical or similarity considerations or from general physical considerations which allow a choice of the possible solutions to be made from the number of solutions compatible with the averaged equations.

2. The Analogy with Kinetic Theory

From Reynolds equations, for example, in the simple form (IV-2a), a immediate analogy between turbulence in a fluid and molecular motion can be drawn. The viscous stress tensor τ_{ik} expressed in terms of the molecular velocities c_i is given by $\tau_{ik} = -\varrho \ \overline{c_i \ c_k}$, thus (IV-2a) can be written

$$\frac{\partial \varrho \ U_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho \ U_i \ U_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\varrho \ \overline{c_i c_k} + \varrho \ \overline{u_i' u_k'} \right]. \tag{IV-2b}$$

Ideas such as Boussinesq's "exchange coefficient", Prandtl's mixing length etc. make use of the analogy between molecular and turbulent shearing stresses. It should be emphasized, however, that the computation of $c_i \overline{c_k}$ from kinetic theory is reasonably simple only in the case of a perfect gas, that is, for weat molecular interaction. The interaction between turbulent elements, on the other hand, is not weak in all interesting cases. Indeed, if an analogy of turbulent mixing with molecular kinetics is drawn at all it has to be drawn with the liquid state rather than with the gaseous state. Furthermore, to consider the fluid incompressible implies that dissipated energy is small compared to the heat content of the fluid. That is, $c_i c_k \ll U_i U_k$ and the Mach number $U^2/c^2 \sim U^2/c^2$ is small compared to unity. For the turbulent fluid u_i' u_k' is not

refers to "compressible fluid flow" of this turbulent fluid. Indeed, the triple correlation terms of the turbulent fluctuations correspond to the heat flux tensor in the same way as the double correlation between heat flux and shear can not be neglected, in analogy to the relation between double and triple correlations in some problems in turbulence.

One of the difficulties in dealing statistically with turbulence is evidently the fact that we have to deal with strongly interacting elements. This precludes, in most cases, the use of the general asymptotic laws of probability theory such as the central limit theorem which form the background to many of the results of statistical mechanics, for example, of perfect gases, black body radiation, etc. all of which are problems of independent or nearly independent systems.

Furthermore, the fact that turbulence is a "secondary" structure superimposed upon the molecular one means that we deal with dissipative systems throughout and not with a fluid in thermal equilibrium. The very simplest state conceivable is a stationary one in which energy is fed to the system at the same rate as it is removed from the system and transformed into heat.

3. Some Characteristics of the Equations Mathematical Models of Turbulence

Turbulence is a phenomenon typical for large Reynolds numbers. It is thus important to ask what the general characteristics of the equation are for large Reynolds numbers. The typical phenomenon at large Reynolds numbers is the existence of boundary layers in a general sense, that is, of thin layers where most of the dissipation takes place. In this sense shock waves are included in the boundary layer phenomena. The reason for the existence of boundary layers is the fact that the stress terms in the equation of motion are the terms of highest order. These terms are multiplied by a factor inversely proportional to the Reynolds number. Physically this means the existence of regions of dimension δ , say, within the fluid, in which the dissipation takes place and where δ tends toward zero as some power of ν , the kinematic viscosity, in such a fashion that the dissipated energy remains finite. This implies, for example, in the case of the shock wave $\delta \sim \nu$, for the two-dimensional boundary layer on a solid wall $\delta \sim v^{1/2}$, in a plane jet $\delta \sim v^{2/3}$, etc. (Similar considerations can be made for temperature layers.) The general tendency of the contribution of the quasilinear terms in the equation of motion and the higher order stress term thus apparently consists at high Reynolds numbers in the production of narrow zones of intense shear. The narrow shear zones caused by transversal waves of finite amplitude are vortex lines and vortex sheets. The random field of these transversal disturbances is called turbulence. In an incompressible fluid

longitudinal waves do not exist. In a compressible fluid both types exist and i the Mach number is sufficiently high both the longitudinal and transversa phenomena, that is, sound and shock waves on one hand and turbulence of the other, are coupled, and energy is transferred between both fields.

While shock waves exist in flow with one space coordinate, turbulence, at leas in the case of incompressible flow and in the sense outlined above, is a strictly three-dimensional phenomenon. In two dimensions the balance between the regrouping or stretching of vortex filaments and dissipation is not possible (Random fields made up of transversal shear waves are, of course, possible in two dimensions but they do not represent turbulence in the proper sense.)

Expressed in terms of a Fourier representation of the velocity field the interplay of the nonlinear term with the stress term appears as a flux of energy from the lower frequencies to higher frequencies and the eventual dissipation at higher frequencies. In the course of time one effect of the nonlinear term consists in increasing the coefficients of the highest frequencies. The nonlinear terms thus contribute indirectly to the dissipation.

Burgers [38]¹) has extensively studied a mathematical model of turbulence. This model accounts for both the nonlinear term and the dissipation term. It is simplified mostly in the space dimensions since only one and two dimensions are considered. Hence, the model does not apply directly to turbulence. In the one-dimensional case it can be applied to a random arrangement of shock waves rather than to turbulence. It does, however, allow the study of the interplay between inertia and viscous terms. Cole [42], [43] and independently E. Hopf [49] have recently found a general solution of Burger's one-dimensional, nonlinear equation which facilitates an analytical discussion of the behavior of the solutions with respect to initial and boundary values.

Recently an electrical model nearly corresponding to Burger's one-dimensional equation has been studied experimentally by Betchov [37]. Betchov feeds noise with a white spectrum and Gaussian distribution into his circuit and observes the resulting output. The probability distribution of the response is skew and the joint probability of the output voltage and its derivative shows a striking resemblance to similar observations of turbulent fluctuations.

4. Local Isotropy

KOLMOGOROFF's concept of local isotropy [51] can be considered as one of the most important general ideas in turbulence.

The exchange of energy between eddies of various size or the flux of energy through a wave number space represents a cascade process. The energy is supplied essentially in the low wave number region and passed on and dissipated in the region of large wave numbers. The question arises: is it possible to make

¹⁾ Numbers in brackets refer to the Bibliography, page 423.

an asymptotic statement concerning the form of the energy spectrum of the large wave numbers? This spectrum is due to a large number of random events, and we may hope therefore to be able to establish a general trend. The events are not independent and consequently the central limit theorem, or a similar statement intimately connected with independence, can not apply and it is to be expected that any asymptotic statement made will be much weaker than, for example, the central limit theorem.

KOLMOGOROFF introduces essentially three hypotheses; the first of which much broader than the other two.

- (1) The small scale motion is always isotropic. This is the concept of "local isotropy".
- (2) The energy spectrum of the small scale motion can not depend upon details of the flow; the energy spectrum E(k) or the space correlation function q(r) will depend upon the dissipated energy per unit volume and time ε and the viscosity ν .
- (3) If the Reynolds number of the problem is sufficiently large, the zone of dissipation and the zone of production of turbulent energy will be widely separated in the wave number space. Then there may exist a range of wave numbers which are in a state of local isotropic equilibrium but which are still not in the dissipation region. In this case E(k) will become independent of v.
- (2) and (3) imply a transfer mechanism which acts between neighboring twave number ranges. The contribution of a direct transfer of energy from cone wave band into another far removed is assumed negligible.

The simplest consequences of (1), (2) and (3) for the spectrum or correlation afunction are: due to (1) the pattern is isotropic, and one function suffices to describe correlation or spectrum; dimensional analysis can be applied to E(k). Characteristic length and velocity made up of ν and ε are:

$$l = v^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$$
, (IV-3a)

$$c = v^{1/4} \varepsilon^{1/4}. \tag{IV-3b}$$

cl, c can be interpreted as wave length and phase velocity of shear waves in a eviscous fluid. (2) yields:

$$E(k) = v^{5/4} \varepsilon^{1/4} \mathfrak{E}(k v^{3/4} \varepsilon^{-1/4})$$
 (IV-4)

For the subrange (3) ν has to vanish from this expression and it follows that

$$E(k) = \operatorname{const} \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \tag{IV-5}$$

This is the famous $k^{-5/3}$ law, first given by Kolmogoroff¹) and independently

¹⁾ KOLMOGOROFF, ONSAGER, and VON WEIZSÄCKER did not actually use the spectrum concept. They gave a result equivalent to (IV-6) for the correlation function, the result for the spectrum is actually due to Heisenberg [83].

discovered by Onsager [56] and von Weizsäcker [66]). The corresponding double correlation function has the form

$$\varphi(r) = (1 - \operatorname{const} \varepsilon^{-1/3} r^{-2/3}) \overline{u^2}.$$
 (IV-6)

Clearly, (2) implies that all quantities associated with eddies within the local isotropic zone are expressible in terms of (IV-3) and that they are similar.

Kolmogoroff's results have an asymptotic nature. Hence for a comparison of, say, (IV-5) or (IV-6) with experiments the range of Reynolds numbers in which the asymptotic laws can be applied has to be established. Only after this has been done can the adequacy of the general ideals underlying the hypothesis be checked with experimental results. The status of an experimental verification appears to be as follows:

(i) Local Isotropy: The existence of local isotropy in shear flow appears rather well established. The most convincing results are the measurements of Corrsin [46] and of Laufer [52] in a jet and channel respectively. Corrsin and Laufer show that the contribution of small scale eddies to the apparent shear vanishes faster than their energy. Extensive results concerning the dissipation, skewness, etc. are due to Townsend [61], [62].

(ii) Similarity in the Viscous Region: Results of STEWART and TOWNSEND [99] in isotropic turbulence show that the high frequency components of the

spectrum are similar in the sense of (IV-4).

(iii) Nonviscous Subrange: Measurements of the spectrum or correlation function in isotropic turbulence behind grids have been carried out to establish whether or not a subrange of the form (IV-5) or (IV-6) exists within the range of wind tunnel experiments. At the Reynolds numbers obtained so far in wind tunnels the results show that no extensive subrange of this form exists [61], [91], [99]. This has been most clearly demonstrated by Stewart and Towns-END, who estimate that the Reynolds number based on the grid mesh required to obtain a nonviscous subrange should be of the order of three million or roughly ten times larger than hitherto investigated.

Hence, wind tunnel measurements have not yet lead to a decision concerning Kolmogoroff's nonviscous subrange and the form of the corresponding

spectrum and correlation function.

Recent investigations by MacCready [54] of the spectrum of atmospheric turbulence near the ground give support to the $k^{-5/3}$ law. MacCready's measurements indicate that local similarity exists for wave lengths up to 160 cm. Reasonable agreement with the $k^{-5/3}$ law or the corresponding $r^{-2/3}$ law was found for even larger eddy dimensions up to an order of a hundred meters. While the results of MacCready are very suggestive, the accuracy of measurement for atmospheric turbulence is naturally less than for wind tunnel investigations and hence MacCready's result can not yet be taken as entirely conclusive evidence.

Some astrophysical results concerning the existence of the $k^{-5/3}$ law have been given by von Weizsäcker [67] and von Horner [48], but these results are rather inconclusive due to the difficulty of proper interpretation of the observations.

The concept of local isotropy by its very nature does not contribute directly to an understanding of the transport phenomena. The Kolmogoroff region contains little energy but, at high Reynolds numbers the whole dissipation should occur within the region and hence the dissipation terms are identical with the simple expressions for isotropic turbulence. However, there are physical situations in which one is mainly interested in the small scale motion even if it does contain comparatively little of the total turbulent energy. Typical examples are the gust problem for the motion of an airplane in atmospheric turbulence, scattering of waves due to turbulence, etc. For problems of this type where the general turbulent motion is either unknown or not even interesting, a general asymptotic statement is of paramount importance.

BATCHELOR's work on axisymmetrical and general nonisotropic but homogeneous turbulence should be mentioned here [36]. BATCHELOR shows that the pressure-velocity correlation terms in the equation transfer energy at one wave number from one velocity component to another and thus contribute a trend toward isotropy. In isotropic turbulence these terms vanish.

5. Turbulent Flows with Secondary Structure

In recent years the importance of the existence of a secondary, large scale structure in turbulent shear flow has become apparent. Corrsin [44] and Townsend [60] found that the flow near the outer edge of a jet or wake is only intermittently turbulent. Townsend has shown the importance of this motion, which is of a scale comparable to the width of the wake, upon the momentum and heat transfer in the wake. Recent experiments by Townsend [65] and Klebanoff and Diehl [50] demonstrated the same intermittency near the edge of a boundary layer. Photographs of the wake of high-speed projectiles show that the turbulent wake has a large scale structure superimposed upon the fine scale turbulence quite similar to the wake structure at low speeds.

Intermittency and thus the existence of elements of a very large scale seem to be typical for turbulent flows with free boundaries.

While the large eddies ordinarily found in intermittently turbulent flow appear statistically distributed, there do exist a number of cases in which a regular or nearly regular motion of large scale superimposed upon turbulent flow has been observed. Pai [57] and Mac Phail [55] found that the three-dimensional vortices which initiate the laminar instability in the flow between rotating cylinders (Taylor [100]) persist even if the flow has become fully turbulent. In recent measurements on a vortex street behind a cylinder Roshko

[58] found a similar result: above a cylinder Reynolds number of about 150 the wake flow is essentially turbulent with superimposed, nearly equally spaced vortices. It is very likely that similar patterns exist in other situations, for example, in zones of large thermal instability.

The importance of these large eddies lies in their bulk transfer of turbulent fluid and their consequent influence on transfer properties and on the energy balance. Due to the size of these elements, which is comparable to the physical dimension of the flow, for example, the width of the wake, it is not possible to account for their behavior in terms of local quantities. For the case of the wake Townsend [63] has discussed the possibility of a quasi-equilibrium taking into account this secondary structure. While there may be doubt about the details of this secondary structure there is no doubt that the large scale motion can not be ignored for a great many problems including problems in sound production from jets, combustion, etc.

If we consider turbulence as a sort of secondary structure superimposed upon the flow of an ordinary viscous fluid we can look at the large scale motion again as a superstructure on the turbulent motion. The interesting and significant feature of this hierarchy is the fact that the length scales are strictly separated. This feature is probably intimately connected with the form of the equation of motion and again related to the boundary layer phenomenon.

V. ISOTROPIC TURBULENCE

In dealing with turbulence in nonuniform mean flow we are faced with a typical transport problem. The intensity of the turbulence varies in space and possibly in time and the gradient of the mean velocity introduces a preferred direction into the problem. We have to deal with a nonhomogeneous and nonisotropic state of turbulence. The most fruitful results in turbulence resulted from G. I. Taylor's introduction of the concept of isotropic and homogeneous fields of turbulence. Consider, for example, a box filled with a fluid. At the time t = 0 the fluid is stirred up in a suitable way, say, by dropping a grid through the box. The turbulence created in this fashion can be assumed to become isotropic and homogeneous in space, but it decays, so that the field is not stationary. It is possible, of course, to conceive a setup such that energy is continuously fed into the system by the stirring motion and removed again in the form of heat created by viscous dissipation. In considering this latter problem both the similarity and the essential difference between a box "filled with isotropic, homogeneous turbulence" and a gas or radiation in thermal equilibrium become evident. The similarity consists in the lack of over-all transport of momentum, heat, etc.; only the interactions between the elements making up the fluid are important. The difference is that in the turbulent system there is an energy flux which must be maintained by an external agent,

that is, the system is dissipative. To be sure, we may well question the possibility of such a setup. For example, the initial motion set up by a stirring mechanism can not be isotropic and homogeneous. Hence, we assume a trend toward isotropy rapid enough that between the production of turbulence and the dissipation into heat there exists a sufficiently long time to set up an isotropic homogeneous state. The reasoning here is evidently based upon ideas similar to those used in the concept of local isotropy. It may be expected that an isotropic state is reached more rapidly the more uniform the stirring mechanism.

Granted that a state of isotropic and homogeneous turbulence is possible, we can set up the kinematics of the field and the equations interrelating the mean values. The general scheme to introduce correlation tensors and to set up the equations from there is due to VON KÁRMÁN and HOWARTH [85]. In the following we will restrict the discussion to the incompressible case.

1. Correlation Functions

The field of isotropic, homogeneous turbulence is described by the two-point correlation tensors. Take two points $P_1(\vec{R})$ and $P_2(\vec{R}+\vec{r})$ in the field and form the tensors

Pressure Correlation

$$\pi(\vec{r}) = \overrightarrow{\phi(\vec{R})} \, \phi(\vec{R} + \vec{r}) \equiv \overrightarrow{\phi(\vec{r})};$$
 (V-1a)

Velocity, Double Correlation

$$R_{ij}(\vec{r}) = u_i(\vec{R}) \ u_j(\vec{R} + \vec{r}) \equiv u_i \ u'_j; \tag{V-1b}$$

Velocity, Triple Correlation

$$T_{ijk}(\vec{r}) = u_i(\vec{R}) \ u_i(\vec{R}) \ u_k(\vec{R} + \vec{r}) \equiv u_i \ u_j \ u_{k'}$$
 (V-1c)

or isotropic and homogeneous fields

$$\pi = \pi(r) , \quad R_{ik} = R_1(r) \, r_i \, r_k + R_2(r) \, \delta_{ik} ,$$

$$\downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow j_k = T_1(r) \, r_i \, r_j \, r_k + T_2(r) \, r_i \, \delta_{jk} + T_3(r) \, r_j \, \delta_{ik} + T_4(r) \, r_k \, \delta_{ij} , \quad \text{etc.}$$
(V-2)¹)

for an incompressible fluid the continuity equation gives

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$p(\vec{R}) \ u_j(\vec{R} + \vec{r}) = 0; \quad \frac{\partial R_{ij}}{\partial r_i} = 0; \quad \frac{\partial T_{ijk}}{\partial r_k} = 0. \tag{V-3}$$

¹⁾ f(r), h(r), etc. is sometimes written for f(r, t), h(r, t), etc. Similarly f', h', etc. denote derivaves with respect to r.

Hence R_{ij} , T_{ijk} can each be expressed by a single scalar function of r. Following the Kármán-Howarth notation we use the following functions:

$$R_{11}\{r,0,0\} = f(r); \quad R_{11}\{0,r,0\} = g(r);$$

$$T_{111}\{r,0,0\} = k(r); \quad T_{112}\{0,r,0\} = h(r); \quad T_{212}\{r,0,0\} = q(r).$$
(V-4)

From continuity

$$g = f + \frac{r}{2} f'; \quad k = 2 h; \quad q = -\left(h + \frac{r}{2} h'\right).$$
 (V-5)

It is also useful to introduce the trace of R_{ik}

$$R(r) = R_{ii} = f + 2g \tag{V-6}$$

and

$$T_{iji} = T(r) \frac{r_j}{r}; \quad T(r) = \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial r^4 k}{\partial r}.$$
 (V-7)

Furthermore, the products of the derivatives of the velocity components can be expressed as derivatives of the correlation tensors. This is shown in exactly the same way as in the case of one-dimensional stochastic processes (II-11)

$$-\left(\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{l}} \cdot \frac{\partial u_{j}}{\partial z_{m}}\right) = \left(\frac{\partial^{2} R_{ij}}{\partial r_{l} \partial r_{m}}\right)_{r=0}$$

$$= f''(0) \left[2 \delta_{lm} \delta_{ij} - \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}\right)\right]$$
(V-8)

which leads to the expression for the dissipation function Φ :

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -15 \,\mu \, f''(0) = -5 \,\mu \, R''(0) \,. \tag{V-}$$

The mean square vorticity $\overline{\Omega^2}$ is also easily found from (V-8)

$$\overline{\Omega}^2 = -15 \,\mu \, f''(0) = \frac{\Phi}{\mu} \,.$$
 (V-1)

2. Spectrum Functions

Using the same formalism as in Section II we can introduce the Fouritransforms of the correlations functions, the spectra. This was first done I TAYLOR [103] for the so-called "one-dimensional spectrum", that is, the transform of f(r). Heisenberg [83] introduced the three-dimensional spectrum and Kampe de Feriet [15] and Batchelor [36] made use of a general spectrum tensor Φ_{ij} obtained by a Fourier transformation of R_{ij} . Thus

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = \frac{1}{8 \pi^3} \int d\vec{r} R_{ij}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$
 (V-1

where k denotes the wave number vector. For isotropic turbulence, $oldsymbol{arPhi}_{ij}$ must be of the form

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = \Phi_1(k) \ k_i \ k_j + \Phi_2(k) \ \delta_{ij} \ .$$
 (V-12)

Continuity for an incompressible fluid means the existence of transversal waves only, hence it follows that

$$\Phi_{ij} k_j = (\Phi_1 k^2 + \Phi_2) k_i = 0$$

and thus

$$\Phi_{ij} = \Phi_1 k^2 \left[\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right] \tag{V-13}$$

from which Heisenberg's spectrum E(k) is obtained by

$$E(k) = 2\pi k^2 \Phi_{ii} = -8\pi k^4 \Phi_1. \tag{V-14}$$

Thus

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = \frac{E(k)}{8 \pi k^2} \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right].$$
 (V-15)

 $F(k_1)$, Taylor's one-dimensional spectrum, results from this by noting from V-14), (V-11) and (V-7) that

$$E(k) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} R(r) k r \sin k r dr \qquad (V-16)$$

hus

$$E(k) = \frac{1}{2} \left[k_1^2 F''(k_1) - k_1 F'(k_1) \right]_{k_1 = k}.$$
 (V-17)

The relation between Taylor's and Heisenberg's form of the spectrum is tuite analogous to the relation between, say, the Maxwell distribution function or one component of the velocity $\varphi(u_i)$ and the distribution function for the bsolute velocity $\psi(c)$. The latter sorts the molecules with respect to their inetic energies while the former sorts only according to the contribution of ne component to the kinetic energy. Thus $\varphi(o) \neq 0$ while $\psi(o) = 0$ and imilarly $F(o) \neq 0$ while E(o) = 0. $\psi(c)$ and E(k) have more direct physical ignificance, however $\psi(u_i)$ and $\psi(u_i)$ are more easily accessible to measurement.

3. The Equations of Motion

The Kármán-Howarth equation establishes the relation between R_{ij} and l_{ijk} and their derivatives. The equation can be written in the form

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{2}{r^4} \cdot \frac{\partial h \, r^4}{\partial r} = \frac{2 \, v}{r^4} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \, \frac{\partial f}{\partial r} \right), \tag{V-18}$$

where f(r, t) and h(r, t) are the correlation functions defined in (V-5). Another useful form is

$$\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T) = \frac{2 r}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R), \qquad (V-19)$$

where R(r, t) and T(r, t) have been previously defined. Multiplying by $k r \sin k z$ and integrating over all r we have, with (V-16) for the function E(k, t)

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{2}{\pi} k^2 \int (T r^2)' \frac{\sin k r}{k r} dr = -2 r E k^2.$$
 (V-20)

4. Invariants

From (V-18) and (V-19) follows an invariant given first by Loitsianski [93]. Namely, multiplying the equations by r^4 and r^2 respectively and integrating over all space yields

$$\frac{\partial}{\partial t} \int r^4 f(r, t) dr = 0, \qquad (V-21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int r^2 R(r, t) dr = 0 \tag{V-22}$$

provided that f, r, k, T vanish sufficiently fast for large values of r. Further more, since $R = (r^3 f)'/r^2$

$$\int r^2 R(r,t) dr = 0.$$

The integral in (V-21)

$$\int f(r) \ r^4 \ dr = \Lambda \tag{V-23}$$

is called Loitsianskii's invariant. The existence of such an invariant is a simple consequence of the equation of motion. The continuity, momentum and energy equations in fluid dynamics each have the form of a continuity equation relating the time derivative of a function to a divergence term. The divergence terms can be written in the form

$$\frac{\partial}{\partial r_k} \left[Q(r) \; r_k \right] = \frac{1}{r^2} \; \langle Q \; r^3 \rangle' \; , \quad \frac{\partial}{\partial r_k} \left[Q(r) \; r_i \; r_k \right] = \frac{r_i}{r^3} \; \langle Q \; r^4 \rangle' \; , \; \text{etc.}$$

and it becomes evident that for homogeneous fields invariants will exist. For the velocity field this is Loitsianskii's invariant, for the temperature field isotropic turbulence Corrsin [79] has given the appropriate invariant

$$\frac{\partial}{\partial t} \int r^2 \, \overline{\vartheta'} \, dr = 0 \,, \tag{V-2}$$

where ϑ is the temperature fluctuation. For a compressible fluid a similar result holds for the density fluctuation s:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int r^2 \, \overline{s} \, s' \, dr = 0 \tag{V-25}$$

as given by Chandrasekhar [77].

The consequence of the existence of the invariant A on the spectrum E(k) follows directly from (V-16) and (V-20). A, being a fourth moment of f, is assentially determined by the largest elements of turbulence and hence it must determine E(k) in the neighborhood of k = 0. Developing (V-16) and (V-20) into powers of k yields

$$E(k) = \frac{2 k^4 \Lambda}{3!} + \cdots$$
 (V-26)

ince

$$R(r) = \frac{1}{r^2} (r^3 f)'.$$

Similarly, remembering that $T(r) = -(r^4 K)'/r^2$ (V-20) yields

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{k^6}{16} \int r^5 T(r, t) dr - 2 \nu k^2 E \quad \text{(for small } k\text{)}$$

onsistent with the statement $\partial \Lambda/\partial t = 0$.

Consequently, the spectrum function E is proportional to k^4 near the origin nd the coefficient of k^4 is time independent. This result was found by Lin [92] nd Batchelor [36]¹).

We again draw an analogy to the Maxwell distribution of velocities or the Plank distribution of radiation. In both cases we can also obviously express the istribution functions in such a form that their behavior near the origin emains invariant as the gas or the cavity cools down with time. However, this is done the whole distribution remains similar, which is typical for a mear system and quite different from the turbulent case in general.

5. The General Problems in Isotropic Turbulence

The discussion of invariants and of the behavior of E(k) for small k, the k^4 w, essentially exhausts the results which can be obtained from the Kármán-Towarth and related equations without the introduction of additional principles or assumptions. The general problem posed to a theory of isotropic urbulence is the determination of the complete functions E(k,t), f(r,t) or $F_{ij}(\vec{k},t)$, etc. It is immediately questionable whether such a broad problem akes sense. The necessity of a stirring mechanism has to be considered someonw and it is by no means evident that turbulence created in some manner,

¹⁾ Batchelor shows that the k^4 law requires homogeneity only. The coefficient of k^4 is in this se still invariant in time but is a tensor term and not a simple scalar like in the isotropic case.

for example, in a box, will tend toward a unique function E(k,t). Indeed, the existence of the Loitsianskii invariant does establish a connection with the stirring mechanism for all times. For example, the anisotropy introduced by the stirring mechanism can be recovered in the latest stages of decay, as shown by Batchelor und Stewart [70]. Hence, while it may be futile to ask for the complete spectrum or correlation function without a complete description of the stirring mechanism, it makes sense to ask for any possible general form the spectrum may have in wave lengths far removed from the ones excited by the stirring mechanism and for times long with respect to a relaxation time. It makes sufficient in these cases to describe the stirring mechanism by a character istic length only, for example, the mesh size in the case of a grid.

The approaches taken to a solution of the problem can be classified intigroups.

(a) Similarity considerations and dimensional analysis.

(b) Attempts to express the triple correlation or the corresponding spectra transfer integrals in terms of the double correlation or the spectrum E(k)

(c) Discussion of limiting cases.

6. The Final Stage of Decay

The difficulty in discussing the Kármán-Howarth or related equationarises naturally from the transport term. One may thus first consider a case where this term is negligible, as has already been done by von Kármán and Howarth [85] and Millionshchikov [94] and more completely by Batchelo and Townsend [72]. If the turbulence has decayed far enough for the transpoterm to be negligible (V-18) or (V-20) may be integrated. The appropriate solutions are

$$E(k, t) = \text{const } k^4 e^{-2 \nu k^2 t},$$
 (V-2)

$$f(r,t) = (8\pi v t)^{-5/2} \int f\{\dot{r} - \dot{s}, t_0\} e^{-s^2/8vt} s^4 d\dot{s}$$
 (V-2)

and thus

$$\overline{u^2} = \frac{\Lambda}{48\sqrt{2}\pi} (\nu t)^{-5/2}.$$
 (as $t \to \infty$) (V-2)

(V-27) and (V-29) are in good agreement with experiments [72], [91].

7. Self-Preservation

In the Kolmogoroff region the spectrum and correlation functions depend upon time during decay only indirectly through the dissipation ε . For the large part of the energy spectrum that contains much of the turbulent energy, the has to enter explicitly. Forms of the spectrum or correlation function which

depend upon time but preserve their shape are called self-preserving. Von KARMÁN and LIN [87] and STEWART and TOWNSEND [99] have recently discussed problems of self-preservation in detail. Heisenberg [82] used the concept of a quasi-equilibrium using his form of the exchange term (see below). Von KARMÁN and LIN put $E(k, t) = C k^4 \mathfrak{E}(k k_s)$ where k_s is a function of t. This expression leads to a decay law of the form

$$\overline{u^2} \approx t^{-10/7}$$
 (V-30)

Heisenberg puts $E(k,t) = E_0(t) \mathfrak{E}(k|k_s)$ consistent with an initial decay law of the form

$$u^2 \approx t^{-1}. (V-31)$$

While von Kármán and Lin's expression for E satisfies the proper condition $E \sim k^4$ for $k \to 0$, Heisenberg's expression yields $E \sim k$ for small k. The $^{-10/7}$ law proposed also by Kolmogoroff [88] and Frenkiel [80] has not nuch experimental support while the t^{-1} law first discussed by Batchelor and Townsend appears to fit the experimental results in the initial stage of lecay remarkably well.

For a detailed discussion reference is made to the papers by von Kármán and Lin, and by Steward and Townsend.

8. Form of the Exchange Term

The spectral equation (V-20) integrated from 0 to k reads

$$\int_{0}^{k} \int_{0}^{k} E(k,t) dk = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{k} \int_{0}^{\infty} (T r^{2})' k \frac{\sin k r}{k r} dr dk - 2 \nu \int_{0}^{k} k^{2} E(k,t) dk.$$
 (V-32)

The time rate of change of the energy contained in the range of wave numbers up to k is due to exchange with elements outside the range, as expressed in the econd term, and to viscous dissipation. To make the equation determinate the exchange term has to be expressed in terms of E(k,t) and k. None of the forms of the exchange terms proposed so far have been completely successful. Heisenerge's form, or a more general similar expression due to von Kármán, seems have been the most successful so far. Heisenberg interprets nonviscous loss of energy from the range of waves numbers 0 to k as due to a turbulent viscosity in the sense of Boussinesg's exchange coefficient. Using dimensional reasoning the then puts

$$\frac{2}{\pi} \int_{0}^{k} \int_{0}^{\infty} (T r^{2})' k \frac{\sin k r}{k r} dr dk = \text{const} \int_{k}^{\infty} \left(\frac{E}{k^{3}}\right)^{1,2} dk \int_{0}^{k} k^{2} E dk. \quad \text{(V-33)}$$

This form of the exchange term yields the $k^{5/3}$ law in the nonviscous subrang of Kolmogoroff, as any dimensionally correct forms do, but leads to a late of the form k^{7} in the viscous subrange of Kolmogoroff. This latter result at variance with experiments ([106] and [91]) and also a priori unlikely since any power law $E(k) \sim k^{-n}$ for large k leads to infinite moments of E of order n-1. This in turn means that the velocity components have no mean derivative of order (n-1)/2, which is not likely. Proudman has recently discusse the consequences of Heisenberg's assumptions [96].

The proposed forms of Oboukhov [95] and Kovasznay [89] are less successful than Heisenberg's.

9. Temperature Fluctuations in Isotropic Turbulence

Corrsin [79] has studied the case of temperature fluctuations in a field isotropic, homogeneous turbulence of an incompressible fluid. In this case is obtains an equation similar to the Kármán-Howarth equation obtained for the temperature correlation function

$$\overrightarrow{\vartheta(R)} \ \overrightarrow{\vartheta(R+r)} = \theta(r) \tag{V-3}$$

and the temperature velocity correlations

$$\overrightarrow{\vartheta(R)} \ \vartheta(\overrightarrow{R} + \overrightarrow{r}) \ u_i(\overrightarrow{R} + r) = \theta_i(r) \ . \tag{V-3}$$

Similarly equations for the spectrum can be written. The difference due to the scalar character of θ as compared to the vector character of u_i becomes apparent in the form of the spectrum for small k. The temperature spectrum begins with k^2 corresponding to the invariance of

$$\int \overline{\vartheta \ \vartheta'} \ r^2 \ dr \tag{V-3}$$

during decay. The discussion of the final state of decay, the subranges, etc. similar to that for the velocity field, as shown in Corrsin's paper.

10. Pressure Fluctuations in Isotropic Turbulence

The pressure of an incompressible fluid p satisfies the equation

$$\nabla^2 p = -\varrho \, \frac{\partial^2 u_i \, u_j}{\partial x_i \, \partial x_j} \equiv f. \tag{V-3}$$

(V-37) is a very simple form of the general type of (III-6). Thus we immediate obtain from (III-11) the relation between the spectra of the pressure and the second velocity derivatives. Denote by H(k) the pressure spectrum and by F(1)

the spectrum of f in (V-37). Then

$$\Pi(k) = \frac{1}{k^4} F(k) \tag{V-38}$$

since $\Gamma(k) = k^{-2}$. (V-38) has been given by Batchelor [75]. Batchelor introduces the spectrum tensor $\Phi_{r-l,m}(k)$ corresponding to the quadruple correlation¹)

$$\mathcal{T}_{ijlm}(r) = \overline{u_i(\vec{R})} \ u_j(\vec{R}) \ u_l(\vec{R} + \vec{r}) \ u_m(\vec{R} + \vec{r}) - \overline{u_i(\vec{R})} \ u_l(\vec{R} + \vec{r}) \ u_m(\vec{R} + \vec{r}),$$

(V-38) then becomes

$$k^{4} \Pi(k) = k_{i} k_{j} k_{l} k_{m} \Phi_{ijlm}(\vec{k})$$
 (V-39)

7

$$\overline{p^2} = 4 \pi \varrho^2 / k^2 \Pi(k) dk, \qquad (V-40a)$$

$$\overline{(\operatorname{grad} p)^2} = 4 \pi \varrho^2 \int k^4 \Pi(k) dk. \qquad (V-40b)$$

However, to evaluate q_{ijlm} or Φ_{ijlm} it is necessary to introduce further assumptions. Batchelor and also earlier Heisenberg [83] assume the relation between the quadruple and double correlations to be the same as the one resulting from a normal joint probability of $\widetilde{u}(\widetilde{R})$ and $\widetilde{u}(\widetilde{R}+\widetilde{r})$. With this assumption H(k) can be related to the energy spectrum function E(k) of isotropic turbulence and approximately evaluated.

To relate the statistical properties of the substantial acceleration in hydrolynamics to the derivatives at a fixed position we must know the properties of the pressure gradient. A study of the pressure field is thus very important or the relation between the Eulerian and Lagrangian correlations and thus or the diffusion problem in turbulence. Besides BATCHELOR'S paper [75] reference is made to recent work of Collis [78] and UBEROI and CORRSIN [107].

BIBLIOGRAPHY

Section IV

- [34] Batchelor, G. K., The Theory of Axisymmetric Turbulence, Proc. Royal Soc. [A] 186, 480 (1946).
- [35] Batchelor, G. K., Kolmogoroff's Theory of Locally Isotropic Turbulence, Proc. Cambridge Phil. Soc. 43, 533 (1947).
- [36] Batchelor, G. K., The Role of Big Eddies in Homogeneous Turbulence, Proc. Royal Soc. [A], 195, 513 (1949).
- [37] Betchov, R., An Experimental Model of Turbulence, Phys. Rev. (1952).

 Abstract only.
- [38] Burgers, J. M., A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence, in: Advances in Applied Mechanics, Vol. I (Academic Press, New York, 1948), p. 171.

¹⁾ The second term has to be subtracted out to make $\varphi(\vec{r}) \to 0$ for large |r|.

[39] CHANDRASEKHAR, S., The Theory of Axisymmetric Turbulence, Phil. Trans Royal Soc. [A] 242, 557 (1950).

ZAMD

40' CHANDRASEKHAR, S., The Decay of Axisymmetric Turbulence, Proc. Roya Soc. [A] 203, 358 (1950).

41 CHANDRASEKHAR, S., On Turbulence Caused by Thermal Instability, Phil Trans. Royal Soc. [A] 244, 357 (1952).

42] COLE, D. D., see: LAGERSTROM, P. A., COLE, J. D., and TRILLING, L. Problems in the Theory of Viscous Compressible Fluids, Calif. Inst. Techn (1949).

43] Cole, J. D., On a Quasi-Linear Parabolic Equation Occurring in Aerodv namics, Quart. appl. Math. 9, 225 (1951).

44] CORRSIN, S., Investigations of Flow in an Axially Symetric Heated Jet of Air, NACA Adv. Conf. Rep. 3123 (1943) (Declassified).

45] CORRSIN, S., and UBEROI, M. S., Spectra and Diffusion in a Round Turbulent Jet, NACA T. R. 1040 (1951).

46] Corrsin, S., An Experimental Verification of Local Isotropy, J. aeron. Sci

 16, 757 (1949).
 [47] DRYDEN, H. L., Some Recent Contributions to the Study of Transition and Turbulent Boundary Layers, NACA T. N. 1168 (1947).

[48] HOERNER, VON, see: Ref. [10], (ZAMP 3, 341 [1952]).

49] HOPF, E., The Partial Differential Equation $u_t + u u_x = \mu u_{xx}$, Communications on Pure and Applied Mathematics, III (1950).

[50] KLEBANOFF, P. S., and DIEHL, Z. W., Some Features of Artificially Thick ened Fully Developed Turbulent Boundary Layers with Zero Pressur-Gradient, NACA T. N. (1952) (in press).

[51] Kolmogoroff, A. N., The Local Structure of Turbulence in Incompressible Fluids for Very Large Reynolds Number, C. R. Doklady U. R. S. S. 30, 30 (1941).

52] Laufer, John, Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel, NACA T. N. 1257 (1947).

[53] LIEPMAN, H. W., and LAUFER, J., Investigations of Free Turbulent Mixing NACA T. N. 1257 (1947).

[54] MacCready, P. B., Atmospheric Turbulence, Ph. D. Thesis, Calif. Inst Techn. (1952) (to be published).

55] MacPhail, D. C., Proc. 6th int. Congr. appl. Mech., Paris (1946).

[56] Onsager, Lars, The Distribution of Energy in Turbulence. Abstract, Phys. Rev. 68, 286 (1945).

[57] PAI, S. I., Turbulent Flow Between Rotating Cylinders, NACA T. N. 89 (1943).

[58] Roshko, A., On the Development of Turbulent Wakes From Vortex Streets Ph. D. Thesis, Calif. Inst. Techn. (1952) (to be published).

[59] ROTTA, J., Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, Z. Phys. 129, 54 (1951); 131, 51 (1951).

[60] TOWNSEND, A. A., Measurements in the Turbulent Wake of a Cylinder Proc. Royal Soc. [A] 190, 551 (1947).

[61] TOWNSEND, A. A., Experimental Evidence for the Theory of Local Isotropy Proc. Cambridge Phil. Soc. 44, 560 (1948).

[62] TOWNSEND, A. A., Local Isotropy in the Turbulent Wake of a Circulal Cylinder, Australian J. sci. Res. 1, 161 (1948).

[63] TOWNSEND, A. A., The Eddy Viscosity in Turbulent Shear Flow, Phil. Mag. 41, 320 (1950).

- [64] TOWNSEND, A. A., The Fully Developed Turbulent Wake of a Circular Cylinder, Australian J. sci. Res. 2, 451 (1949).
- [65] TOWNSEND, A. A., The Structure of the Turbulent Boundary Layer, Proc. Cambridge Phil. Soc. 47, 375 (1951).
- [66] WEIZSÄCKER, C. F. VON, Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynoldsschen Zahlen, Z. Phys. 124, 614 (1948).
- [67] WEIZSÄCKER, C. F. VON, see: Ref. [10], (ZAMP 3, 341 [1952]).

Section V

- [68] BATCHELOR, G. K., Energy Decay and Self-Preserving Correlation Functions in Isotropic Turbulence, Quart. appl. Math. 6, 97 (1948).
- [69] Batchelor, G. K., Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence, I: Eulerian Analysis, Australian J. sci. Res. 2, 437 (1949).
- [70] BATCHELOR, G. K., and Stewart, R. W., Anisotropy of the Spectrum of Turbulence at Low Wave Numbers, Quart. J. Mech. appl. Math. 3, 1 (1950).
- [71] BATCHELOR, G. K., and TOWNSEND, A. A., Decay of Isotropic Turbulence in the Initial Period, Proc. Royal Soc. [A] 193, 539 (1948).
- [72] BATCHELOR, G. K., and TOWNSEND, A. A., Decay of Turbulence in the Final Period, Proc. Royal Soc. [A] 194, 527 (1948).
- [73] BATCHELOR, G. K., and TOWNSEND, A. A., Decay of Vorticity in Isotropic Turbulence, Proc. Royal Soc. 190, 534 (1947).
- [74] BATCHELOR, G. K., and TOWNSEND, A. A., The Nature of Turbulent Motion at Large Wave Numbers, Proc. Royal Soc. 199, 238 (1949).
- [75] BATCHELOR, G. K., Pressure Fluctuations in Isotropic Turbulence, Proc. Cambridge Phil. Soc. 47, 359 (1951).
- [76] CHANDRASEKHAR, S., On Heisenberg's Elementary Theory of Turbulence, Proc. Royal Soc. [A] 200, 20 (1949).
- [77] CHANDRASEKHAR, S., The Fluctuations of Density in Isotropic Turbulence, Proc. Royal Soc. [A] 210, 18 (1951).
- [78] COLLIS, D. C., The Diffusion Process in Turbulent Flow, Australian Council sci. and industr. Res. (Aeron.), Report A 55 (1948).
- [79] CORRSIN, A., The Decay of Isotropic Temperature Fluctuations in an Isotropic Turbulence, J. aeron. Sci. 18, 417 (1951).
- [80] FRENKIEL, F. N., The Decay of Isotropic Turbulence, J. appl. Mech. 5, 311 (1948).
- [81] FRENKIEL, F. N., On Third Order Correlation and Vorticity in Isotropic Turbulence, Quart. appl. Math. 6, 86 (1948).
- [82] Heisenberg, W., On the Theory of Statistical and Isotropic Turbulence, Proc. Royal Soc. [A] 195, 402 (1949).
- [83] Heisenberg, W., Zur statistischen Theorie der Turbulenz, Z. Phys. 124, 628 (1948).
- [84] KARMAN, TH. VON, Progress in the Statistical Theory of Turbulence, Proc. nat. Acad. Sci. 34, 530 (1948).
- [85] KARMÁN, TH. von, and Howarth, L., On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence, Proc. Royal Soc. [A] 164, 192 (1938).
- [86] KÁRMÁN, TH. VON, and LIN, C. C., On the Concept of Similarity in the Theory of Isotropic Turbulence, Rev. modern Phys. 21, 516 (1949).
- [87] KARMAN, Th. von, and Lin, C. C., On the statistical Theory of Isotropic Turbulence, in: Advances in Applied Mechanics, Vol. II (Academic Press, New York, 1951), p. 1.

- [88] Kolmogoroff, A. N., Dissipation of Energy in Locally Isotropic Turbulence, C. r. Acad. Sci. U. R. S. S. 31, 538 (1941); 32, 16 (1941).
- [89] KOVASZNAY, L. S. G., Spectrum of Locally Isotropic Turbulence, J. aeron. Sci. 15, 745 (1948).
- 90° Lee, T. D., Note on the Coefficient of Eddy Viscosity in Isotropic Turbulence, Phys. Rev. 77, 842 (1950).
- 91 LIEPMANN, H. W., LAUFER, J., and LIEPMANN, K., On the Spectrum of Isotropic Turbulence, NACA T. N. 2473 (1951).
- 92] LIN, C. C., On the Law of Decay and the Spectrum of Isotropic Turbulence, Proc. 7th int. Cong. appl. Mech. London 2 (1948).
- 93] LOITSIANSKII, L. G., Some Basic Laws of Isotropic Turbulent Flow, CAHI Rep. 440 (1939); also NACA T. M. 1079 (1945).
- [94] MILLIONSHCHIKOV, M., Decay of Homogeneous Isotropic Turbulence in a Viscous Fluid, C. r. Doklady U. R. S. S. 22, 231 (1939).
- [95] OBOUKHOV, A., On the Energy Distribution in the Spectrum of a Turbulent Flow, C. r. Doklady U. R. S. S. 32, 19 (1941).
- [96] PROUDMAN, I., A Comparison of Heisenberg's Spectrum with Experiment, Proc. Cambridge Phil. Soc. 47, 158 (1951).
- [97] ROBERTSON, H. P., The Invariant Theory of Isotropic Turbulence, Proc Cambridge Phil. Soc. 36, 209 (1940).
- [98] STEWARD, R. W., Triple Correlations in Isotropic Turbulence, Proc. Cambridge Phil. Soc. 47, 146 (1950).
- [99] STEWARD, R. W., and TOWNSEND, A. A., Similarity and Self-Preservation in Isotropic Turbulence, Phil. Trans. Royal Soc. 243, 359 (1951).
- [100] TAYLOR, G. I., Stability of a Viscous Liquid Contained Between Two Rotating Cylinders, Phil. Trans. Royal Soc. [A] 223, 289 (1923).
- [101] TAYLOR, G. I., Diffusion by Continuous Movements, Proc. London Math Soc. 20, 196 (1921).
- [102] TAYLOR, G. I., Production and Dissipation of Vorticity in a Turbulent Fluid; Proc. Royal Soc. [A] 184, 15 (1938).
- [103] TAYLOR, G. I., The Spectrum of Turbulence, Proc. Royal Soc. [A] 164, 476 (1938).
- 104] TAYLOR, G. I., The Statistical Theory of Turbulence, Parts I-IV, Proc. Roya. Soc. [A] 151, 421 (1935).
- [105] TOWNSEND, A. A., Measurement of Double and Triple Correlation Derivatives in Isotropic Turbulence, Proc. Cambridge Phil. Soc. 43, 560 (1947).
- [106] TOWNSEND, A. A., On the Fine-Scale Structure of Turbulence, Proc. Royal Soc. [A] 208, 534 (1951).
- [107] UBEROI, M. S., and CORRSIN, S., Diffusion of Heat from a Line Source in Isotropic Turbulence, NACA T. N. 2710 (1952).

Zusammenfassung

Die Arbeit gibt einen Überblick über einige Probleme der neueren Turbulenz forschung. Nach einer allgemeinen Einleitung werden zuerst elementare, für die Turbulenztheorie wichtige Resultate der Theorie homogener, stochastischer Vor gänge diskutiert. Im dritten Teil werden sodann Beispiele linearer Systeme be handelt, bei denen die äusseren Kräfte von turbulenten Schwankungen herrühren Im vierten Teil werden turbulente Transportphänomene gestreift, und im fünften Teil wird ein kurzer Überblick über Resultate und Fragen der Theorie der iso tropen Turbulenz gegeben.

(Received: July 7, 1952.)

Vol. III, 1952

Zwei Integralgleichungen erster Art, die sich mit Hilfe Mathieuscher Funktionen lösen lassen')

Von Johannes Dörr, Darmstadt²)

1. Aufgabenstellung

Wir betrachten die folgenden beiden Integralgleichungen erster Art:

$$g(x) = \int_{1}^{1} h(y) Z_{0}(k \mid x - y \mid) dy$$
 (1)

427

und

$$w(x) = k \int_{-1}^{1} p(y) \frac{|x - y|}{x - y} Z_{1}(k|x - y|) dy$$
 (2)

mit

$$Z_n(\alpha) = A J_n(\alpha) + B N_n(\alpha) . \tag{3}$$

Darin bedeuten die J_n bzw. N_n die Besselschen bzw. Neumannschen Funktionen n-ter Ordnung, und A und B sind beliebige komplexe Konstanten.

Die erste Integralgleichung tritt auf bei der Untersuchung von Beugungserscheinungen von Schall- oder Lichtwellen am geraden Spalt, und zwar muss dann $Z_0=H_0^2$ gesetzt werden, wenn man die Zeitabhängigkeit durch $\exp\left(\pm i\,\omega\,t\right)$ ausdrückt. Die zweite Integralgleichung ist mit $Z_1+H_1^2$ der wesentliche Bestandteil der Integralgleichung für den Druck p und den Abwind wedes harmonisch schwingenden dünnen Profils im kompressiblen Medium. Wird die Zeitabhängigkeit durch $\exp\left(-i\,\omega\,t\right)$ ausgedrückt, so sind die Hankel-Funktionen zweiter Art durch die erster Art zu ersetzen.

Die beiden Integralgleichungen (1) und (2) sind eng miteinander verwandt. Die zweite geht aus der ersten durch Differentiation nach x hervor. Die Lösung der zweiten Integralgleichung lässt sich deshalb relativ einfach aus der Lösung der ersten herleiten. Es wird daher vorerst nur die erste Integralgleichung untersucht.

Ausführliche Wiedergabe eines auf der GaMM.-Tagung (Freiburg i. Br. vom 29. bis 31. März
 1951) gehaltenen Vortrages.
 Institut für praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt.

2. Die Eigenfunktionen der Integralgleichung (1)

Mit der Substitution

$$x = -\cos\beta$$
, $y = -\cos\alpha$ (4a)

nimmt (1) die folgende Form an:

$$G(\beta) = \int_{0}^{\pi} H(\alpha) \sin \alpha Z_{0} \left(k \left| \cos \alpha - \cos \beta \right| \right) d\alpha. \tag{4b}$$

Setzt man noch

$$H(\alpha) \sin \alpha = F(\alpha)$$
,

so wird daraus

$$G(\beta) = \int_{0}^{\pi} F(\alpha) Z_{0} \left(k \left| \cos \alpha - \cos \beta \right| \right) d\alpha . \tag{4c}$$

Damit hat unsere Integralgleichung eine Form erhalten, die den Anschluss anbekannte Ergebnisse erlaubt. Whittaker¹) hat die Gültigkeit der Beziehunger

$$ce_n(\beta) = \lambda'_n \int_{-\pi}^{+\pi} ce_n(\alpha) J_0[k(\cos\alpha - \cos\beta)] d\alpha$$
 (5)

bewiesen, wobei die $ce_n(\beta)$ die geraden Mathieuschen Funktionen sind, die der Differentialgleichung

$$G''(\beta) + (q - k^2 \cos^2 \beta) G(\beta) = 0$$
 (6)

genügen. Man gewinnt die Beziehungen (5), wenn man von den ebenfalls von Whittaker gefundenen Beziehungen

$$ce_n(\beta) = \varkappa_n \int_{-\pi}^{\pi} ce_n(\alpha) \exp(i k \cos \alpha \cos \beta) d\alpha$$
 (7)

ausgeht, für $ce_n(\alpha)$ wieder die Integraldarstellung der Form (7) einsetzt und dann die Reihenfolge der Integrationen vertauscht.

Es wird nun gezeigt werden, dass nicht nur die Relationen (5) , sondern auch noch die Relationen

$$ce_n(\beta) = \lambda_n'' \int_{-\pi}^{\pi} ce_n(\alpha) N_0 (k | \cos \alpha - \cos \beta |) d\alpha$$
 (8)

für alle $n=0,1,2,3,\ldots$ gültig sind. Damit ist zugleich gezeigt, dass auch die allgemeinere Integralgleichung (4c) die geraden Mathieuschen Funktionen als Eigenfunktionen besitzt.

¹⁾ E. T. Whittaker und G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4. Aufl. (University Press Cambridge 1927), S. 426.

Der Versuch, die Beziehungen (8) ebenso wie die Beziehungen (5) aus andern bereits bekannten Integralgleichungen der Mathieuschen Funktionen herzuleiten, gelang nicht. Wir nehmen deshalb funktionentheoretische Methoden zu Hilfe und betrachten dazu den Ausdruck

$$\psi(\beta) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha) K(\alpha, \beta) d\alpha$$
 (9a)

mit

$$K(\alpha, \beta) = N_0 \left(k \cos \alpha - \cos \beta \right). \tag{9b}$$

Wir wollen voraussetzen, dass sich $q(\alpha)$ als Funktion der komplexen Variablen α auffassen lasse und in dem Streifen $-\pi \leq \text{Re}[\alpha] \leq +\pi$ regulär analytisch sei. Der Kern $K(\alpha, \beta)$ ist aber nicht ohne weiteres in diesem Streifen der α -Ebene als regulär analytische Funktion deutbar. Wir betrachten deshalb die Funktion

$$\Re(\alpha, \beta) = N_0 \left[k \left(\cos \alpha - \cos \beta \right) \right] \tag{9c}$$

rund fassen hier α als komplexe Variable auf. In dem Streifen

$$-\pi \le \operatorname{Re}\left[\alpha\right] \le +\pi \tag{10}$$

hat $\Re(\alpha,\beta)$ für reelle β -Werte $(-\pi \leq \beta \leq +\pi)$ auf der reellen Achse der α -Ebene zwei logarithmische Verzweigungspunkte an den Stellen $\alpha_r + \perp \beta$. Wir machen $\Re(\alpha,\beta)$ in dem Streifen (10) der α -Ebene eindeutig, indem wir von dem Verzweigungspunkt $\alpha_1 + |\beta|$ einen Schnitt entlang der reellen Achse nach rechts und von dem Verzweigungspunkt $\alpha_2 + |\beta|$ einen Schnitt entlang der reellen Achse nach links führen. Dann kann man auf Grund der Umlaufrelation für den Logarithmus an Stelle von (9a) auch schreiben:

$$\psi(\beta) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{-\pi} \varphi(\alpha) \Re(\alpha, \beta) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha) \Re(\alpha, \beta) d\alpha.$$
 (11)

Dabei bedeutet das Zeichen bzw. , dass der Integrationsweg oberhalb bzw. unterhalb der Verzweigungsschnitte von – π nach – π zu führen ist.

Wir fordern vorerst

$$-\pi < \beta < +\pi. \tag{12}$$

Dann ist $\Re(\alpha, \beta)$ überall auf beiden Integrationswegen regulär analytisch und genügt, wie man leicht prüfen kann, folgender partieller Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Re}{\partial \beta^2} + (q - k^2 \cos^2 \beta) \Re = \frac{\partial^2 \Re}{\partial \alpha^2} + (q - k^2 \cos^2 \alpha) \Re.$$
 (13)

Darin bedeutet q einen vorerst beliebigen Parameter. Da unter der Bedingung (12) die Integranden von (11) auf beiden Integrationswegen regulär analytisch sind, darf man, wenn man den Ausdruck (11) nach β differenziert, die Reihen folge von Integration und Differentiation vertauschen. Auf Grund von (13 findet man deshalb aus (11) nach zweimaliger Anwendung der partieller Integration:

$$\psi''(\beta) + (q - k^2 \cos^2 \beta) \ \psi(\beta)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\pi} [\varphi''(\alpha) + (q - k^2 \cos^2 \alpha) \ \varphi(\alpha)] \ \Re(\alpha, \beta) \ d\alpha$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\pi} [\varphi''(\alpha) + (q - k^2 \cos^2 \alpha) \ \varphi(\alpha)] \ \Re(\alpha, \beta) \ d\alpha$$

$$+ \left[\varphi(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} K(\alpha, \beta) - \varphi'(\alpha) K(\alpha, \beta) \right]_{\alpha = -\pi}^{\alpha = +\pi}.$$

Die beiden Integrale lassen sich zusammenfassen. Ausserdem ist

$$rac{\partial}{\partial lpha} \; K(lpha,\,eta) = 0 \quad {
m für} \quad lpha = \pm\,\pi \;, \quad K(-\,\pi,\,eta) = K(+\,\pi,\,eta) \;.$$

Damit erhält man schliesslich

$$\psi''(\beta) + (q - k^{2} \cos^{2} \beta) \psi(\beta)$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} [\varphi''(\alpha) + (q - k^{2} \cos^{2} \alpha) \varphi(\alpha)] K(\alpha, \beta) d\alpha$$

$$+ K(\pi, \beta) [\varphi'(-\pi) - \varphi'(+\pi)].$$
(15)

Aus (9) folgt, da der Kern $K(\alpha, \beta)$ eine gerade Funktion in α ist, dass für ein ungerade Funktion $\varphi(\alpha)$ die zugeordnete Funktion $\psi(\beta)$ identisch Null ist. Des halb wollen wir für $\varphi(\alpha)$ nur gerade Funktionen zulassen. Es sei also:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(-\alpha) . \tag{16a}$$

(14-

Wir fordern nun ausserdem

$$\varphi'(-\pi) = \varphi'(+\pi) , \qquad (16b)$$

$$\varphi''(\alpha) + (q - k^2 \cos^2 \alpha) \varphi(\alpha) = 0.$$
 (16c)

Durch diese drei Forderungen werden die geraden Mathieuschen Funktione erster Art $ce_n(\alpha)$ definiert, deren Existenz aber an die Bedingung geknüpflist, dass bei vorgegebenem k-Wert der Parameter q spezielle Werte

$$q = q_n(k) \tag{16 d}$$

annimmt. Wenn alle vier Forderungen (16) erfüllt sind, so verschwindet die gesamte rechte Seite der Gleichung (15), und es folgt für alle q_n :

$$\psi''(\beta) + (q_n - k^2 \cos^2 \beta) \ \psi(\beta) = 0. \tag{17a}$$

Da der Kern $K(\alpha, \beta)$ auch hinsichtlich der Variablen β eine gerade Funktion ist, folgt ausserdem aus (9)

$$\psi(-\beta) = \psi(+\beta) . \tag{17b}$$

Da in der Differentialgleichung (17a) der Parameter q nur die speziellen Werte (16d) annimmt, können die nichttrivialen Lösungen mit der Eigenschaft (17b) nur die geraden Mathieuschen Funktionen erster Art $ce_n(\beta)$ sein. Mit $q + q_n(k)$ und $q(\alpha) - A_n ce_n(\alpha)$ folgt also aus (15) bzw. (9) das Ergebnis $\psi(\beta) = B_n ce_n(\beta)$. Das Verhältnis $\lambda_n^n + A_n B_n$ ist vorläufig noch unbekannt. Damit ist die Richtigkeit der Beziehungen (8) bewiesen unter der Voraussetzung $-\pi < \beta < +\pi$. Das Ergebnis bleibt aber auch für $\beta \to \pm \pi$ gültig, da das Integral in der Beziehung (8) auch für diese Grenzfälle existiert und den Grenzwerten stetig zustrebt.

Aus (5) und (8) folgen unmittelbar die allgemeineren Beziehungen

$$ce_n(\beta) = A_n \int_{-\pi}^{\pi} ce_n(\alpha) Z_0 \left(k \left| \cos \alpha - \cos \beta \right| \right) d\alpha$$
 (18)

nit

$$Z_0(x) = A J_0(x) + B N_0(x) \quad \text{und} \quad \Lambda_n = \frac{\lambda_n' \lambda_n''}{A \lambda_n'' + B \lambda_n'}.$$

Aus (18) folgen weiterhin die Relationen

$$\frac{(d \ d\beta) \ ee_n(\beta)}{\sin \beta} - 1_n k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} \ Z_1 (k \mid \cos \alpha - \cos \beta \mid) \ d\alpha \ . \tag{19}$$

Dabei ist das Integral als Cauchyscher Hauptwert zu verstehen.

3. Bestimmung der Eigenwerte der Integralgleichung (1)

Um die Beziehungen (18) und (19) zur Lösung der betrachteten Integralleichungen benutzen zu können, muss man die Eigenwerte A_n bzw. A_n' und A_n'' kennen. Die Berechnung dieser Eigenwerte ist relativ schwierig und langvierig. Am unangenehmsten ist die Ermittlung der A_n'' , und deshalb soll mit eren Berechnung begonnen werden.

An Stelle von (8) kann man mit den bereits erklärten Bezeichnungen auch

Threiben
$$ce_n(\beta) = 2 \, \lambda_n'' \int\limits_0^\pi ce_n(\alpha) \, K(\alpha, \, \beta) \, d\alpha \qquad (20a)$$

oder

$$ce_n(\beta) = \lambda_n'' \int_0^{\pi} ce_n(\alpha) \Re(\alpha, \beta) d\alpha + \lambda_n'' \int_0^{\pi} \dots d\alpha$$
 (201)

In dem Streifen $0 \le \text{Re} |\alpha| \le \pi$ gibt es nur einen Verzweigungspunkt $\alpha_c - |\beta|$ der auf der reellen Achse liegt, da β reell sein soll $(-\pi \le \beta \le +\pi)$. Vor diesem Verzweigungspunkt führen wir einen Verzweigungsschnitt über dir reelle Achse der α -Ebene nach rechts. Da die $ce_n(\beta)$ gerade Funktionen sinc darf man sich auf positive β -Werte beschränken. Unter der Voraussetzung

$$0 < \beta < \pi \tag{21}$$

kann man dann die beiden in (20b) vorgesehenen Integrationswege so ir Bogen oberhalb bzw. unterhalb des Verzweigungsschnittes von 0 nach führen, dass überall auf den Wegen die Bedingung

$$|\cos \alpha| > |\cos \beta| \tag{211}$$

erfüllt ist. Dann konvergiert überall auf den beiden Wegen die Entwicklung

$$\Re(\alpha,\beta) = N_0 \left(k\cos\alpha - k\cos\beta\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \int_m \left(k\cos\beta\right) N_m \left(k\cos\alpha\right)$$
 mit $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$ für $m = 1, 2, 3, \dots$

Man kann also an Stelle von (20b) auch schreiben:

$$\begin{split} cc_n(\beta) & \quad \lambda_n'' \sum_{m=0}^\infty \varepsilon_m \ J_m \ (k \cos \beta) \\ & \quad \times \left[\int\limits_0^\pi ce_n(\alpha) \ N_m \ (k \cos \alpha) \ d\alpha \ + \int\limits_0^\pi ce_n(\alpha) \ N_m \ (k \cos \alpha) \ d\alpha \ \right]. \end{split}$$

Die geraden Mathieuschen Funktionen lassen sich in folgender Form durc Fourier-Reihen darstellen:

$$ce_n(\alpha) = \sum_{r=0}^{\infty} d_{n,r} \cos r \alpha \quad \text{mit} \quad d_{n,r} = 0 \quad \text{für} \quad n+r = 1, 3, 5, \dots$$
 (2)

Damit erhält man

$$ce_{n}(\beta) = \lambda_{n}^{"} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{m} J_{m} (k \cos \beta) \sum_{r=0}^{\infty} d_{n,r} \times \left[\int_{0}^{\pi} \cos r \alpha N_{m} (k \cos \alpha) d\alpha + \int_{0}^{\pi} \cos r \alpha N_{m} (k \cos \alpha) d\alpha \right].$$
(23)

Die hier auftretenden Integrale lassen sich berechnen. Man findet mit den im Anhang kurz hergeleiteten Ergebnissen (36b):

$$c_n(\beta) = \pi \lambda_n'' \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_{n-\sqrt{k}} \cos \beta \sum_{r=0}^{\infty} J_{r-r} \left[J(k-2) N(k-2) + J(k-2) N(k-2) \right]. \tag{24}$$

Dabei ist nur über die Terme zu summieren, für die n+r und m+r bzw. n-r gerade sind.

Die Doppelsummen sind für numerische Rechnungen unbrauchbar. Wir reachten deshalb, dass die Funktionswerte $ce_n(\pi/2)$ für $n=0,2,4,\ldots$ und $e'_n(\pi/2)$ für $n=1,3,5,\ldots$ relative Extrema sind. Zur numerischen Berechung der Eigenwerte λ_n'' eignen sich darum die folgenden Beziehungen

$$\varepsilon_{n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda_{n}^{"} 2 \pi \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} d_{n,2\nu} J_{\nu}\left(\frac{k}{2}\right) N_{\nu}\left(\frac{k}{2}\right) \quad \text{für} \quad n = 0, 2, 4, \dots, \tag{25a}$$

$$\frac{\gamma'_{n}(\frac{\pi}{2}) = \lambda_{n} \pi k \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n} d_{n+1-1} \left[J_{i}(\frac{k}{2}) N_{i-1}(\frac{k}{2}) - J_{r-1}(\frac{k}{2}) N_{r}(\frac{k}{2}) \right]}{\text{für} \cdot n = 1, 3, 5, \dots}$$
(25b)

Ausgangspunkt für die Berechnung der Eigenwerte λ_n' ist die Beziehung

$$ce_n(\beta) = 2\; \lambda_n' \int\limits_0^{\cdot \cdot} ce_n(\mathbf{x}) \; J_0 \; (k\, \cos \mathbf{x} - k\, \cos \beta) \; d\mathbf{x} \; .$$

an kann nun alle Herleitungen von Beziehung (21c) bis (25b) auf diesen Fall bertragen, indem man in all diesen Relationen die Neumannschen Funktionen N_{μ} durch die Besselschen Funktionen J_{μ} ersetzt. Damit erhält man an telle der Ergebnisse (25a) und (25b) die folgenden:

$$ce_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda'_n \, 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} \, (-1)^{\nu} \, d_{n, \, 2\nu} \left[J_{\nu}\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2 \quad \text{für} \quad n = 0, \, 2, \, 4, \, \dots, \quad (26\,\text{a})$$

$$ce'_{n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda'_{n} \, 2 \, \pi \, k \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \, d_{n, 2\nu-1} \, J_{\nu}\left(\frac{k}{2}\right) \, J_{\nu-1}\left(\frac{k}{2}\right)$$
für $n = 1, 3, 5, \dots$

$$(26 b)$$

Bei diesem Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte λ'_n und λ''_n wird die enntnis der Fourier-Koeffizienten $d_{n,r}$ der geraden Mathieuschen Funktionen (ster Art $ce_n(\beta)$ vorausgesetzt¹).

E. L. INCE, Tables of the Elliptic-Cylinder Functions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 52, 355-423 131/32).

$$\lambda_0'' = -\frac{1}{4 \ln (4/\gamma k)}$$
; $\lambda_n'' = -\frac{n}{4}$ für $n = 1, 2, 3, ...$; $k \to 0$
 $\lambda_0' = \frac{1}{2\pi}$; $\lambda_n' \sim 0 \left(\frac{1}{k^m}\right)$

mit m = n für n = 0, 2, 4, ...; m = n + 1 für n = 1, 3, 5, ...

Im Grenzfall $k \to 0$ streben also alle λ'_n mit $n \ge 1$ mindestens wie $0(1/\hbar)$ gegen Unendlich, und λ''_0 strebt wie $1/\ln k$ gegen Null.

4. Lösungen der beiden Integralgleichungen

Wir kehren zurück zu der Integralgleichung (1), wählen aber für die folge den Betrachtungen die transformierte Form (4 c). Wir nehmen an, die vorg gebene Funktion $G(\beta)$ lasse sich in eine Reihe nach Mathieuschen Funktion entwickeln.

$$G(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, ce_n(\beta) \,. \qquad (0 \le \beta \le \pi) \quad (27)$$

Dann folgt wegen (18) als formale Lösung der Integralgleichung (4 c) (Reihenausdruck

$$F(\alpha) = 2\sum_{n=0}^{n} \Lambda_n \, a_n \, ce_n(\alpha) \tag{27}$$

oder

434

$$H(\alpha) = \frac{2}{\sin \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \, a_n \, ce_n(\alpha) \,. \tag{23}$$

Die allgemeinsten Voraussetzungen, die $G(\beta)$ erfüllen muss, damit sowohl « Reihe (27a) als auch die Reihe (27b) konvergieren, sollen hier nicht untersuc werden. Statt dessen soll auf einen physikalisch wichtigen Grenzfall ein; gangen werden.

Es wurde bereits erwähnt, dass die Integralgleichung (1) bei der Untsuchung der Lichtbeugung am geraden Spalt von Bedeutung ist. Der Pameter k steht dabei in Zusammenhang mit der Spaltbreite, und zwar wird um so kleiner, je schmaler der Spalt wird. Für den sehr schmalen Spalt erhman deshalb eine ausreichend genaue Näherungslösung, wenn man die Ingralgleichung (1) bzw. (4b) für den Grenzfall $k \to 0$ löst. Befindet sich aussedem die Lichtquelle in grosser Entfernung vom Spalt, so darf man

$$G(\beta) = C = \text{const}$$

setzen, und Reihe (27a) besteht im Grenzfall $k \to 0$ nur aus dem mit de

ndex Null gekennzeichneten Term. Deshalb braucht man in diesem Fall auch ur den Eigenwert A_0 zu berechnen. Man erhält aus den bereits hergeleiteten Frenzwerten für λ_0' und λ_0'' und der unter (18) angegebenen Beziehung

$$M_0 \sim -\frac{1}{4 i \ln (4 \cdot \gamma k) - 2 \cdot \pi} = \frac{i}{4 \ln (4 i / \gamma k)} \quad \text{für } k \to 0 \;, \quad A = 1, \quad B = i \;.$$

'amit ergibt sich aus (27c) für $k \to 0$, A = 1, B = i:

$$H(\alpha) = \frac{i C}{2 \sin \alpha \ln (4 i/\gamma k)}$$
 bzw. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{i C}{2 \ln (4 i/\gamma k)}$.

as ist genau die von Sommerfell¹ angegebene Näherungslösung, die hier auhelos aus den allgemeineren Ergebnissen folgt.

Zür Lösung der Integralgleichung (2) ist ebenso wie bei der Integralgleichung (1) die Koordinatentransformation (4a) zweckmässig. Setzt man noch $(\alpha) \sin \alpha = Q(\alpha)$, so erhält man dann aus (2):

$$W(\beta) = k \int_{-\cos\alpha}^{7} Q(\alpha) \frac{|\cos\alpha - \cos\beta|}{\cos\alpha - \cos\beta} Z_1 \left(k |\cos\alpha - \cos\beta| \right) d\alpha.$$
 (28a)

ir setzen nun voraus, die vorgegebene Funktion in (28a) lasse sich wie folgt eine Reihe entwickeln:

$$W(\beta) = \frac{1}{\sin \beta} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{d}{d\beta} ce_n(\beta) . \qquad (28b)$$

unn erhält man wegen (19) als formale Lösung von (28a) den Reihenausdruck:

$$Q(\alpha) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n b_n ce_n(\alpha) . \qquad (28c)$$

bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, dass die Reihen hier nicht it dem Index Null, sondern mit dem Index Eins beginnen. Man kann nämlich mer eine im Bereich $0 \le \beta \le \pi$ konvergente Reihe folgender Art bestimmen

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} c e_{2m}(\beta) = 1$$
 (29a)

ad erhält daraus die ebenfalls im Bereich $0 \le eta \le \pi$ konvergente Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} - \frac{d}{d\beta} - c e_{2m}(\beta) = 0.$$
 (29b)

sser im Grenzfall $k \to 0$ sind alle Koeffizienten c_{2m} in (29a) und (29b) von all verschieden, da für $k \neq 0$ der nullte Fourier-Koeffizient $d_{2m,0}$ der geraden

t.) A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 4 (Dieterichsche Verlagsbuchtdlung, Wiesbaden 1950), S. 284 und 288.

Mathieuschen Funktionen immer von Null verschieden ist¹). Daraus folgt, da man im Falle $k \neq 0$ immer die Ableitung einer geraden Mathieuschen Funktic mit geradem Index durch die Ableitung aller übrigen geraden Mathieusche Funktionen mit geraden Indizes ausdrücken kann. Es ist zweckmässig, sie die Ableitung von $ce_0(\beta)$ durch die Ableitung der übrigen $ce_{2m}(\beta)$ ausgedrück zu denken, um bei der Behandlung des Grenzfalles k = 0 keine Schwierigke zu haben. Deshalb fehlen in den Reihen (28b) und (28c) die Terme zu Index Null.

Die Lösung (28c) der Integralgleichung (28a) ist im allgemeinen nich vollständig. Wenn nämlich die Eigenwerte A_n so beschaffen sind, dass die nur den Koeffizienten c_n der Reihe (29a) gebildete Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m} c_{2m} c_{2m} ce_{2m}(\alpha) = Q_0(\alpha) \quad \text{im Bereich} \quad 0 \le \alpha \le \pi$$
 (29)

konvergiert, so stellt $Q_0(\alpha)$ wegen (29b) und (19) eine Lösung der homogene Integralgleichung (28a), also eine Lösung für den Sonderfall $W(\beta)\equiv 0$ der Die allgemeine Lösung ist dann also

$$Q(\alpha) = -2\sum_{n=1}^{\infty} A_n b_n ce_n(\alpha) + C Q_0(\alpha) , \qquad (3)$$

wobei der konstante Faktor C beliebig gewählt werden darf.

Auf die Ermittlung der Voraussetzungen, unter denen Reihe (29c) konve giert, soll in dieser Arbeit nicht eingegangen werden. Als notwendige Bedingur ergibt sich, dass der in der Kernfunktion

$$Z_1(\ldots) = A J_1(\ldots) + B N_1(\ldots)$$

auftretende Faktor B von Null verschieden sein muss. Hinreichende Bedingugen für die Existenz der Reihen (28b) und (29c) gibt Schubert²) an. Wei B von Null verschieden ist, dürften hier die Verhältnisse ähnlich liegen wie dem eingehend untersuchten Sonderfall $k \to 0$.

Zum Abschluss wollen wir einige der mitgeteilten Ergebnisse an dem eiffachen Sonderfall $k \to 0$ beleuchten. Damit in diesem Grenzfall das Integrader Integralgleichung nicht identisch Null wird, muss der in der Kernfunktisauftretende Faktor B von Null verschieden sein. Im Grenzfall $k \to 0$ nimm (28a) die Form an

$$W(\beta) = -\frac{2B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{Q(\alpha)}{\cos \alpha - \cos \beta} d\alpha.$$

¹⁾ E. L. INCE, a. a. O., S. 358.

²) Н. Schubert, Über eine lineare Integrodifferentialgleichung mit Zusatzkern, Ber. Verh. Säc Akad. Wiss. Leipzig, Math.-naturw. Kl., 97, Heft 7 (1950).

Die geraden Mathieuschen Funktionen $cc_n(\beta)$ sind hier zu ersetzen durch lie Funktionen $\cos n \beta$ mit $n=0,1,2,\ldots$ Reihe (29a) entartet zu einem einzigen Term mit dem Index 0, und man findet $c_0=1$. Reihe (29b) entartet zu der trivialen Aussage $(d/d\beta)\cos n \beta=0$ für n=0. Dementsprechend ist $\lambda_0(\alpha)=1_0$. Mit den bereits angegebenen Grenzwerten für λ_n'' nimmt also die Lösung (30b) die Form an

$$Q(\alpha) = \frac{1}{2B} \sum_{n=1}^{\infty} n \, b_n \cos n \, \alpha + \text{const},$$

venn sich die vorgegebene Funktion in eine konvergente Reihe der Form

$$W(\beta) = -\frac{1}{\sin \beta} \sum_{n=1}^{\infty} n \, b_n \sin n \, \beta$$

ntwickeln lässt. Setzt man 2B = -1 und $n b_n = d_n$, so hat man damit die ekannten Ergebnisse aus der Tragflügeltheorie, die sich bei uns als Grenzfall on allgemeineren Beziehungen ergeben.

5. Anhang: Berechnung einiger Integrale

Ausgangspunkt der Berechnung ist die bekannte Beziehung

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\mu}^{2} (2 \ q \cos \alpha) \cos \nu \ \alpha \ d\alpha = \frac{\pi}{2} \ J_{(\mu - \nu)/2}(q) \ J_{(\mu + \nu)/2}(q) \ . \quad (\mu \ge -1) \quad (31)$$

'ir wollen nicht von 0 bis $\pi/2$, sondern von 0 bis π integrieren. Da aber für icht ganze μ -Werte der Punkt z $\pi/2$ Verzweigungspunkt ist, müssen wir er einen solchen Integrationsweg angeben, wie der Verzweigungspunkt umngen werden soll. Wir definieren zu dem Zweck zwei Integrale. Durch das eichen abzw. werde ein Integrationsweg beschrieben, der, von 0 ausgehend berhalb bzw. unterhalb am Verzweigungspunkt $\pi/2$ vorbei nach $\pi/2$ geführt and. Es sei also

$$\bar{D}_{\mu,n} = \int_{0}^{\pi} J_{\mu}(2 \, q \cos \alpha) \cos n \, \alpha \, d\alpha \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$
 (32a)

is den Umlaufrelationen für Bessel-Funktionen und der Periodizität von $s n \alpha$ folgt unter der Voraussetzung $\mu \ge -1$:

oder wegen (31)

$$D_{\mu,n} = \frac{\pi}{2} \left[1 + (-1)^n e^{i\mu\pi} \right] J_{(\mu+n)/2}(q) J_{(\mu-n)/2}(q). \tag{321}$$

Der Integralausdruck (32a) existiert für beliebige reelle μ -Werte und stellt eir analytische Funktion von μ dar, sofern $q \neq 0$ ist. Deshalb gilt das Ergebn (32b) nicht nur unter der Voraussetzung $\mu \geq -1$, sondern für beliebige reel Werte von μ .

Für das zweite Integral

$$\overline{D}_{\mu,n} = \int_{0}^{\pi} J_{\mu}(2 \, q \cos \alpha) \cos n \, \alpha \, d\alpha \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$
 (33)

findet man auf Grund derselben Überlegung das für beliebige reelle μ -Wergültige Ergebnis

$$D_{\mu,n} = \frac{\pi}{2} \left[1 + (-1)^n e^{-i\mu\pi} \right] J_{(\mu+n)/2}(q) J_{(\mu-n)/2}(q) . \tag{33}$$

Durch Addition von (32) und (33) folgt

$$\overline{D}_{\mu,n} + \overline{\overline{D}}_{\mu,n} = \int_{0}^{\pi} J_{\mu}(2 q \cos \alpha) \cos n \alpha \, d\alpha + \int_{0}^{\pi} \dots \, d\alpha \\
= \pi \left[1 + (-1)^{n} \cos \mu \, \pi \right] J_{(\mu+n)/2}(q) J_{(\mu-n)/2}(q)$$
(3)

für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ und beliebig reelle μ -Werte.

Im Anschluss an (32) und (33) definieren wir nun noch die folgendbeiden Integrale:

$$\bar{E}_{m,n} = \int_{0}^{\pi} N_m(2 q \cos \alpha) \cos n \alpha d\alpha, \quad \bar{E}_{m,n} = \int_{0}^{\pi} \dots d\alpha$$
 (3)

mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ und $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Auf Grund der bekannten Beziehung

$$\pi \, N_m = \left[\frac{\partial J_\mu}{\partial \mu} \, - \, (-1)^m \, \frac{\partial J_{-\mu}}{\partial \mu} \right]_{\mu \, = \, m}$$

kann man die Integrale (35) durch Differentiation aus den Integralen (32) u (33) herleiten. Man findet:

$$\pi\,E_{m,\,n} = \left[\begin{array}{ccc} \partial_{\,\mu} \,\, \overline{D}_{\mu,\,n} & - \, (-1)^m \,\, \frac{\partial}{\partial \mu} \,\, D_{-\,\mu,\,n} \right]_{\mu = m}.$$

Daraus erhält man schliesslich nach einer Reihe von Umformungen

$$\overline{E}_{m,n} = \frac{i \pi}{2} (-1)^{n+m} J_{(m+n)/2}(q) J_{(m-n)/2}(q) + \frac{i \pi}{2} (-1)^{m} J_{(-m+n)/2}(q) J_{(-m-n)/2}(q)
+ \frac{\pi}{4} [1 + (-1)^{n+m}] [J_{(m+n)/2}(q) N_{(m-n)/2}(q) + J_{(m-n)/2}(q) N_{(m+n)/2}(q)].$$
(36 a)

Hieraus erhält man die Beziehung für $E_{m,n}$, indem man überall i durch -i ersetzt. Die Addition der beiden Ausdrücke ergibt:

$$\overline{E}_{m,n} + \overline{E}_{m,n} = \int_{0}^{\pi} N_{m} (2 q \cos \alpha) \cos n \alpha \, d\alpha + \int_{0}^{\pi} \dots \, d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[1 + (-1)^{n+m} \right] \left[J_{(m+n)/2}(q) N_{(m-n)/2}(q) + J_{(m-n)/2}(q) N_{(m+n)/2}(q) \right].$$
(36 b)

Damit haben wir alle in den vorhergehenden Abschnitten benutzten Integrale hergeleitet.

Summary

The author investigates the integral equation of the first kind with the kernel

$$A J_0[k (\cos \alpha - \cos \beta)] + B N_0(k |\cos \alpha - \cos \beta|)$$
.

This kernel is shown to have the even Mathieu functions as eigenfunctions. A method suitable for numerical computation of the corresponding eigenvalues is given, and the solution of the integral equation from the obtained results is outlined. By partial differentiation of the kernel with respect to β an equation as obtained which may be solved using the previous results. Both equations appear either in the theory of diffraction of sound or light by slit of infinite length or in the theory of a thin airfoil oscillating in a compressible fluid.

Résumé

On présente une étude de l'équation intégrale de première espèce ayant pour royau $A\ J_0\lceil k\ (\cos\alpha-\cos\beta)\rceil + B\ N_0(k\ [\cos\alpha-\cos\beta])\ .$

On montre que ce noyau a pour fonctions propres les fonctions de Mathieu paires. On donne une méthode de calcul des valeurs propres associées appropriée à un calcul numérique, et on indique le moyen de parvenir à la solution de l'équation intégrale en utilisant les résultats obtenus. Par différentiation partielle du noyau par rapport à β on obtient une équation apparentée à l'équation considérée et alont la solution se déduit d'une manière relativement simple de la solution de ette dernière. Les deux équations interviennent dans le traitement de la diffraction des ondes sonores ou lumineuses par une fente infiniment longue et dans le alcul des forces aérodynamiques mises en jeu par un profil mince oscillant harmoniquement dans un milieu compressible.

Eingegangen: 20. Mai 1952.)

Sur la thermodynamique des processus irréversibles

(Second mémoire)

Par Kyrille Popoff, Sofia1)

Introduction

Dans un premier mémoire²) nous nous sommes occupés de la théorie de. processus irréversibles telle qu'elle a été esquissée par Onsager³), développé par Casimir⁴), de Groot⁵) et d'autres et fondée sur la symétrie du tenseur l des relations phénoménologiques

$$J_i = \sum_i L_{i\,k}\,X_k$$
 , avec $L_{i\,k} = L_{k\,i}$, (1)

où les J, représentent des flux et les X, des forces, c'est-à-dire les dérivées par rapport au temps t des x_i et les dérivées partielles par rapport à x_i de $-\Delta i$ respectivement, ΔS étant l'expression de l'entropie, autour de l'état stabl d'un système adiabatiquement isolé, réduit à

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \sum g_{ik} x_i x_k, \text{ avec } g_{ik} = g_{ki}.$$

Dans notre premier mémoire nous avons montré que dans ce cas les relation phénoménologiques représentent des intégrales premières du système d'équa tions différentielles

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i \quad \text{avec} \quad X_i = -\frac{\partial(\Delta S)}{\partial x_i} \, 6 \, , \tag{3}$$

que la symétrie du tenseur L_{ik} est une conséquence logique de (3), dans ce ca réduit, et que les L_{ik} sont des constantes.

Dans l'étude qui va suivre nous considérons ΔS sous sa forme la plu générale et nous établissons que les relations phénoménologiques découlent de

1) Institut de Mathématiques à l'Université de Sofia.

²) Kyrille Popoff, Sur la thermodynamique des processus irréversibles. ZAMP 3, 42-51 (1951)

3) L. Onsager, Reciprocal Relations in Irreversible Processes, Phys. Rev. 37, 405-426 (1931) 38, 2265-2279 (1931).

4) H. B. C. Casimir, On Onsager's Principle of Microscopic Reversibility, Rev. mod. Phys. 1 343-350 (1945); Philips Res. Rep. 1, 185 (1946).

5) S. R. DE GROOT, Thermodynamics of Irreversible Processes (North-Holland Publishing Cou.

pany, Amsterdam 1951).

6) Comme il a été mis dans les Errata du Fascicule 3, page 237, de ZAMP, les calculs dans not premier mémoire sont faits avec les équations (3) ci-dessus. Au lieu de ΔS lire $-\Delta S$ dans les for mules (4), (5), (10), (11) du premier mémoire.

équations (3), mais dans ce cas la symétrie du tenseur L_{ik} ne se manifeste que dans les termes de la première approximation. Pour arriver à ces résultats, il nous a fallu avoir recours à la théorie analytique des équations différentielles établie par Henri Poincaré que les équations (3) admettent des intégrales s'annulant pour $t - \infty$ et établi le caractère analytique de ces intégrales, nous en déduisons l'ordre de grandeur de la différence $L_{ik} - L_{ki}$ dans le cas général.

Pose du problème et étude des équations différentielles correspondantes

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les paramètres définissant l'état du système, $s(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ l'entropie du système à un moment donné, $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0$ les valeurs de ces paramètres, correspondant à l'état stable, défini par le maximum de S. On a, dans le cas de deux paramètres ξ_1, ξ_2 , en posant

$$x = \xi_{1} - \xi_{1}^{0}, \quad y = \xi_{2} - \xi_{2}^{0}.$$

$$v\Delta S = S(\xi_{1}, \xi_{2}) - S(\xi_{1}^{0}, \xi_{2}^{0}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2} S}{\partial x^{2}} x^{2} + 2 \frac{\partial^{2} S}{\partial x \partial y} x y + \frac{\partial^{2} S}{\partial y^{2}} y^{2} \right)$$

$$- \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^{3} S}{\partial x^{3}} x^{3} + 3 \frac{\partial^{3} S}{\partial x^{2} \partial y} x^{2} y + 3 \frac{\partial^{3} S}{\partial x \partial y^{2}} x y^{2} + \frac{\partial^{3} S}{\partial y^{3}} y^{3} \right) + \cdots,$$

$$(4)$$

les dérivées partielles se rapportant aux valeurs x = y = 0.

Ainsi, dans le cas de deux variables, les équations différentielles (3) peuvent lêtre écrites sous la forme

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}} = X = a x + b y + e x^{2} + 2 f x y + g y^{2} + \cdots,
\frac{d^{2}y}{dt^{2}} = Y = b x + c y + f x^{2} + 2 g x y + h y^{2} + \cdots,$$
(5)

où a, b, c, \ldots remplacent des dérivées partielles de S, pour x = y = 0, multipliées par des constantes convenables, $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ étant une forme quadrabique définie positivement et où, par conséquent, l'on a

$$b^2 - a c < 0$$
, $a > 0$, $c > 0$. (6)

Le système (5) est équivalant au système

$$\frac{dx}{dt} = \xi = \Xi, \quad \frac{dy}{dt} = \eta = H, \quad \frac{d\xi}{dt} = X, \quad \frac{d\eta}{dt} = Y, \tag{7}$$

It à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x} \mathcal{Z} + \frac{\partial F}{\partial \xi} X + \frac{\partial F}{\partial y} H + \frac{\partial F}{\partial \eta} Y = 0. \tag{8}$$

¹⁾ HENRI POINCARÉ, Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences parwelles, Thèse de doctorat (Paris 1879).

²⁾ EMILE PICARD, Traité d'analyse, tome 3 (Gauthier-Villars, Paris 1908).

Pour étudier le caractère analytique des intégrales x, ξ , y, η du système (7) s'annulant simultanément, ou de l'équation équivalente (8), faisons le changement de variables défini par

$$u = \alpha_{11} \xi + \alpha_{12} x + \alpha_{13} \eta + \alpha_{14} y, \quad w = \alpha_{31} \xi + \alpha_{32} x + \alpha_{33} \eta + \alpha_{34} y,$$

$$v = \alpha_{21} \xi + \alpha_{22} x + \alpha_{23} \eta + \alpha_{24} y, \quad z = \alpha_{41} \xi + \alpha_{42} x + \alpha_{43} \eta + \alpha_{44} y.$$

$$(9)$$

On a ainsi

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial F}{\partial u} \alpha_{11} + \frac{\partial F}{\partial v} \alpha_{21} + \frac{\partial F}{\partial w} \alpha_{31} + \frac{\partial F}{\partial z} \alpha_{41},
\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \alpha_{12} + \frac{\partial F}{\partial v} \alpha_{22} + \frac{\partial F}{\partial w} \alpha_{32} + \frac{\partial F}{\partial z} \alpha_{42},
\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial F}{\partial u} \alpha_{13} + \frac{\partial F}{\partial v} \alpha_{23} + \frac{\partial F}{\partial w} \alpha_{33} + \frac{\partial F}{\partial z} \alpha_{43},
\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} \alpha_{14} + \frac{\partial F}{\partial v} \alpha_{24} + \frac{\partial F}{\partial w} \alpha_{34} + \frac{\partial F}{\partial z} \alpha_{44}.$$
(10)

En portant ces valeurs des dérivées de F dans l'équation (8) on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial u} (\alpha_{11} X + \alpha_{12} \Xi + \alpha_{13} Y + \alpha_{14} H)
+ \frac{\partial F}{\partial v} (\alpha_{21} X + \alpha_{22} \Xi + \alpha_{23} Y + \alpha_{24} H)
+ \frac{\partial F}{\partial w} (\alpha_{31} X + \alpha_{32} \Xi + \alpha_{33} Y + \alpha_{34} H)
+ \frac{\partial F}{\partial z} (\alpha_{41} X + \alpha_{42} \Xi + \alpha_{43} Y + \alpha_{44} H) = 0.$$
(11)

Choisissons les α_{ik} de façon qu'on ait, après la réduction,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(r_1\,u+\cdots\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(r_2\,v+\cdots\right)+\frac{\partial F}{\partial w}\left(r_3\,w+\cdots\right)+\frac{\partial F}{\partial z}\left(r_4\,z+\cdots\right)=0\;,\quad(12)$$

les points ... remplaçant des termes de second degré et de degrés supérieurs à 2 en $u,\,v,\,w,\,z$. A l'équation (12) correspondra ainsi le système d'équations différentielles

$$\frac{du}{r_1 u \dots - \frac{dv}{r_2 v \dots - \frac{dw}{r_3 w \dots - \frac{dz}{r_4 z \dots - \dots}}} = dt.$$
 (13)

Pour cela il faut avoir

$$\alpha_{11}X_{1} + \alpha_{12}\Xi + \alpha_{13}Y_{1} + \alpha_{14}H = r_{1}u = r_{1}(\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}x + \alpha_{13}\eta + \alpha_{14}y),$$

$$\alpha_{21}X_{1} + \alpha_{22}\Xi + \alpha_{23}Y_{1} + \alpha_{24}H = r_{2}v = r_{2}(\alpha_{21}\xi + \alpha_{22}x + \alpha_{23}\eta + \alpha_{24}y),$$

$$\alpha_{31}X_{1} + \alpha_{32}\Xi + \alpha_{33}Y_{1} + \alpha_{34}H = r_{3}w = r_{3}(\alpha_{31}\xi + \alpha_{32}x + \alpha_{33}\eta + \alpha_{34}y),$$

$$\alpha_{41}X_{1} + \alpha_{42}\Xi + \alpha_{43}Y_{1} + \alpha_{44}H = r_{4}z = r_{4}(\alpha_{41}\xi + \alpha_{42}x + \alpha_{43}\eta + \alpha_{44}y),$$
où X_{1} et Y_{1} désignent les X et Y réduits à leurs termes du premier degré.

On tire d'ici, pour déterminer les r_o le système

$$\alpha_{i1} a - \alpha_{i2} r_i + \alpha_{i3} b + \alpha_{i4} \cdot 0 = 0,
- \alpha_{i1} r_i + \alpha_{i2} \cdot 1 + \alpha_{i3} \cdot 0 + \alpha_{i4} \cdot 0 = 0,
\alpha_{i1} b + \alpha_{i2} \cdot 0 + \alpha_{i3} c - \alpha_{i4} r_i = 0,
\alpha_{i1} \cdot 0 - \alpha_{i2} \cdot 0 - \alpha_{i3} r_i + \alpha_{i4} \cdot 1 = 0.$$
(15)

Pour que ces équations, homogènes en α_{ek} , soient compatibles, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} a & -r_i & b & 0 \\ -r_i & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & -r_i \end{vmatrix} = 0,$$

$$0 & 0 & -r_i & 1$$
(16)

 ϵ qui donne pour déterminer r_i l'équation

$$r_i^4 - r_i^2 (a+c) + ac - b^2 = 0$$
 (16 bis)

'où

$$r_1 = -\left[\begin{array}{cc} a - c \\ -2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} a - c \\ -2 \end{array}\right]^2 + b - ac, \quad r_2 = -r_1,$$
 $r_3 = -\left[\begin{array}{cc} a - c \\ 2 \end{array}\right] \cdot \left(\begin{array}{cc} a - c \\ 2 \end{array}\right)^2 + b - ac, \quad r_4 = -r_3.$

Comme nous l'avons vu, dans notre premier mémoire, ces racines sont elles et l'on a

$$r_1 > r_3 > 0$$
 , $r_2 < r_4 < 0$. (17)

Avec ces valeurs de r_i , les équations (15) donnent les α_{ik} . En posant $\alpha_{i1} = 1$, on obtient ainsi

$$\alpha_{i2} = r_i = \beta_i$$
, $\alpha_{i3} = \frac{r_i^2 - a}{b} = \alpha_i$, $\alpha_{i4} = r_i \alpha_i = \gamma_i$, (18)

 β_i, γ_i étant les valeurs de ces quantités d'après notre premier mémoire cité. Les intégrales des équations (13) tendant vers zéro pour des valeurs positives t sont, comme on le sait des travaux de Poincaré et de Picard cités, des nctions holomorphes de

$$K_2 e^{r_2 t}$$
, $K_4 e^{r_4 t}$,

, et K_4 étant des constantes arbitraire assez petites. Elles peuvent être dévepées en séries suivant les puissances entières et positives de $K_2 e^{r_2 t}$, $K_4 e^{r_4 t}$, nvergentes dans l'intervalle $(0, +\infty)$ de t et tendant vers zéro pour $t-+\infty$. Revenons aux équations (7) et au changement de variables (9). Le déte minant des coefficients de x, y, ξ , η des relations (9) étant

ces équations déterminent x, y, ξ, η comme fonctions linéaires des variabl u, v, w, z, s'annulant avec eux. Par conséquent les intégrales x, y, ξ, η é système (7), s'annulant pour $t = -\infty$, peuvent être développées de même séries procédant suivant les puissances entières et positives de $K_2 e^{r_1 t}$, $K_4 e^{r_1 t}$ convergentes pour $t \ge 0$. On a ainsi

$$x = C_1 K_2 e^{r_2 t} + C_2 K_4 e^{r_4 t} + C_3 K_2^2 e^{2r_2 t} + C_4 K_2 K_4 e^{(r_2 + r_4)t} + C_5 K_4^2 e^{2r_4 t} + \cdots$$

$$y = G_1 K_2 e^{r_2 t} + G_2 K_4 e^{r_4 t} + G_3 K_2^2 e^{2r_2 t} + G_4 K_2 K_4 e^{(r_2 + r_4)t} + G_5 K_4^2 e^{2r_4 t} + \cdots$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = C_1 K_2 r_2^2 e^{r_2 t} + C_2 K_4 r_4^2 e^{r_4 t} + C_3 K_2^2 4 r_2^2 e^{2r_2 t}
+ C_4 K_2 K_4 (r_2 + r_4)^2 e^{(r_2 + r_4)t} + C_5 K_4^2 4 r_4 e^{2r_4 t} + \cdots$$

et une expression analogue pour d^2y/dt^2 , où les coefficients C_i sont remplac par G_i .

Pour trouver les valeurs de ces coefficients, il n'y a que former les expresions de X et de Y avec ces valeurs de x et y et employer la méthode d'coefficients indéterminés. On obtient ainsi:

$$\begin{split} X &= a \ x + b \ y + c \ x^2 + 2 \ f \ x \ y - g \ y^2 + \cdots \\ &= K_2 \left(a \ C_1 + b \ G_1 \right) e^{r_2 t} + K_4 \left(a \ C_2 + b \ G_2 \right) e^{r_4 t} \\ &+ K_2^2 \left(a \ C_3 + b \ G_3 + e \ C_1^2 + 2 \ f \ C_1 \ G_1 + g \ G_1^2 \right) e^{2 r_2 t} \\ &+ K_2 K_4 \left(a \ C_4 + b \ G_4 + 2 e \ C_1 \ C_2 + 2 \ f \ (C_1 \ G_2 + C_2 \ G_1) + 2 \ g \ G_1 \ G_2 \right) e^{(r_2 + r_4) t} \\ &+ K_2^2 \left(a \ C_5 + b \ G_5 + c \ C_2^2 + 2 \ f \ C_2 \ G_2 + g \ G_2^2 \right) e^{2 r_4 t} + \cdots \,, \\ Y &= K_2 \left(b \ C_1 + c \ G_1 \right) e^{r_2 t} + K_4 \left(b \ C_2 + c \ G_2 \right) e^{r_4 t} \\ &+ K_2^2 \left(b \ C_3 + c \ G_3 + f \ C_1^2 + 2 \ g \ C_1 \ G_1 + h \ G_1^2 \right) e^{2 r_2 t} \\ &+ K_2 K_4 \left[b \ C_4 + c \ G_4 + 2 \ f \ C_1 \ C_2 + 2 \ g \ (C_1 \ G_2 + C_2 \ G_1) + 2 \ h \ G_1 \ G_2 \right] e^{(r_2 + r_4) t} \\ &+ K_2^2 \left(b \ C_5 + c \ G_5 + f \ C_2^2 + 2 \ g \ C_2 \ G_2 + h \ G_2^2 \right) e^{2 r_4 t} + \cdots \,. \end{split}$$

La comparaison des coefficients du même degré en e^{r_2t} et e^{r_4t} dans les expressions de X et de d^2x/dt^2 ainsi que dans celles de Y et d^2y/dt^2 conduit to

l'abord aux équations suivantes:

$$C_1(r_2^2 - a) - b G_1 = 0$$
, $-b C_1 + (r_2^2 - c) G_1 = 0$;
 $C_2(r_4^2 - a) - b G_2 = 0$, $-b C_2 + (r_4^2 - c) G_2 = 0$. (21)

Les deux premières de ces équations donnent pour G₁

$$G_1 = C_1 - \frac{r_2^2 - a}{b}$$
 et $G_1 = \frac{b}{r_2^2} \frac{C_1}{-c}$, (22)

es deux valeurs de G₁ sont égales d'après la relation

$$(r_2^2-a)(r_2^2-c)=b^2$$
,

ervant à déterminer la racine r₂. Comme d'autre part

$$t^{\frac{2}{2}} - a$$
 b
 χ_2 ,

h a $G_1 = C_1 \alpha_2$. De même les deux valeurs de G_2 tirées du second système ont égales, et l'on a $G_2 = C_2 \alpha_4$.

La comparaison des coefficients de e^{2r_2t} , e^{2r_4t} , $e^{(r_2+r_4)t}$, ..., conduit aux vstèmes d'équations suivants pour la détermination de C_i , G_i :

$$\begin{aligned} & \left[C_{3} \left(4 \, r_{2}^{2} - \alpha \right) - G_{3} \, b = e \, C_{1}^{2} + 2 \, f \, C_{1} \, G_{1} + g \, G_{1}^{2} \, , \right. \\ & \left[C_{3} \, b + G_{3} \left(4 \, r_{2}^{2} - c \right) = f \, C_{1}^{2} + 2 \, g \, C_{1} \, G_{1} + h \, G_{1}^{2} \, ; \right. \\ & \left[C_{4} \left[\left(r_{2} + r_{4} \right)^{2} - a \right] - G_{4} \, b = 2 \, e \, C_{1} \, C_{2} + 2 \, f \, \left(C_{1} \, G_{2} + C_{2} \, G_{1} \right) + 2 \, g \, G_{1} \, G_{2} \right] \\ & \left[C_{4} \, b + \left[\left(r_{2}^{2} + r_{4}^{2} \right)^{2} - c \right] \, G_{4} = 2 \, f \, C_{1} \, C_{2} + 2 \, g \, \left(C_{1} \, G_{2} + C_{2} \, G_{1} \right) + 2 \, h \, G_{1} \, G_{2} \right] \right] \\ & \left[C_{5} \, \left(4 \, r_{4}^{2} - a \right) - G_{5} \, b = e \, C_{2}^{2} + 2 \, f \, C_{2} \, G_{2} + g \, G_{2}^{2} \, , \right. \end{aligned}$$

$$\left[C_{5} \, b + G_{5} \, \left(4 \, r_{4}^{2} - c \right) = f \, C_{2}^{2} + 2 \, g \, C_{2} \, G_{2} + h \, G_{2}^{2} \right] \right]$$

$$\left[C_{5} \, b + G_{5} \, \left(4 \, r_{4}^{2} - c \right) = f \, C_{2}^{2} + 2 \, g \, C_{2} \, G_{2} + h \, G_{2}^{2} \right] \right]$$

$$\left[C_{5} \, b + G_{5} \, \left(4 \, r_{4}^{2} - c \right) + C_{5} \, c \right]$$

Il n'y a pas lieu de s'occuper ici de la convergence des séries ainsi obtenues, théorie générale de ces équations nous assurant d'avance cette convergence.

ans le cas général les relations phénoménologiques découlent des équations (5)

Pour montrer que, dans le cas général, les relations phénoménologiques nt des conséquences logiques de

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X = -\frac{\partial(\Delta S)}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y = -\frac{\partial(\Delta S)}{\partial y}, \quad (5 \text{ bis})$$

mettons les intégrales (19), en ne gardant que des termes jusqu'au secor ordre en K_2 , K_4 , sous la forme

$$\begin{split} x &= e^{r_2 t} \, K_2 \, C_1 \left(1 + C_3' \, K_2 \, e^{r_2 t} + \frac{1}{2} \, C_4' \, K_4 \, e^{r_4 t} \right) \\ &+ e^{r_4 t} \, K_4 \, C_2 \left(1 + \frac{1}{2} \, C_4' \, K_2 \, e^{r_2 t} + C_5' \, K_4 \, e^{r_4 t} \right), \\ y &- e^{r_2 t} \, K_2 \, G_1 \left(1 + G_3' \, K_2 \, e^{r_2 t} + \frac{1}{2} \, G_4' \, K_1 \, e^{r_4 t} \right) \\ &- e^{r_1 t} \, K_4 \, G_2 \left(1 + \frac{1}{2} \, G_4' \, K_2 \, e^{r_2 t} + G_5' \, K_4 \, e^{r_4 t} \right), \end{split}$$

où l'on a mis

$$C_i' = \frac{C_i}{C_i}, \quad G_i' = \frac{G_i}{G_i}.$$

On a même

$$\begin{split} x' &= e^{r_2 t} \, K_2 \, C_1 \, r_2 \left(\, \mathbf{I} \, + \, 2 \, \, C_3' \, K_2 \, e^{r_2 t} \, + \, \frac{1}{2} \, \, C_4' \, K_4 \, e^{r_4 t} \, \right) \, + \, \frac{1}{2} \, e^{r_2 t} \, K_2 \, C_1 \, K_4 \, C_4' \, r_4 \, e^{r_4 t} \\ &+ e^{r_4 t} \, K_4 \, C_2 \, r_4 \, \left(1 \, + \, \frac{1}{2} \, C_4' \, K_2 \, e^{r_2 t} \, + \, 2 \, C_5' \, K_4 \, e^{r_4 t} \right) \, + \, \frac{1}{2} \, e^{r_4 t} \, K_4 \, C_2 \, K_2 \, C_4' \, r_2 \, e^{r_4 t} \\ &+ e^{r_4 t} \, K_2 \, G_1 \, r_2 \, \left(1 \, + \, 2 \, G_3' \, K_2 \, e^{r_2 t} \, + \, \frac{1}{2} \, G_4' \, K_4 \, e^{r_4 t} \right) \, + \, \frac{1}{2} \, e^{r_2 t} \, K_2 \, G_1 \, K_4 \, G_4' \, r_4 \, e^{r_4 t} \\ &+ e^{r_4 t} \, K_4 \, G_2 \, r_4 \, \left(1 \, + \, \frac{1}{2} \, G_4' \, K_2 \, e^{r_2 t} \, + \, 2 \, G_5' \, K_4 \, e^{r_4 t} \right) \, + \, \frac{1}{2} \, e^{r_4 t} \, K_4 \, G_2 \, K_2 \, G_4' \, r_2 \, e^{r_4 t} \end{split}$$

On a d'autre part $G_1 = C_1 \alpha_2$, $G_2 = C_2 \alpha_4$. Avec cela nous pouvons écrire

$$x = e^{r_2 t} K_2 C_1 (1 + \lambda) + e^{r_4 t} K_4 C_2 (1 + \mu) ,$$

$$y = e^{r_2 t} K_2 C_1 \alpha_2 (1 + \varrho) + e^{r_4 t} K_4 C_2 \alpha_4 (1 + \pi) ,$$

$$x' = e^{r_2 t} K_2 C_1 r_2 (1 + \lambda_1) + e^{r_4 t} K_4 C_2 r_4 (1 + \mu_1) ,$$

$$x = e^{s_1} K_2 C_1 r_2 (1 + \lambda_1) + e^{s_2} K_4 C_2 r_4 (1 + \mu_1) ,$$

$$y' = e^{r_2 t} K_2 C_1 r_2 \alpha_2 (1 + \varrho_1) + e^{r_4 t} K_4 C_2 r_4 \alpha_4 (1 + \pi_1) ,$$

où λ , μ , ϱ , π , λ_1 , μ_1 , ϱ_1 , π_1 sont de premier ordre par rapport à K_2 et K_4 .

En substituant à e^{r_2t} , e^{r_4t} dans les dernières équations leurs valeurs tire des deux premières, l'on obtient

$$x'\delta = x \left[r_{2} \alpha_{4} (1+\pi) (1+\lambda_{1}) - r_{4} \alpha_{2} (1+\varrho) (1+\mu_{1}) \right] + y \left[r_{4} (1+\lambda) (1+\mu_{1}) - r_{2} (1+\mu) (1+\lambda_{1}) \right],$$

$$y'\delta = x \left[r_{2} \alpha_{2} \alpha_{4} (1+\pi) (1+\varrho_{1}) + r_{4} \alpha_{2} \alpha_{4} (1+\varrho) (1+\pi_{1}) \right] + y \left[r_{4} \alpha_{4} (1+\lambda) (1+\pi_{1}) - r_{2} \alpha_{2} (1+\mu) (1+\varrho_{1}) \right],$$
(2)

où l'on a

$$\delta = (1 + \lambda) (1 + \pi) \alpha_4 - (1 + \mu) (1 + \varrho) \alpha_2.$$
 (29)

Pour obtenir les relations phénoménologiques il n'y a qu'à exprimer x et y au moyen de X et Y. On a pour cela

$$X = x L + y M, \quad Y = x M + y N \tag{30}$$

1vec

$$L = a + e x + f y$$
, $M = b + f x + g y$, $N = c + g x + h y$.

D'ici l'on tire

$$x \Delta = X N - Y M, \quad y \Delta = -X M + Y L \tag{31}$$

lvec

$$\Delta = L N - M^2.$$

Avec ces valeurs de x et y, les relations (28) deviennent

$$\begin{array}{l} 1\delta x' \qquad X\left\{N\left[r_{2}\,\alpha_{4}\,\left(1-\,\pi\right)\,\left(1+\,\lambda_{1}\right)-r_{4}\,\alpha_{2}\,\left(1+\,\varrho\right)\,\left(1+\,\mu_{1}\right)\right]\right\} \\ \qquad -\,M\left[r_{4}\,\left(1+\,\lambda\right)\,\left(1+\,\mu_{1}\right)-r_{2}\,\left(1+\,\mu\right)\,\left(1+\,\lambda_{1}\right)\right]\right\} \\ \qquad +\,Y\left\{L\left[r_{4}\,\left(1+\,\lambda\right)\,\left(1+\,\mu_{1}\right)-r_{2}\,\left(1+\,\mu\right)\,\left(1+\,\lambda_{1}\right)\right.\right.\right. \\ \qquad -\,M\left[r_{2}\,\alpha_{4}\,\left(1+\,\pi\right)\,\left(1+\,\lambda_{1}\right)-r_{4}\,\alpha_{2}\,\left(1+\,\varrho\right)\,\left(1+\,\mu_{1}\right)\right]\right\} \\ \qquad A\,X \doteq B\,Y \\ \qquad M\left[r_{2}\,\alpha_{2}\,\alpha_{4}\,\left(1+\,\pi\right)\,\left(1+\,\varrho_{1}\right)-r_{4}\,\alpha_{2}\,\alpha_{4}\,\left(1+\,\varrho\right)\left(1+\,\pi_{1}\right)\right] \\ \qquad -\,M\left[r_{4}\,\alpha_{4}\,\left(1+\,\lambda\right)\,\left(1+\,\pi_{1}\right)-r_{2}\,\alpha_{2}\,\left(1+\,\mu\right)\,\left(1+\,\varrho_{1}\right)\right]\right\} \\ \qquad +\,Y\left\{L\left[r_{4}\,\alpha_{4}\,\left(1+\,\lambda\right)\,\left(1+\,\pi_{1}\right)-r_{2}\,\alpha_{2}\,\left(1+\,\mu\right)\,\left(1+\,\varrho_{1}\right)\right] \\ \qquad -\,M\left[r_{2}\,\alpha_{2}\,\alpha_{4}\,\left(1+\,\pi\right)\,\left(1+\,\varrho_{1}\right)-r_{4}\,\alpha_{2}\,\alpha_{4}\,\left(1+\,\varrho\right)\,\left(1+\,\pi_{1}\right)\right]\right\} \\ =\,D\,X+C\,Y\;. \end{array} \right\}$$

Ce sont les relations phénoménologiques. Nous allons montrer que dans le us général que nous considérons ici, la tenseur $L_{i\,k}$ est presque symétrique, est-à-dire que les coefficients B et D ne diffèrent que par des termes qui conennent K_2 ou K_4 en facteur. En effet, en ne gardant dans les expressions de es coefficients que des termes ne contenant pas K_2 et K_4 d'une manière directe 1 indirecte, il faut mettre

$$L=a$$
, $M=b$, $N=c$

et par conséquent

$$B = a (r_4 - r_2) - b (r_2 \alpha_4 - r_4 \alpha_2) = a (r_4 - r_2) - \frac{b}{b} [r_2 (r_4^2 - a) - r_4 (r_2^2 - a)]$$

$$= r_2 r_4 (r_2 - r_4)$$
(33)

et

$$D = c (r_2 \alpha_2 \alpha_4 - r_4 \alpha_2 \alpha_4) - b (r_4 \alpha_4 - r_2 \alpha_2).$$
 (34)

Mais $c \alpha_2 = \alpha_2 r_2^2 - b$, $c \alpha_4 = \alpha_4 r_4^2 - b$ et avec ces valeurs de $c \alpha_i$ on a

$$D = \alpha_2 \alpha_4 (r_4 - r_2) r_2 r_4$$
.

D'autre part

$$\alpha_2 \, \alpha_4 = \frac{(r_2^2 - a)}{b^2} \frac{(r_4^2 - a)}{b^2} = \frac{r_2^2}{b^2} \frac{r_4^2 - a}{b^2} \frac{(r_2^2 - r_4^2)^{-1}}{b^2} \frac{a^2}{a^2} = -1$$

et par conséquent

$$D = r_2 r_4 (r_2 - r_4) = B. ag{35}$$

Ce qui montre qu'on ait $L_{12} = L_{21}$ aux termes du premier ordre en K_2 et K_4 près

Zusammenfassung

In einer ersten Abhandlung haben wir uns mit der Theorie der irreversible Prozesse beschäftigt, die von Onsager und Casimir entworfen ist und welch auf die Symmetrie des Tensors L_{ik} in der phänomenologischen Relation

$$J_i = \sum\limits_k L_{i\,k} \, X_k$$

beruht. Hier bedeuten J_i die «Flux» und X_k die «Kräfte», das heisst die Ableitun von x_i in bezug auf die Zeit t bzw. die partielle Ableitung von $-\Delta S$ in bezug auf x_k , wo ΔS den reduzierten Ausdruck

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \sum_{ik} g_{ik} x_i x_k$$
, mit $g_{ik} = g_{ki}$,

der Entropie in der Nähe des Stabilitätszustands eines adiabatisch isolierte Systems bedeutet.

Um die Symmetrie des Tensors L_{ik} nachzuweisen, gehen Onsager und Casi Mir von der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus. In unserer ersten Abhandlung haben wir gezeigt, dass die Symmetrie des Tensors L_{ik} eine Folge de Gleichungssystems

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i \qquad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

ist und dass die L_{ik} konstant sind. In der vorliegenden Abhandlung zeigen wir indem wir von der analytischen Theorie der Differentialgleichungen ausgehen und die Glieder von drittem und höherem Grade von ΔS berücksichtigen, dass in diesem Falle die Hauptteile der Ausdrücke von L_{ik} symmetrisch sind.

(Recu le 15 avril 1952.)

Rechengeräte mit linearen Potentiometern¹)

Von Ambros P. Speiser, Zürich²)

Einleitung

Es ist bekannt, dass sich Netzwerke mit variablen ohmschen Widerständen inter gewissen Voraussetzungen als Rechengeräte verwenden lassen, welche ich durch besondere Einfachheit auszeichnen. Unter Verwendung von linearen Votentiometern können Geräte zur Bildung von skalaren Produkten (und amit zur Lösung gewisser linearer Gleichungssysteme durch Iteration) gebaut erden [1]³). Mit Stufenwiderständen, die durch entsprechend vielschrittige tufenschalter betätigt werden, sind bemerkenswerte Rechengeräte zur Ausertung komplizierter trigonometrischer Ausdrücke entwickelt worden [3], [4], [5]. Potentiometer können mit einer nichtlinearen Widerstandskurve gewickelt nd so zur Erzeugung von Funktionen eingesetzt werden [6], [7]. – Dagegen önnen Differentiation und Integration mit ohmschen Netzwerken nicht auseführt werden.

Die vorliegende Arbeit zeigt, wie Rechengeräte konstruiert werden können, eren Funktion über die blosse Bildung von skalaren Produkten hinausgeht, i denen aber trotzdem neben ohmschen Widerständen nur lineare Potentioneter verwendet sind.

1. Die elementaren Rechenoperationen

In diesem Abschnitt werden die hier zu verwendenden Schaltungen für die ementaren Rechenoperationen rekapituliert [1], [6], [7]. Die zu verarbeitenen Variabeln sind als Drehwinkel, Spannungen oder Ströme gegeben.

Figur 1 zeigt eine Schaltung zur Multiplikation der Grössen x und y. Hier vie auch im folgenden Abschnitt) kennzeichnen x und y die Stellung der ürste auf einem Potentiometer. Diese Variablen liegen zwischen 0 und 1, pobei der Wert 0 der geerdeten Seite des Potentiometers zugeordnet ist. ist die Spannung der speisenden Quelle; alle Spannungen sind gegen Erde messen.

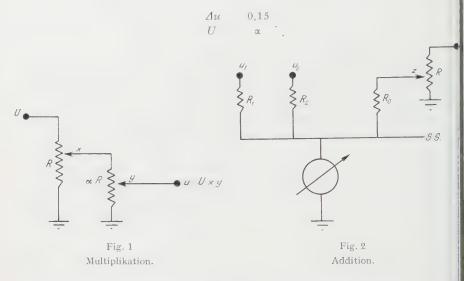
Es ist ersichtlich, dass nur solche Variable miteinander multipliziert werden innen, die als Drehwinkel gegeben sind. Das Resultat erscheint als Spannung

¹⁾ Eine erweiterte Fassung dieser Arbeit befindet sich an der Bibliothek der ETH, in Zürich [8], ort sind weitere Spezialschaltungen gegeben sowie eine Erläuterung der nomographischen Kurvenpassung; ferner sind vollständige Rechengeräte beschrieben.

²⁾ Institut für angewandte Mathematik an der ETH.

³⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 459.

und ist nur richtig, wenn die Konstante α gross gegenüber 1 ist; infolge de Belastung des ersten Potentiometers durch das zweite weicht die erhalter Spannung u um $\pm 1u$ vom richtigen Wert ab. Die grösste relative Abweichung entsteht bei x=2/3 und hat für y=1 den Wert



(Diese Beziehung gilt für $\alpha > 1$.) Mit $\alpha = 20$ wird also die relative Genauigkerbesser als 1%. – Es besteht aber auch die Möglichkeit, die Skala für α so einzuteilen, dass der durch die Belastung entstehende Fehler ausgeglichen wird Dadurch fällt die Bedingung $\alpha \gg 1$ dahin.

Die Addition von Spannungen kann so geschehen, dass diese in Serie geschaltet werden. Dazu sind aber unabhängige Stromquellen nötig (etwa mel rere Batterien oder mehrere Sekundärwicklungen auf einem Transformator Da hier Geräte betrachtet werden, die von einer einzigen Batterie gespeist sei sollen, fällt dieses Verfahren ausser Betracht, und es wird die Schaltung vor Figur 2 verwendet. Um die Summe u_1+u_2 zu bilden, wird die Bürste zu lange verstellt, bis der Strom J, der durch das Messinstrument fliesst, verschwindet. Dann liegt die mit S.S. (Sammelschiene) bezeichnete Leitung an Erdpotential, und es gilt:

$$\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} = -\frac{z U}{R_0}$$
 (6)

oder, falls die Widerstände R_1 , R_2 und R_0 , die als Summationswiderstände bzeichnet werden, alle gleich sind:

$$z U = -(u_1 + u_2)$$
.

(Ähnlich wie bei der Multiplikation gilt auch hier die Einschränkung $R_0 \gg R$.) Die gesuchte Summe kann also an der Skala x abgelesen werden. Dies ist eine implizite Lösung x, welche durch einen als Nullabgleich bezeichneten Prozess zewonnen wird; die Gleichung (1) kann ohne Änderung der Schaltung auch nach u_1 oder u_2 aufgelöst werden, falls die anderen Grössen gegeben sind.

Die gezeigte Anordnung ist nicht auf zwei Summanden beschränkt; vielmehr können auf die Sammelschiene beliebig viele Summationswiderstände geschaltet werden, wobei der Nullabgleich natürlich nur einmal auszuführen ist. Sind lie Spannungen u_1, u_2, \ldots die Resultate von Multiplikationen gemäss Figur 1, so ist das Resultat ein skalares Produkt. (Dabei darf jedoch die Belastung des zweiten Potentiometers in Figur 1 nicht ausser acht gelassen werden.) Durch eine entsprechende Schaltung lässt sich auch x|y-z bilden; da es sich auch nier um ein implizites Lösungsverfahren handelt, kann diese Beziehung als $x \to z$ y geschrieben werden, somit wird die Operation des Dividierens ausgeführt.

Das Instrument zur Messung von f muss so empfindlich sein, dass der Nullubgleich mit hinreichender Genauigkeit erfolgen kann. Um aber Überlastungen bei den zuerst fliessenden, hohen Fehlerströmen zu vermeiden, soll die volle Empfindlichkeit erst eingeschaltet werden, wenn der Abgleich annähernd ichtig ausgeführt ist. An Stelle des Instrumentes kann natürlich auch eine Servosteuerung mit Motor treten, welche den Nullabgleich automatisch ausührt. Dadurch geht aber die Einfachheit und Anspruchslosigkeit des Gerätes zerloren.

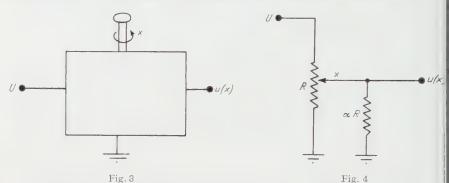
2. Die Erzeugung von Funktionen einer Variablen

Die einfachste Art der Erzeugung einer Funktion ist eine entsprechende Einteilung der Skala, an der die unabhängige Variable eingestellt wird. Dieses Zerfahren versagt jedoch, sobald von derselben Variablen mehrere verschielene Funktionen gebildet werden sollen. In solchen Fällen muss von der Fähigteit linearer Potentiometer zur Bildung von Funktionen Gebrauch gemacht verden. Es gilt folgender Satz:

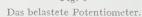
Gegeben eine Schaltung (Figur 3), die von der konstanten Spannung U gepeist ist und die auf einer gemeinsamen Achse mit dem Drehwinkel x ($0 \le x \le 1$) ndlich viele lineare Potentiometer, ferner feste Widerstände enthält. Dann ist die spannung u(x) an einem beliebigen Punkt dieser Schaltung eine rationale Funkon von x. Diese Funktion hat im gegebenen Bereich keine Pole, und Nullstellen sonnen nur am Rande des Bereiches vorkommen.

Dieser Satz geht aus den Gesetzen für die Serie- und Parallelschaltung von Viderständen hervor. – Die Mannigfaltigkeit der möglichen Schaltungen ist abei ausserordentlich gross. Beschränkt man aber die Zahl der Potentiometer uf zwei, so lassen sich die Schaltungen klassifizieren [11]. Es bleiben dann ewisse Typen von rationalen Funktionen, die elektrisch erzeugt werden, und

mit diesen lassen sich viele in der Praxis vorgegebene Funktionen – seien dies nun analytisch oder als Kurven gegeben – approximieren. Es wird hier vor wichtigen Prinzip Gebrauch gemacht, dass eine verlangte Funktion oder Operation durch eine andere, prinzipiell davon abweichende ersetzt wird, so das



Schaltung zur Erzeugung von Funktionen.



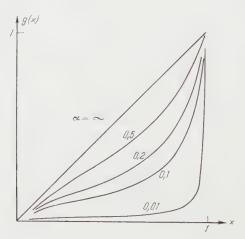


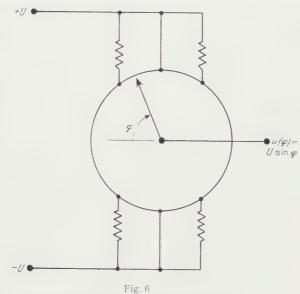
Fig. 5
Funktionen des belasteten Potentiometers.

eine exakte Wiedergabe selbst mit fehlerfreien technischen Mitteln nicht mehr möglich ist. Da aber die verwendeten Potentiometer mit Ungenauigkeiten behaftet sind, genügen approximative Darstellungsarten für vorgegebene Funktionen, sofern deren Abweichung in der gleichen Grössenordnung wie die Fehles der Potentiometer liegen. Es ist zu bemerken, dass unter Erhöhung des schaltungstechnischen Aufwandes die Abweichungen in dieser Darstellung beliebii klein gemacht werden können.

Besonders ausgiebig untersucht wurde die Schaltung des belasteten Potentiometers, die in Figur 4 gezeigt ist. Die Spannung an der Ausgangsklemme ist folgende Funktion von x:

$$\frac{u(x)}{t} = \xi(x) = \frac{\alpha x}{\alpha + x - x^2}.$$

Der Verlauf von g(x) ist für verschiedene α in Figur 5 gezeigt. Zur Darstellung einer vorgegebenen Funktion kann eine Kurve aus dieser Schar ausgewählt



Schaltung zur Darstellung der Funktion $\sin \varphi$.

verden. Es kann auch aus dem gezeichneten Bereich nur ein Ausschnitt vervendet werden; zu diesem Zweck ist in Serie zum Potentiometer in Figur 6 ben und unten je ein fester Widerstand zu schalten. Diese Widerstände mögen lie Werte β R und γ R haben. Indem nun α , β und γ frei wählbar sind, haben vir zur Anpassung eine dreiparametrige Schar von Kurven zur Verfügung. Aus Figur 5 ist ersichtlich, dass man damit eine grosse Mannigfaltigkeit von verchiedenen Formen zur Verfügung hat. Die Kurven sind nach unten gekrümmt; lurch Bildung der Umkehrfunktion entsteht eine entsprechende, nach oben gekrümmte Schar.

Die Hauptschwierigkeit ist die, für eine vorgegebene Kurve dasjenige Tripel er Parameter zu finden, das die beste Annäherung gewährleistet. Zahlreiche Versuche haben zu folgenden Erkenntnissen geführt: Erste Näherungslösungen bis zu einer Genauigkeit von 2-3%) können nur auf graphischem Weg

gefunden werden. Alle Versuche, direkt auf analytischem Wege eine Lösung zfinden, führen auf einen unverhältnismässig grossen rechnerischen Aufwanund ergeben dabei oft physikalisch nicht realisierbare Resultate (negativ Widerstände). Dagegen sind analytische Verfahren geeignet, bereits bekannte gute Näherungslösungen zu verbessern.

Alle graphischen Methoden bestehen darin, dass man zwei Kurvenblätte aufeinanderlegt und aus der beobachteten Deckungsfigur gewisse Schlüss zieht. (Ein durchsichtiger, von unten beleuchteter Ausschnitt auf dem Arbeits tisch erleichtert diese Untersuchungen sehr.) Auf diese Weise kann eine Kurv oder sogar eine ganze Schar mit einem Blick erfasst werden, was bei analytischen Methoden nicht der Fall ist, und ein geübter Mathematiker wird au Grund seiner Erfahrung schnell die richtigen Schritte einleiten.

Das einfachste Verfahren ist nun dieses, dass man sich für die verschiedener Parameterwerte einen Katalog von Kurven anlegt, aus welchem das am bester passende Muster leicht zu ermitteln ist. Da von den Parametern α , β , γ au, physikalischen Gründen nur ein beschränkter Bereich verwendet werden kann wird der erwähnte Katalog nicht so umfangreich, wie es auf den ersten Blickerscheinen mag. Seine Erstellung lohnt sich in solchen Fällen, wo durch die gleiche Schaltung viele verschiedene Kurven anzupassen sind. – Andere Verfahren sind entwickelt worden, die durch gegenseitige Verschiebung von zwei aufeinandergelegten Blättern die kontinuierliche Variation von zwei der dre Parameter gestatten [8]. Diese Verfahren sind verwandt mit denjenigen, die von Svoboda für die Konstruktion von mechanischen Gelenkmechanismen angegeben werden [10].

Auf diese Art lassen sich leicht Lösungskurven finden, die von den vergegebenen um nicht mehr als 1-2% des Maximalwertes abweichen. Die weiteren Verbesserungen können nun auf analytischem Wege angebracht werden. Nach dem Verfahren, das sich hierzu am besten bewährt hat, werden für die Parameter nur noch Änderungen zugelassen, die so klein sind, dass ihr Einflustentlang der ganzen Kurve in Form einer Korrektur durch Berücksichtigung der ersten partiellen Ableitungen nach den Parametern erfasst werden kann Wenn man nun aus der Kurve einige Punkte herausgreift und etwa fordert dass die Summe der Fehlerquadrate an diesen Stellen minimal werde, so erhälman drei lineare Gleichungen für die Parameteränderungen, die sich leicht auf lösen lassen.

Selbstverständlich gelten alle diese Bemerkungen nicht nur für die Schall tung nach Figur 4, sondern ebenso für die vielen anderen möglichen Schall tungen zur Darstellung von Funktionen.

Es gibt Fälle, wo eine gesuchte Darstellung mit linearen Potentiometern nicht gefunden werden kann, besonders dann, wenn die vorgegebene Funktion im Innern des Bereiches mehr als ein Extremum hat. Häufig führt hier die Anbringung von Abgriffen an den Potentiometern zum Ziel. Zwar entfernt man

sich hier vom angestrebten Prinzip der Verwendung nur handelsüblicher Teile; doch lassen sich Abgriffe auch nachträglich leicht anbringen. Als Beispiel wähen wir die Funktion $f(q) = \sin q$, die im Bereich von 0 bis 2π mit beschränkter Genauigkeit darzustellen sei. Diese Forderung stellt sich zum Beispiel bei der Berücksichtigung des Windes in seinem Einfluss auf ballistische Korrekturen.) figur 6 zeigt eine geeignete Schaltung. Der Kreis kennzeichnet ein Potentioneter, dessen gleichmässig bewickeltes Widerstandselement sich über 360 erstreckt. Falls die Abgriffpunkte und die Festwiderstände geeignet gewählt werden, wird die Funktion $\sin q$ mit einer grössten Abweichung von 3,5% vom Jaximalwert dargestellt. Durch Zufügen von vier weiteren Abgriffen mit entprechenden Widerständen kann der Fehler auf 1% reduziert werden. Dieses Ferfahren besteht in einer Annäherung der gegebenen Funktion durch einen Streckenzug.

3. Die Erzeugung von Funktionen von zwei Variablen

Der in Abschnitt 2 tormulierte Satz lässt sich auch auf mehrere Variable rweitern: Die Schaltung von Figur 3 soll beispielsweise zwei Achsen haben, uf denen Potentiometer sitzen und deren Drehwinkel x und y seien. Dann ist ie resultierende Spannung eine rationale Funktion von x und y. Die Mannigaltigkeit der möglichen Schaltungen ist hier noch bedeutend grösser als im fall einer einzigen unabhängigen Variablen, und es stellen sich beim Aufsuchen iner Anordnung, die eine vorgegebene Funktion realisieren soll, ernstliche chwierigkeiten entgegen, selbst wenn die Existenz einer solchen Schaltung rwiesen ist. Eine grosse Vereinfachung entsteht jedoch, wenn man sich auf unktionen beschränkt, die sich als Sechseckgewebe darstellen lassen. Dieser all sei im folgenden betrachtet. Die dabei zur Verwendung gelangenden Tatachen aus der Geometrie der Gewebe sind in 21 ausführlich behandelt.

Die darzustellende Funktion sei z=z(x,y) und sei durch Niveaulinien in nem (x,y)-Koordinatensystem graphisch dargestellt. Die Parallelen zur -Achse seien als x-Schar, die Parallelen zur y-Achse als y-Schar und die riveaulinien als z-Schar bezeichnet. Dieses Bild von drei Kurvenscharen ist in Kurven-3-Gewebe, falls zwei beliebige Kurven von verschiedenen Scharen Gichstens einen Punkt gemeinsam haben. Wenn sich nun von jeder der drei scharen eine Auswahl von Kurven derart zeichnen lässt, dass an jedem Schnittinkt genau drei dieser Kurven zusammentreffen, wie dies in Figur 7 gezeigt it, so handelt es sich um ein Sechseckgewebe. Um zu kontrollieren, ob ein eigebenes Kurven-3-Gewebe ein Sechseckgewebe sei, ist es jedoch nicht nötig, in ganzen Gebiet die erwähnte Auswahl von Kurven zu zeichnen; vielmehr en gen Gebiet die erwähnte Auswahl von Kurven zu zeichnen; vielmehr en gur 7 zwei verstärkt ausgezogen sind. Von einem beliebigen Anfangspunkt ist wird ein Polygonzug gezeichnet, wobei in der aus Figur 7 ersichtlichen

Weise entlang einer Kurve der Schar y, z, x, y, z, x zu fahren ist. Falls man i allen Sechsecken, die sich im gegebenen Gebiet zeichnen lassen, wieder an der Anfangspunkt zurückkehrt (wie im oberen Sechseck in Figur 7), so ist da Gewebe im betreffenden Gebiet ein Sechseckgewebe. Wenn jedoch der End punkt A' mit dem Anfangspunkt A nicht zusammenfällt (unteres Sechseck) so ist in dieser Umgebung die Sechseckgewebe-Bedingung nicht erfüllt. Ir

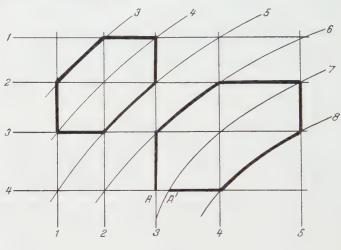


Fig. 7 Sechseckgewebe.

vollständig gezeichneten Gewebe äussert sich dies so, dass an der betreffende Stelle statt des Schnittpunktes der drei Kurven ein kleines Dreieck entsteh welches bei A deutlich sichtbar ist.

Wenn nun eine Funktion z(x, y) in einem gewissen Gebiet die Sechseckgewebe-Bedingung erfüllt, so bedeutet das, dass sie sich bei geeigneter Walldreier Funktionen X(x), Y(y) und Z(z) wie folgt darstellen lässt:

$$Z(z) = X(x) + Y(y). (2)$$

Diese wichtige Feststellung bedeutet, dass solche Funktionen durch Verwerdung von Funktionen einer einzigen Variablen dargestellt werden können, wordurch die Schwierigkeiten bei der Verwirklichung mit Potentiometern auf einer Bruchteil der ursprünglichen reduziert sind. – Da mit Potentiometern neben der Addition auch die Multiplikation leicht ausgeführt werden kann, ist es of zweckmässig, Gleichung (2) durch die Substitution

$$X(x) = \log X'(x), \quad Y(y) = \log Y'(y), \quad Z(z) = \log Z'(y)$$

wie folgt zu schreiben:

$$Z'(z) = X'(x) Y'(y).$$

Hier kann ausserdem ein frei wählbarer Exponent a eingeführt werden:

$$[Z'(z)]^a = [X'(x)]^a [Y'(y)]^a$$
.

Dieser Exponent gestattet es, den darzustellenden Funktionen eine zusätzliche Krümmung nach oben oder nach unten zu verleihen, um sie in eine für die Anpassung geeignete Form überzuführen.

Alle diese Überlegungen gelten, wie erwähnt, nur für Sechseckgewebe. Es zeigt sich nun, dass erstaunlich viele in der Praxis vorkommende Funktionen nit zwei Variablen die Sechseckgewebe-Bedingung mit befriedigender Genauigkeit erfüllen, obwohl auf analytischem Wege eine Separation nach Gleichung 2) in den seltensten Fällen möglich ist. Es lässt sich geradezu aussagen, dass on den praktisch vorkommenden Funktionen fast alle diejenigen, die die Belingung für ein 3-Gewebe erfüllen, annähernd auch Sechseckgewebe sind, bwohl ein solcher Satz natürlich nicht allgemeine Gültigkeit haben kann. Zur Auffindung der gesuchten Funktionen X(x), Y(y), Z(z) muss nach Figur 7 das gesamte Sechseckgewebe konstruiert werden. Die Kurven jeder Schar werden rlann gemäss Figur 7 fortlaufend numeriert, und zwar so, dass an jedem Schnittpunkt die Nummer der z-Kurve gleich der Summe der Nummern der i:-Geraden und der y-Geraden ist. Die gesuchten Funktionen sind nun durch lie Beziehungen zwischen diesen Nummern und den zugehörigen x-, y- und -Werten gegeben. Das Zeichnen des Gewebes bereitet keine Schwierigkeit, alls die gegebene Funktion ein exaktes Sechseckgewebe ist. Wenn aber die Schliessungsbedingungen nur annähernd erfüllt sind, so muss man bestrebt rein, die Ungenauigkeiten (wie bei A, Figur 7) im ganzen Gebiet möglichst lein zu halten, was erst nach mehrmaligen Versuchen gelingt und einige Jbung erfordert.

Es ist hier noch eine Bemerkung zum Ausdruck «Ungenauigkeit» notwendigen der Gewebetheorie unterscheidet man Gewebe, die die Bedingung für ein lechseckgewebe erfüllen, und solche, die sie nicht erfüllen. «Annähernde» Sechsckgewebe existieren nicht; denn durch topologische Deformation können Untenauigkeiten wie in Figur 7, wie klein sie auch sein mögen, beliebig vergrössert verden, so dass ein solches Gewebe beliebig stark von einem Sechseckgewebe beweicht. In unserer Anwendung sind jedoch topologische Transformationen wicht ohne weiteres zulässig; vielmehr bildet die Grösse der Abweichungen in er Gewebestruktur ein genaues Mass für die Fehler, die entstehen, wenn die etterffende Funktion nach Gleichung (2) dargestellt wird. Wenn diese Fehler im Beispiel 1% des Maximalwertes nicht überschreiten, so ist die Feststelung, das Gewebe sei «annähernd ein Sechseckgewebe», durchaus angängig. —

Eine Diskussion einiger Fälle von angenäherten Sechseckgeweben sowie ein Anregung zu deren Klassifikation ist von Svoboda im Zusammenhang mi Gelenkmechanismen gegeben worden [10].

Die vorstehend dargelegten Verfahren können nicht angewendet werder wenn die gegebene Funktion z(x,y) von einem Sechseckgewebe stark abweicht ganz besonders dann, wenn nicht einmal die Bedingungen für ein 3-Geweberfüllt sind, indem zwei Kurven verschiedener Scharen mehr als einen Schnittpunkt haben. Dies ist der Fall zum Beispiel bei ballistischen Schusstafeln, dinneben dem aufsteigenden auch den absteigenden Ast der Flugbahn enthalter. Dann ist von Potentiometerschaltungen auszugehen, welche eine entsprechend Funktion darstellen, und es muss von vornherein auf eine Separierung nach Gleichung (2) verzichtet werden. Um die grossen Schwierigkeiten, die bein Aufsuchen einer geeigneten Anordnung entstehen, etwas zu reduzieren, eigne sich folgender Weg:

Um die gegebene Funktion z(x, y) elektrisch darzustellen, definieren wi wieder drei Funktionen X(x), Y(y), Z(z), das heisst, Funktionen mit nur eine Variablen, deren elektrische Darstellbarkeit wir als gegeben annehmen uns daher hier nicht weiter betrachten wollen. Durch Einsetzen in die gegeben Funktion z(x, y) entsteht eine neue Funktion Z = Z(X, Y), die als Grund iunktion bezeichnet sei. Diese Grundfunktion ist es, die nun dargestellt werde muss. Mit einer einzigen Grundfunktion können durch geeignete Wahl vo-X(x), Y(y) und Z(z) sehr viele verschiedene Funktionen z(x, y) dargestell werden. Nun lassen sich die Schaltungen zur Erzeugung von Funktionen mit zwei Variablen mit Potentiometern leicht klassifizieren und in ihrem Verhalten übersichtlich darstellen, sofern man sich auf die Verwendung von insgesam zwei Potentiometern beschränkt [11]. Die so erzeugten, verhältnismässig wen gen Funktionen werden als die zur Verfügung stehenden Grundfunktionen betrachtet. Wenn nun eine Funktion z(x, y) gegeben ist, so sind drei Funktione X(x), Y(y), Z(z) zu suchen, welche z(x, y) in eine der gegebenen Grundfunk tionen überführen. Der Sinn dieses Verfahrens ist der, eine Beschränkung auwenige, einfache Grundfunktionen zu schaffen und einen möglichst grosse Teil der Schwierigkeiten auf die Darstellung von X(x), Y(y) und Z(z) überzu wälzen, welche viel leichter zu beherrschen ist, da es sich um Funktionen m nur einer Variablen handelt.

Es sei bemerkt, dass die Darstellung von Sechseckgeweben nach Gleichung (2) ein Spezialfall dieses Vorgehens ist, indem die einzige Gundfunktion, daman zulässt, die Addition ist. Leider existiert aber bis jetzt kein Verfahren, da Funktionen X(x), Y(y) und Z(z) für allgemeinere Grundfunktionen in ähnlich einfacher Weise zu finden, wie dies im Spezialfall der Sechseckgewebe möglich ist. Zum Auffinden einer ersten Näherung ist man daher auf ziemlich umständliche, graphische Versuche angewiesen. Verbesserungen können alsdann auf analytischem Wege angebracht werden.

4. Der Bau von Rechengeräten

Unter Verwendung der skizzierten Grundschaltungen können Rechengeräte zur Auswertung bestimmter, einfacher Ausdrücke gebaut werden, welche unbestreitbare Vorzüge gegenüber mechanischen Geräten aufweisen, die mit Gelenkwerken. Differentialgetrieben, Kurvenscheiben und Kurvenkörpern arbeiten. Lineare Potentiometer werden in hochpräzisen Ausführungen (Genauigseit bis 10 001 serienmässig hergestellt und sind daher kurzfristig und zu mässigen Kosten erhältlich. Die gebauten Geräte sind somit schnell und mit bescheidenem Kostenaufwand zusammenstellbar.

Ist das Resultat durch implizite Lösung einer einzigen Gleichung nur mit grossem Aufwand darstellbar, so kann oft durch das Bilden von Zwischengesultaten, das heisst durch das Vorsehen mehrerer Nullabgleiche, eine grosse Materialersparnis erzielt werden. Der Vorteil der elektrischen gegenüber der nechanischen Darstellung von Funktionen wird besonders gross, wenn in dieselbe Gleichung nach Wahl eine von mehreren vorgegebenen Funktionen eingehen soll, beispielsweise in artilleristischen Rechengeräten für die Berücksichtigung verschiedener Ladungen. Die Umschaltung geschieht in diesem Fall rein elektrisch durch Änderung der Festwiderstände, während die Potentioneter dieselben bleiben; im mechanischen Fall ist die Umschaltung von Kurrenkörpern mit vielerlei Unannehmlichkeiten verbunden.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass solche Rechengeräte robust in der Handhabung und einfach in der Bedienung sind. Ihr Arbeiten ist unabhängig ron Spannungsschwankungen der Stromquelle, da alle Resultate durch Nullibgleich von brückenartigen Schaltungen gewonnen werden. In vielen Fällen benügt als Quelle sogar eine Trockenbatterie von 4,5 V.

Der Verfasser möchte Herrn Professor Stiefel für seine Anregung zur Durchührung dieser Untersuchungen sowie für seine Unterstützung während der Arbeiten an dieser Stelle herzlich danken.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Berry, C. E., et al., A Computer for Solving Linear Simultaneous Equations, J. appl. Phys. 17, H. 4 (1946).
- 2] Blaschke, W., und Bol, G., Geometrie der Gewebe (Springer, Berlin 1938).
- [3] FISCHER, F., Beitrag zur Theorie des 2 n-Poles, der als n-Klemmenpaar betrieben wird, Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. 4, H. 2 (1938).
- 4] FISCHER, F., Ein neuartiges Rechengerät und einige Zusatzgeräte, Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. 5, H. 1 (1939).
- 5] FISCHER, F., Über elektrische Rechengeräte hoher Genauigkeit, Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. 8, H. 1 (1942).
- 6] GREENWOOD, I. A., et al., Electronic Instruments, Radiation Labor. Ser., 21.
- 7] SHANNON, W., Electronic Computers, Electronics 19, H. 8 (1946).

- [8] SPEISER, A.P., Über die Konstruktion von Rechengeräten mit linearen Potentiometern sowie die mathematischen Grundlagen der zugehörigen Kurvenanpas sungen (Zürich 1951). Nicht veröffentlicht; ein Exemplar an der Bibliothelder ETH.
- [9] Strobel, C., Elektrische Darstellung mathematischer Funktionen, Arch. Elektrotechn. 1940, 334-338.
- [10] SVOBODA, A., Computing Mechanisms and Linkages, Radiation Labor. Ser., 27
- [11] ABDEL-MESSIH, M.A., Dissertation ETH. (in Vorbereitung).

Summary

This paper gives some circuits that may be used in computing instrument, using only resistances and linear potentiometers. Part 1 is a summary of the well-known methods of representing the elementary operations. Part 2 is a discussion of curve fitting methods for functions of one variable. Part 3 deals with curve fitting for functions of two variables; special use is made of the concept of grid structure (Sechseckgewebe). Part 4 gives some general remarks regarding the computing instruments.

(Eingegangen: 1. August 1952.)

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

Einige Beobachtungen über das Haften von Eis an Oberflächen

Von Thomas Brunner¹), Weissfluhjoch-Davos²)

Problemstellung

Die Untersuchungen sollten einen Aufschluss über die Grösse der Adhäsion von Eis an verschieden behandelten metallischen und nichtmetallischen Oberflächen ergeben. Ferner sollte abgeklärt werden, wie die Oberflächen zu behandelt sind, um das Haftvermögen zu vermindern.

1. Messmethoden

Die mechanischen Eigenschaften von Eis variieren je nach Herstellungsar ziemlich stark. So wird sich zum Beispiel ein Stück Eis, das bei --20° C entstan den ist, anders verhalten, als eines, das langsam bei --3° C gefror. Um vergleich bare Resultate zu bekommen, müssen deshalb die Versuchsbedingungen konstan gehalten werden. Da die Resultate aber trotzdem noch stark streuen, führen nu Reihenversuche zum Ziel. Um verschiedene experimentelle und apparativ Schwierigkeiten zu umgehen, haben wir für die folgenden Untersuchungen des statischen Schubversuch gewählt.

¹⁾ Die Redaktion hat die schmerzliche Pflicht, mitzuteilen, dass der Autor am 1. August 1952 am Tage nach der Fertigstellung dieser Arbeit, bei einer Zugsentgleisung tödlich verunglückt is Herr Dr. M. de Quervain, Leiter des Eidgenössischen Institutes für Schnee- und Lawinenfomschung, Weissfluhjoch-Davos, hatte die Freundlichkeit, die Korrekturen der Arbeit zu übernehmer-

²) Die Untersuchungen wurden im Auftrage der Schweizerischen Kommission für Vereisungsfragen in den Laboratorien des Eidg. Institutes für Schnee- und Lawinenforschung, Weissfluhjochdavos, durchgeführt.

Gemäss den Messungen von Finlayson¹) an natürlichem Eis beträgt die Schubfestigkeit von Eis 7–8 kg* cm². Dieser Wert ist niedrig. An sorgfältig gereinigten Oberflächen haftet Eis sehr gut. Es wird deshalb eher brechen, als sich von der Oberfläche lösen. Wenn das Haftvermögen von Eis grösser als die Schubestigkeit ist, lässt sich die Adhäsion mit diesen mechanischen Methoden prinzipiell nicht bestimmen.

Hingegen liesse sich mittels radioaktiven Wassers das Haftvermögen einzelner A_2 O-Moleküle messen. Beobachtet man nämlich die Desorption der radioaktiven

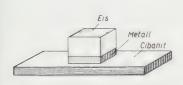


Fig. 1 Aufbau der Scherproben.



Fig. 2

ie Fertigbearbeitung der Proben. Das poröse Eis des mittleren Teiles wird entfernt.

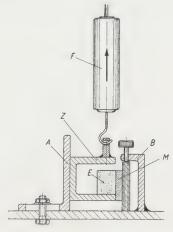


Fig. 3

Die Zugapparatur. Die Scherspannung wirkt in der Haftebene.

Toleküle in Funktion der Temperatur und der Zeit (wobei natürlich für die Halbwertszeit zu korrigieren ist), so bekommt man leicht die Aktivierungsnergie, das heisst das *molekulare* Haftvermögen von H₂O, unabhängig von den lechanischen Eigenschaften des Eises. Über die Aktivierungsenergien von Meulen auf Metalloberflächen liegen verschiedene mit dieser Methode gewonnene Lesultate vor²); ähnliche Angaben für Eis fehlen.

2. Apparatur

Auf Metallklötzchen von etwa 2×2 cm und 1 cm Dicke wurde bei zirka 4° C destilliertes Wasser aufgefroren. Um diese Klötzchen in die Zugapparatur nzuspannen und sie gleichzeitig vor unerwünschter Wärmeübertragung beim anipulieren zu schützen, wurden sie auf Träger aus Cibanit-Isolierplatten aufleschraubt.

Figur 3 zeigt die Zugapparatur. Die Präparate werden bei B eingespannt, in Zughaken Z greift unter das Eis E, das auf dem Metallklötzchen M aufgeren ist. Der Zughaken berührt die Metalloberfläche und wird durch den Anthlag A parallel geführt. Der Zug wird mit der Federwaage F ausgeübt.

Zitiert bei: H. N. Dorsey, Properties of Ordinary Water Substance (Am. Chem. Soc. Mograph. Ser. 81, New York 1940), S. 428 ff.
 H. Frauenfelder, Helv. Phys. Acta 23, 347 (1950).

3. Präparatherstellung

Das Wasser wurde im Laboratorium bei -4° C auf die Metalloberfläche gefroren, indem ein Klebeband um das Metallklötzchen geklebt und der so entstat dene Raum mit handelsüblichem destilliertem Wasser von Zimmertemperatu aufgefüllt wurde. Um die sehr leicht eintretende Unterkühlung zu vermeider wurden die Proben nach 60–90 min mit Schnee geimpft und in der Regel 18 später bei gleicher Temperatur untersucht.

Das Eis wuchs gleichzeitig von der Metalloberfläche nach oben und von de freien Oberfläche nach unten, so dass in der Mitte eine deutliche und immer gleic aussehende, durch viele Luftbläschen gekennzeichnete Trennfläche entstand Bei Belastung der Probe bricht das Eis meist längs dieser Fläche, was une wünscht ist. Bei der Mehrzahl der Proben wurde deshalb der obere Teil de Eisklötzchens weggesägt. Vgl. Figur 2. Der übrigbleibende Teil ist glasklar un fast frei von Luftbläschen.

4. Oberflächenbehandlung

Das Haften von Eis wurde an folgenden Oberflächen untersucht:

1. Saubere Oberfläche. Die Präparate wurden mit heissem Wasser, dem e Benetzungsmittel zugesetzt wurde, gereinigt und anschliessend unter fliessender Brunnenwasser geschmirgelt. Dadurch werden die beim Schmirgeln weggehende Partikel fortwährend weggespült. Das die Oberfläche benetzende Wasser wurde auch Präparate festgefroren, bevor es verdunsten konnte, wodurch sich ein eventuer vorhandener Film nicht auf die Metalloberfläche festsetzen konnte. Beim Altminium bleibt das Oberflächenoxyd sicher auch nach dem Schmirgeln bestehe

2. Oxydierte Oberflächen. Die sauberen Oberflächen wurden mit eine:

Schweissbrenner erhitzt.

3. «Technische » Oberflächen. Die Metalle kamen so zur Verwendung, wie se von der Fabrik geliefert wurden.
Eine zweite Gruppe von Proben wurde mit einem dünnen Film überzoger

4. Silikonfett. Auf die saubere Oberfläche wurde Silikonfett möglichst dür

aufgetragen.

5. Kunstharz Polyweld. Die sauberen Oberflächen wurden möglichst dür mit Polyweld (Kunstharz auf Polystyrenbasis) bestrichen.

6. Paraffin. Die sauberen und getrockneten Oberflächen wurden mit handel üblichem Paraffin übergossen und nachher mit einem Lappen abgewischt, so danur ein dünner Film übrigblieb.

7. Skilack. Die sauberen Oberflächen wurden mit Skilack bestrichen.

5. Resultate

Die Resultate, die an Aluminium, Kupfer und Messing gewonnen wurde werden zusammengefasst, weil sich gezeigt hat, dass die Metallsorte nur von untegeordneter Bedeutung ist.

a) Bruchverhältnis

Da bei allen Proben die Adhäsion von der gleichen Grössenordnung wie di Schubfestigkeit ist, bricht immer ein grosser Teil der Proben. Nimmt man a dass die Schubfestigkeit des Eises – es wurde immer unter gleichen Bedingunge hergestellt – ungefähr konstant ist, so gibt das Bruchverhältnis

 $B = \frac{\text{Anzahl Proben ohne Bruch abgelöst}}{\text{Gesamtzahl Proben}}$

einen ersten Anhaltspunkt über das Haftvermögen.

Aus Tabelle 1 geht hervor, dass bei technischen Oberflächen rund die Hälfte, bei sauberen Oberflächen jedoch nur zirka ein Sechstel aller Proben ohne Bruch on der Oberfläche entfernt werden können. An sauberen Oberflächen haftet das Eis somit besser als an technischen. Die für Ablösung günstigste Oberfläche ist eindeutig die mit Silikonfett behandelte.

Aus Tabelle 1 darf man nicht den falschen Schluss ziehen, dass Skilack, Kunstharz und Paraffin ungünstiger als eine technische Oberfläche seien. Die iachfolgende Betrachtung zeigt nämlich, dass die Schubfestigkeit des Eises keine Konstante ist und von der Oberflächenbeschaffenheit abhängt. Wir sprechen leshalb lieber von einer scheinbaren Schubfestigkeit des Eises. Die Resultaten Tabelle 1 lassen sich somit höchstens innerhalb einer Gruppe vergleichen.

Tabelle 1

Oberfläche	Bruchverhältnis B	Anzahl Proben
Gruppe 1		
Sauber (1)	17%	46
Oxydiert (2)	39%	56
Technisch (3)	57%	42
Gruppe 2		
Skilack (7) .	35%	31
Kunstharz (5)	39%	33
Paraffin (6)	50%	48
Silikonfett (4)	79%	43

b) Schubspannungen

Nun fragen wir nach den Schubspannungen τ , die nötig sind, um eine Oberäche eisfrei zu bekommen, unabhängig davon, ob das Eis dabei bricht oder nicht. Eine Oberfläche bezeichnen wir als eisfrei, wenn mindestens vier Fünftel der Fläche ollkommen blank und ohne sichtbare Spuren von Eis sind. Auf dem restlichen ünftel der Fläche dürfen höchstens dünne Scherben, Splitter oder Flecken haften dieiben. r bezeichnet den Prozentsatz der Proben, die gebrochen sind, ohne dass abei die Oberfläche eisfrei wurde.

Tabelle 2

Oberfläche	kg*/cm²	7	Total Proben
Gruppe 1 Sauber (1) Oxydiert (2) . Technisch (3) .	9,5	41%	46
	8,8	36%	56
	7,2	15%	68
Gruppe 2 Kunstharz (5) . Skilack (7) Paraffin (6) Silikonfett (4) .	6,3	21%	33
	5,9	35%	31
	4,6	23%	48
	3,1	2%	43

Wieder zeigt sich, dass Eis an sauberen Oberflächen sehr gut haftet. B 9,5 kg*/cm² bleiben immer noch 41% der Proben mit Eis behaftet. Günstig is wiederum Silikonfett, wo 3 kg*/cm² Schub genügen, um praktisch alle Probe eisfrei zu bekommen.

c) Unterschiede zwischen Oberflächen mit und ohne Film

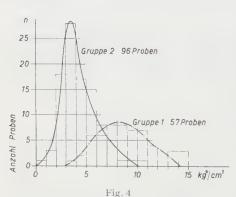
Zählt man, wie viele Proben im Schubspannungsintervall 0-1, 1-2, 2-3 usv kg*/cm² ohne zu brechen von der Oberfläche abgeschert wurden, so bemerkman, dass sich einerseits die sauberen, oxydierten und technischen Oberfläche und anderseits die mit einem Film überzogenen Oberflächen unter sich ähnlic verhalten.

Bei den mechanisch behandelten Oberflächen (Gruppe 1) streuen die Resu tate stark, und das Haftvermögen liegt verhältnismässig hoch.

Tabelle 3

	Gruppe 1 mechanisch behandelt (in kg*/cm²)	Gruppe 2 mit Filmen (in kg*/cm²)
Mittleres Haftvermögen	8,7	4,3
Mittlere scheinbare Schubfestigkeit .	9,0	4,9
Anzahl Proben	155	169

Bei den mit Film überzogenen Oberflächen (Gruppe 2) ist die Streuung klei und das Haftvermögen verhältnismässig gering. Die folgenden Figuren geben ein Übersicht.



Anzahl Proben, die ohne Bruch abgeschert wurden, in Funktion der Schubspannung.

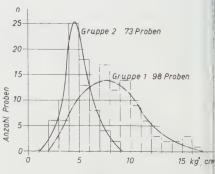


Fig. 5
Anzahl Proben, die gebrochen sind, in Funktion der Schubspannung.

Das durch unsere Versuche gemessene Haftvermögen beträgt bei mechanischearbeiteten Oberflächen (Gruppe 1) etwa 8–9 kg*/cm², bei Oberflächen mil Filmen (Gruppe 2) rund die Hälfte von diesem Wert, nämlich 3,5–4,5 kg*/cm

Die scheinbare Schubfestigkeit des Eises ist etwa gleich gross und stellt sich somit als eine Funktion der Oberflächenbeschaffenheit heraus. – Als wirkliche Schubfestigkeit bezeichnen wir diejenige Festigkeit, die man misst, wenn der Bruch im Eis und nicht an oder in der Nähe einer Metalloberfläche stattfindet. Sie muss bei gleichen Versuchsbedingungen eine Konstante sein.

Die Haftverminderung bei Oberflächen mit Filmen und die scheinbare Schub-

festigkeit des Eises lassen sich wie folgt erklären:

Bei den mechanisch behandelten Oberflächen der Gruppe 1 gibt es eine grosse Anzahl von isolierten Zacken, Spitzen, «Gräben» und «Tälern», das heisst, die wirksame Oberfläche ist bedeutend grösser als die scheinbare. Wird nun von aussen eine Schubspannung angelegt, so verteilt sie sich auf eine grosse Fläche. Die äussere Schubspannung kann also ziemlich gross werden, bis die kritische nikroskopische Schubspannung überschritten wird. Sobald dies irgendwo eintritt, löst sich dort die Bindung, oder es bricht dort das Eis. Es haftet deshalb an einer verkleinerten Fläche, und die Spannung nimmt zu, ohne dass sie von aussen vermehrt worden wäre. Dadurch löst sich oder bricht das Eis an weiteren Stellen usw. und fällt schliesslich von der Oberfläche ab. Den gleichen Vorgang nat Bowden) beim Übergang von der Haftreibung zur Gleitreibung bei Metallen iestgestellt.

Wenn die Oberflächen aber mit einem Film überzogen werden, wird ein Teil ler «Gräben» und «Täler» im Metall aufgefüllt, das heisst die effektive Oberfläche verringert. Bei zunehmender äusserer Spannung wird bei der verminderten effektiven Oberfläche die zulässige mikroskopische Schubfestigkeit und das Haftzermögen rascher erreicht; scheinbare Schubfestigkeit und Haftvermögen er-

cheinen deshalb geringer.

Es leuchtet ein, dass die effektive Oberfläche mittels Filmen höchstens auf die nakroskopische, messbare Oberfläche verringert werden kann. Methoden, die nur lie effektive Oberfläche verringern, sind also nur von begrenzter Wirksamkeit.

d) Das Verhalten der einzelnen Metalle

Das Haftvermögen von Eis kann durch sorgfältige Reinigung der Oberfläche rergrössert werden. Beim Kupfer hat das Schmirgeln den grössten, bei Aluminium en geringsten Einfluss. Das rührt wahrscheinlich daher, dass durch das Schmireln beim Kupfer und zum Teil auch beim Messing die Oberflächenoxydschicht intfernt wird, während sie beim Aluminium bestehen bleibt.

Im übrigen verhalten sich die Metalle nicht einheitlich. Zwanzig Proben proberflächenart und Metallsorte reichen wegen der grossen statistischen Schwanungen nicht aus, um eine sichere Aussage über das Haftvermögen zu geben. mmerhin kann mit Bestimmtheit gesagt werden, dass von den Metallen Kupfer,

luminium, Messing keines speziell günstig oder ungünstig ist.

6. Andere Methoden zur Verminderung des Haftvermögens

In der Literatur sind die Hinweise auf die Verminderung des Haftvermögens war zahlreich, aber meistens wenig aufschlussreich. Fast alle Autoren beschränen sich darauf, die Methoden (Fette, Öle, Alkohole, Pasten und Salze) und ihre for- und Nachteile aufzuzählen.

Alkohole, überhaupt Flüssigkeiten, ergeben zwar eine geringe Haftung, hinegen werden zur Eisfreihaltung grosse (und zum Beispiel bei Flugzeugen schwer

ı transportierende) Mengen benötigt.

¹⁾ F. P. Bowden, Friction, Nature 166, 330 (1950).

Fette und Pasten sind günstiger, da der mengenmässige Verbrauch geringer ist. Hingegen werden sie durch den Regen rasch ausgelaugt und müssen in kurze

Intervallen erneuert werden, was verhältnismässig umständlich ist.

Salze. SMITH¹) hat festgestellt, dass die Adhäsion von Eis auf mit Wachs behandelten Aluminiumoberflächen beträchtlich verringert werden kann, wenn da Eis aus einer schwachen Lösung gewisser Salze gefroren wird. So vermindert zur Beispiel eine 1/1000-normale NaCl-Lösung die Haftung um 50%, eine solche von NaNO3 um 85% und von Th(NO3)4 um 97%. Gelingt es, solche Salze in die zu schützenden Oberflächen so einzulagern, dass sie nicht zu rasch ausgelaugt werder so wird die Adhäsion wirksam vermindert. Smith hat dieses Problem mindesten teilweise dadurch gelöst, dass er die Salze mit Formvar gemischt hat und die Formvarfolien auf die Oberfläche klebte. Diese Methode scheint momentan die best zu sein; es ist uns jedoch nicht bekannt, wie sie seit 1946 weiterentwickelt wurde

Schlussbemerkungen

Verschiedene interessante Fragen wurden von uns nicht abgeklärt. So zur Beispiel die Abhängigkeit des Haftvermögens von der Temperatur. Nach Lough Borough²) soll letzteres eine lineare Funktion der Temperatur sein. – Auch di Art der Eisbildung wird von Einfluss sein. Raschgefrorenes Eis ist feinkristallit und haftet wahrscheinlich schwächer als langsam gefrorenes. Ebenfalls sollt die Abhängigkeit der Resultate von der Prüfmethode untersucht werden. Siche geben dynamische Methoden andere Resultate als statische.

Summary

The adhesion of ice grown on different surfaces is investigated by means of a static shearing test. 300 samples all made at similar conditions are tested. The adhesion on clean metal surfaces is found to be 8 kg*/cm²; it is therefore of about the same magnitude as the shearing stress of ice. A surface-film of silicone greas reduces the adhesion to one half. The apparent shearing stress of ice is also diminished by the same amount. Both effects are attributed to a reduction of the true surface.

(Eingegangen: 4. August 1952.)

Weitere Bemerkung zu $\int e^{b(x+a\cos x)} dx$

Von Peter Henrici, Washington, D. C.3)

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Note⁴) gibt K. Emde eine Lösung für das im Titel genannte unbestimmte Integral in Gestalt de Produktes einer Exponentialfunktion und einer Fourier-Reihe, deren Koeffizier ten er rekursiv durch Auflösung eines unendlichen Gleichungssystems berechne

R. SMITH-JOHANNSEN, AAF Technical Report 5539, General Electric Co. U. S.A. (1946).
 D. L. LOUGHBOROUGH, Reduction of the Adhesion of Ice, J. aeron. Sci. 13, 126 (1946).

³⁾ American University. Die folgenden Untersuchungen wurden gemäss einem Vertrage zwische der American University und dem National Bureau of Standards, Washington, ausgeführt.

⁴⁾ K. EMDEN, Eine Lösung für $\int e^{b(x+a\cos x)} dx$, ZAMP 2, 289–292 (1951).

H. RUTISHAUSER¹) schreibt in einer ergänzenden Notiz diese Fourier-Reihe komplex und gibt für die Koeffizienten eine Kettenbruchentwicklung an. Es ist indessen durch Wahl einer andern Variabeln möglich, das fragliche Integral in einfacher Weise in eine nach Produkten Besselscher und trigonometrischer Funktionen fortschreitende Reihe zu entwickeln, deren Konvergenzeigenschaften sich im Gegensatz zu denjenigen der von den genannten Autoren angegebenen Reihen leicht überblicken lassen.

Wir benötigen zur Herleitung dieser Reihe das folgende bekannte Resultat aus der Theorie der Besselschen Funktionen: Ist $a \in (-1, 1)$ und x eine reelle Variable, so wird die zu

$$y = x - a \sin x \tag{1}$$

nverse Funktion dargestellt durch die samt allen ihren Ableitungen absolut und zleichmässig konvergente Reihe

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n \ a) \sin(n \ y) , \qquad (2)$$

vo $J_n(n|a)$ die n-te Besselsche Funktion bedeutet 2). Damit ergibt sich für $i \in (-1, 1)$, für komplexes b mit $\Re b > 0$ (was keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet) und für beliebiges reelles X, wenn wir das zwischen den Grenzen $-\infty$ und X genommene Integral mit E(a, b; X) bezeichnen,

$$E(a, b; X) = \int_{-\infty}^{X} e^{b(x+a\cos x)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{X} e^{b[x+\pi/2 + a\cos(x+\pi/2)]} dx$$

$$= e^{\pi b/2} \int_{-\infty}^{X} e^{b(x-a\sin x)} dx$$

$$= e^{\pi b/2} \int_{-\infty}^{X-\pi/2 + a\cos X} e^{by} \frac{dx}{dy} dy$$

$$= e^{\pi b/2} \int_{-\infty}^{X-\pi/2 + a\cos X} e^{by} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(n \ a) \cos n \ y \right\} dy$$

nd daher, wenn gliedweise integriert und $Y = X - \pi/2 + a \cos X$ gesetzt wird,

$$E(a,b;X) = \frac{1}{b} e^{b(X+a\cos X)} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(n|a) \frac{n\sin n}{n^2} \frac{X+b\cos n}{b^2} \right\}.$$
 (3)

¹⁾ H. Rutishauser, Bemerkungen zur Arbeit von K. Emden etc., ZAMP 2, 292-293 (1951)
2) G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2. Aufl. (University Press, Camidge 1944), S. 552f. Gerade durch das Problem, für die zu (1) inverse Funktion einen analytischen usdruck zu finden, wurde Bessel auf die später nach ihm benannten Funktionen geführt.

Da für grosse n

$$J_a(n|a) \sim \frac{e^{-n\left(\operatorname{artgh} \left(1-a^2 - \left(1-a^2\right)\right)}}{\sqrt{2} \pi n \sqrt{1-a^2}},$$

ist die Konvergenz von (3) besser als diejenige einer geometrischen Reihe mit dem Argument $\exp{(-\arctan{y})} \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-a^2}$.

Summary

For the function $E(a, b; X) = \int_{-\infty}^{X} e^{b(x+a\cos x)} dx$ ($\Re b > 0$) a series representation in term of products of Bessel and trigonometric functions is given, valid for real \Im

and real $a \in (-1, 1)$.

(Eingegangen: 8. August 1952.)

On the Existence of Certain Solutions of a Nonlinear Differential Equation

By George Seifert, Lincoln, Nebraska, U.S.A.2)

The equation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta = \beta , \qquad (1)$$

where α and β are positive constants, is of interest in the study of the oscillation of a synchronous motor. If we put

$$\frac{d\theta}{dt} = y$$
, then $\frac{dy}{dt} = \beta - \sin \theta - \alpha y$,

and dividing the latter equation by the former, we obtain the equation of the phase trajectories

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{\beta - \sin\theta - \alpha y}{y} \,. \tag{2}$$

It is known³) that for $\beta \geq 1$ there exists a solution $\overline{y}(\theta) \geq 0$ of equation (2 such that $\overline{y}(\theta) = \overline{y}(\theta + 2\pi)$ for all θ . The solution $\theta(t)$ of equation (1) corresponding to such a $\overline{y}(\theta)$ is called a periodic solution of the second kind. If $0 < \beta < 1$ there exists an $\alpha_0 = \alpha_0(\beta)$ such that the conditions $\alpha \leq \alpha_0$ and $\alpha > \alpha_0$ imply respectively the existence and nonexistence of periodic solutions of the secondard of equation (1). F. Tricomi³), who has shown the existence of such an α_0 has given bounds on α_0 , and L. Amerio⁴), in a study of the stability of solution

¹⁾ G. N. WATSON, l. c., S. 243.

²) University of Nebraska.

³⁾ F. Tricomi, Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica, Ann. R. Schorm. sup. Pisa [2] 2, 1-20 (1933).

⁴⁾ L. Amerio, Determinazione delle condizione di stabilità per gli integrali di un'equazione interex sante l'elettrotecnica, Ann. Mat. pura appl. [4] 30, 75-90 (1949).

of equation (1), has given an upper bound on α_0 which is lower than that of $\Gamma_{\rm RICOMI}$'s.

It is the purpose of this note to derive another upper bound on α_0 , and to how that it is smaller than the one given by Amerio. To this end, we first prove the

Theorem. If $0 \le \beta < 1$, and if

$$\alpha > \alpha_M - \left[\begin{array}{ccc} (3\pi - 4\theta_0) \beta + 2 (1 & \cos \theta_0) \\ \pi (\pi - 2\theta_0) \end{array} \right]^{1/2}$$

where $\sin\theta_0=\beta$, $0 \le \theta_0 < \pi/2$, then equation (2) can have no nonnegative solutions $\overline{y}(\theta)$ of period 2π in θ , and all solutions $\theta(t)$ of equation (1) tend to a finite limit as $t \to +\infty$.

Proof. Assume that there exists a solution $\overline{y}(\theta) \geq 0$ of equation (2) such that $y(\theta) = \overline{y}(\theta + 2\pi)$ for all θ . Then by equation (2), $\overline{y}(\theta)$ must satisfy the equation

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\theta} \left[y^2(\theta) \right] = \beta - \sin \theta - a y(\theta) . \tag{3}$$

Substituting $y=\overline{y}(\theta)$, integrating this from any fixed θ to $\theta+2\pi$, and dividing by α , we obtain

$$\int_{0}^{\theta+2\pi} \overline{y}(x) \ dx = \frac{2\pi \beta}{\alpha}.$$

From this, it follows that the minimum value m of $y(\theta)$ must be such that $m < \beta/\alpha$. Ve also note that $\overline{y}(\theta) = m$ implies

$$\theta=\,\theta_m+\,2\,\pi\,n$$
 , $\,n=\,$ 0, $\,\pm\,\,1$, $\,\pm\,\,2$, ..., where $\pi-\,\theta_0\leqq\theta_m<\pi$.

This is a consequence of the observations that the locus of points in the (θ, y) artesian plane for which $dy/d\theta = 0$ is the curve

$$y = \frac{\beta - \sin \theta}{\alpha},$$

nd that the region included between this curve and the θ axis is the region in thich all phase trajectories have positive slope. Hence if $\beta=0$ we have a contradiction and conclude the theorem. We note, incidentally, that in this case $\alpha_M=0$, which is the best possible value. Accordingly, in what follows we may assume $\delta>0$.

Let us consider the solution $y(\theta)$ of equation (2) for which $y(\pi) = \beta/\alpha$. Since $y(\theta_m) > \beta/\alpha$, we have, clearly, that $y(\theta_m) > \overline{y}(\theta_m)$, and consequently, $y(\theta) > \overline{y}(\theta)$ or all θ . Define the function $f(\theta)$ as follows:

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \text{ for } \pi \leqq \theta < 2 \pi, \\ \\ \alpha (\theta_1 - \theta_0) \text{ for } 2 \pi \leqq \theta < \theta_2, \\ \\ \alpha (\theta_3 - \theta) \text{ for } \theta_2 \leqq \theta \leqq \theta_3 \end{cases}$$

here $\theta_1=\pi-\theta_0$, $\theta_2=\theta_0+2\pi$, and $\theta_3=\theta_1+2\pi$. Since

$$\frac{\beta}{\theta_1 - \theta_0} < \frac{\left(3 \pi - 4 \theta_0\right) \beta + 2 \left(1 - \cos \theta_0\right)}{\pi \left(\pi - 2 \theta_0\right)} < \alpha^2,$$

e have that $\alpha (\theta_1 - \theta_0) > \beta/\alpha$; hence $f(\theta_2) > \beta/\alpha$.

Assume for a moment that $y(\theta_2) < f(\theta_2)$. We will show that in this case ther exists a ξ , $\theta_2 \le \xi < \theta_3$, for which $y(\xi) = 0$. For if not, the conditions $y(\theta) >$ and $y'(\theta) < 0$ for $\theta_2 \le \theta \le \theta_3$ would imply the intersection of the trajectory $y = y(\theta)$ with the line $y = \alpha (\theta_3 - \theta)$ at a point $\theta = \eta$, $\theta_2 < \eta < \theta_3$, such that $-\alpha \le y'(\eta)$. But

$$y'(\eta) = \frac{\beta - \sin \eta}{v} - \alpha < -\alpha \quad \text{for} \quad \theta_2 < \eta < \theta_3$$
,

and we have a contradiction. Hence, the assumption $y(\theta_2) < f(\theta_2)$ implies th existence of a ξ for which $y(\xi) = 0$. But since $y(\theta) > \overline{y}(\theta) \ge 0$ for all θ , we conclude that $y(\theta_2) < f(\theta_2)$ is an impossibility; hence we must have $y(\theta_2) \ge f(\theta_2)$

We show next that $y(\theta) \ge f(\theta)$ for $\pi < \theta < \theta_3$. Since $y(\pi) = \beta/\alpha$ and $y(\theta_2) \ge f(\theta_2)$, we have, clearly, that $y(\theta) \ge f(\theta)$ for $\pi < \theta \le \theta_2$. Now if for $\theta_2 \le \theta \le \theta_3$ we do not have $y(\theta) \ge \alpha$ ($\theta_3 - \theta$), then either there exists a $\theta_2 < \xi \le \theta_3$, such that $y(\xi) = 0$, or there exists an η , $\theta_2 < \eta < \theta_3$ for which $y'(\eta) \ge -\alpha$. Again (4) rules out the latter possibility, while the argument of the previous paragraph rules out the existence of the ξ . We have, then then $y(\theta) \ge f(\theta)$ for $\pi < \theta < \theta_3$.

Now by equation (2), $y(\theta)$ must satisfy equation (3), and integrating from to θ_3 we obtain

$$\begin{split} \frac{y^{2}(\theta_{3})}{2} &= \beta (\theta_{3} - \pi) + \cos \theta_{3} + 1 - \alpha \int_{\pi}^{\theta_{3}} y(\theta) d\theta + \frac{y^{2}(\pi)}{2} \\ &< \beta (\theta_{1} + \pi) + 1 - \cos \theta_{0} \\ &- \alpha \left[\frac{\beta}{\alpha} \pi + \alpha (\theta_{1} - \theta_{0}) (\theta_{2} - 2\pi) + \frac{\alpha}{2} (\theta_{3} - \theta_{2})^{2} \right] + \frac{\beta}{2} (\theta_{1} - \theta_{0}) \\ &= \frac{\beta}{2} (3\pi - 4\theta_{0}) + 1 - \cos \theta_{0} - \frac{\alpha^{2}}{2} \pi (\pi - 2\theta_{0}) . \end{split}$$

Hence, by the hypothesis of the theorem, we obtain $y^2(\theta_3) < 0$, and we see that the assumption of a $\overline{y}(\theta) \ge 0$ such that $\overline{y}(\theta) = \overline{y}(\theta + 2\pi)$ for all θ leads to contradiction.

That the nonexistence of such periodic solutions $\overline{y}(\theta)$ of equation (2) implies that for any solution $\theta(t)$ of equation (1) either

$$\lim_{t \to \infty} \theta(t) = \theta_0 + 2 \pi n \quad \text{or} \quad \lim_{t \to \infty} \theta(t) = \theta_1 + 2 \pi m$$

for some integer m or n is a consequence of the work of L. Amerio¹). This completes the proof of the theorem.

We show, finally, that Amerio's upper bound on α_0 ; namely

$$(\beta + 1) [4 \cos \theta_0 - 2 (\pi - 2 \theta_0) \beta]^{-1/2}$$

is greater than α_M . If we put $\varphi=\pi/2-\theta_0$, we have, clearly, only to show that for $0<\varphi<\pi/2$,

$$2\;(\cos\varphi+1)^{2}\;\frac{\pi}{4}\;\varphi>[(\pi+4\;\varphi)\;\cos\varphi+2\;(1-\sin\varphi)]\;[\sin\varphi-\;\varphi\;\cos\varphi]\;,$$

L. AMERIO, Determinazione delle condizione di stabilità per gli integrali di un'equazione inte essante l'elettrotecnica, Ann. Mat. pura appl. [4] 30, 75-90 (1949).

which we establish proving that for $0 < \varphi < \pi/2$,

(i)
$$g_1(\varphi) = \frac{\pi}{4} \varphi - \sin \varphi + \varphi \cos \varphi > 0$$
, and

(ii)
$$g_2(\varphi) = 2(\cos \varphi + 1)^2 - (\pi + 4\varphi)\cos \varphi - 2(1 - \sin \theta) > 0$$
.

To prove (i) we simply note that $g_1(0) = 0$, $g_1(\pi/2) > 0$, $g_1'(0) > 0$ and $g_1''(\varphi) < 0$ for $0 < \varphi < \pi/2$. To prove (ii), we first note that since $\sin^2 \varphi < \sin \varphi$, we have that $g_2(\varphi) \ge (4 - \pi - 4 \varphi) \cos \varphi + 2$. Consequently, $g_2(0) > 0$, $g_2(\pi/2) > 0$, and we note that at $\varphi = \varphi_0$ where

$$\cot \varphi_0 = \varphi_0 - rac{4-\pi}{4}$$
 ,

the function $g_2(\varphi)$ assumes its minimum value in $0 < \varphi < \pi/2$. It is easily established that φ_0 is approximately 0.94, and that since $g_2(\varphi_0) > 0$, the proof of (ii) s complete.

Zusammenfassung

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$
 , $\alpha \frac{d\vartheta}{dt} = \sin\vartheta - \beta$,

vo α und β positive Grössen sind, kommt in der Elektrotechnik bei der Beschreibung der Schwingungen einer Synchronmaschine vor. Setzt man $y=d\vartheta/dt$, so rhält man $dy/dt=\beta-\sin\vartheta-\alpha y$, und aus diesen zwei Gleichungen folgt

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \frac{\beta - \sin\vartheta - \alpha y}{y} .$$

Ian beweist: Ist $\beta < 1$ und $\alpha > \alpha_M$, wo

$$\alpha_{M} = \ \frac{\left(3 \ \pi - 4 \ \vartheta_{0}\right) \ \beta + 2 \left(1 - \cos \vartheta_{0}\right)}{\pi \ (\pi - 2 \ \vartheta_{0})} \ , \quad \sin \vartheta_{0} = \beta \ , \quad 0 < \vartheta_{0} < \frac{\pi}{2}$$

ind, so existieren keine Lösungen $\overline{y}(\vartheta)$ der vorigen Differentialgleichung mit en Eigenschaften

$$(\mathrm{I}) \quad \overline{y}(\vartheta) \geqq 0 \; , \quad \text{und} \; (\mathrm{II}) \quad \overline{y}(\vartheta) = \overline{y}(\vartheta + 2 \; \pi)$$

ir jedes ϑ . Ferner wird gezeigt, dass der Wert α_M kleiner ist als der von F. Triomi und L. Amerio angegebene.

Received: July 14, 1952.)

Varia - Miscellaneous - Divers

. Internationaler Kongress für theoretische und angewandte Mechanik

Der Kongress fand vom 20. bis 28. August 1952 an der Universität Istanbul att. Er ist von einem lokalen Organisationskomitee unter der Leitung von rof. Kerim Erim in vorbildlicher Weise vorbereitet und durchgeführt worden id vereinigte gegen 600 Teilnehmer aus fast allen freien Ländern der Erde.

Folgende Hauptvorträge wurden gehalten: R. Courant, Reciprocal Varia tional Problems and Applications to Problems of Equilibrium; J. C. Hunsaker Social Aspects of Aeronautics; A. Kantrowitz, Physical Phenomena associate with strong Shock Waves; A. Lichnerowicz, Méthodes tensorielles en mécanique J. von Neumann, Automatic Computation and Hydrodynamics; Sir G. Taylor Hydrodynamic Theory of Detonating Explosives; W. Tollmen, Über Schwingunge in laminaren Strömungen und die Theorie der Turbulenz.

Rund 350 Referate verteilten sich auf folgende fünf Sektionen (von denen di

beiden ersten weiter unterteilt werden mussten):

I. Elastizität, Plastizität und Rheologie (Sektionsvorträge: H. Geiringef Some Recent Developments in the Theory of an Ideal Plastic Body; W. Pragef The General Theory of Limit Design; M. Reiner, Rheology of Second Order Effects in Elasticity and Hydrodynamics);

II. Hydromechanik (M. Burgers, Some Statistical Problems connected wit Solutions of a simple Non-linear Equation; F. N. Frenkiel, Turbulent Diffusion

G. TEMPLE, The Dominant Derivative Method in Aerodynamics);

III. Mechanik fester Körper (A. Signorini, Quelques recherches récentes a dynamique des solides);

IV. Statistische Mechanik, Thermodynamik, Wärmeleitung (M. Roy, D

combustible à la propulsion);

V. Mathematische Hilfsmittel und Rechenversahren (N. MINORSKY, Sur I méthode stroboscopique et ses applications; M. PICONE, Sur une méthode pour l'acalcul des valeurs propres et des fonctions propres et sur son application à l'equation de Schrödinger).

Der nächste Kongress ist für 1956 in Brüssel vorgesehen.

Hans Ziegli

Herbsttagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 24. August 1952 in Bern

Berichte über angewandte Physik und Mathematik

Über die Temperatur verteilung an angeströmten Zylindern, von J. Ackir Ret, ETH., Zürich.

Wie man aus Versuchen von Eckert, Weise und von Ryan weiss, ist di Temperaturverteilung an einem parallel angeströmten, wärmeisolierenden Kreis zylinder sehr unsymmetrisch, so dass auf der Rückseite im Ablösegebiet relatii tiefe Temperaturen sich vorfinden. Es wird der Versuch gemacht, diese unerwan tete Absenkung auf der Grundlage einer nichtstationären Potentialströmung m Einzelwirbeln im Ablöseraum zu verstehen. Für die Temperatur-Mittelwerte die bisher allein gemessen wurden, ergeben sich sehr einfache Beziehungen, de bei vernünftiger Wahl der Zirkulation und mit Einführung des nicht vollständ. gen Temperaturrückgewinnes in Grenzschichten mit den Messungen recht befrie digend übereinstimmen. Einige Besonderheiten der Temperaturen im Nachlau und in seiner unmittelbaren Umgebung sind in Übereinstimmung mit der Ryanschen Messungen.

Ein ausführlicher Bericht wird voraussichtlich in der ZAMP erscheinen.

The Secondary Flow in Curved Pipes, von R. W. Detra, Zürich1).

Fluid, with a nonuniform velocity distribution, flowing in curved pipes produces a secondary fluid motion in the cross-section of the pipe perpendicular o the principal flow. Under the action of the centrifugal force, the fluid particles vith the higher axial velocity are displaced toward the outside of the bend. To atisfy the continuity conditions within the cross-section of the pipe, the slower noving fluid particles, which consequently are acted upon by a smaller centriagal force, are displaced toward the inside of the bend. This resulting secondary ow distorts the axial velocity distribution and in itself represents a loss of nergy from the principal pipe flow.

A study of this phenomenon in curved constant-area pipes of large radius of urvature and small angle of bend is made. Using the inviscid-fluid approximaons and considering the secondary flow as a small perturbation superimposed n a principal flow, a theory for predicting this secondary flow is developed. By msidering the centrifugal force as a body force acting on each fluid particle, its ragnitude being proportional to the particles velocity squared, a single ordinary ifferential equation, satisfied by the secondary flow stream function, is obtained om the equations of motion. In this differential equation the secondary flow xhibits a strong dependence on the inlet velocity distribution. A solution for the

econdary flow stream function is found as a finite series. Superposition of this

econdary motion on the principal flow produces a distortion of the axial velocity istribution as a function of the angle of bend.

A comparison of the results of this theory with experiments conducted at the istitut für Aerodynamik, E. T. H., Zurich, shows good agreement. The loss due b this secondary flow, while small for small angles, increases as the square of ne angle of bend. Loss calculations for an elliptical cross-sectioned pipe, whose utio of major axis to minor axis is 2:1, indicate the loss for the pipe, oriented ith its major axis parallel to the radius of curvature of the bend, is of the order 5 times as great as the pipe oriented with its minor axis parallel to the radius i curvature.

chubvermehrung durch Strahlmischung, von Z. Plaskowski, Zürich1).

Die aerodynamische Schubvermehrung durch Strahlmischung wird zunächst Leoretisch erfasst. Die Berechnungsresultate, die für inkompressible Strömunen unter Vernachlässigung der Wandreibung und für vollständige Mischung im indquerschnitt des Schubvermehrers ermittelt wurden, zeigen eine starke Abnhme der Zusatzschübe mit zunehmender Fluggeschwindigkeit. Interessante raftverhältnisse liegen theoretisch am Stand für relativ zur Treibdüse grosse chubvermehrer vor.

Inkompressible Standversuche, in den Jahren 1948/49 im Institut für Aeroımamik ETH. durchgeführt, zeigten, dass für einen Schubgewinn in der Grösmordnung von 25 bis 40 % grosse Mischrohrlängen benötigt wurden, die einen aktischen Einsatz des Schubvermehrers erschweren.

Die Versuche ergaben starke Abhängigkeit der Schubvermehrung von der ollständigkeit der Strahlmischung, die durch Mischrohrlängen und Querschnittsrhältnisse beeinflusst wird. Man stellte ebenfalls einen Einfluss der Form des dischrohreinlaufes fest, sobald es sich um Vermeidung der Ablösung und Aus-Ildung der für die Schubvermehrung massgebenden Saugkraft handelte.

¹⁾ Institut für Aerodynamik, ETH.

Durch Unterteilung des Treibstrahls in vier kleine Düsen und bei passende Düsenverteilung konnte ein Fortschritt gegenüber einem einfachen Treibstrah erreicht werden. Es wurde eine Abhängigkeit der optimalen Düsenverteilung vor Querschnittsverhältnis von Treibdüsen und Mischrohr festgestellt.

Der höchstgemessene Wert des Schubgewinnes betrug 40 % bei einer extreme

Anordnung.

Ein ausführlicher Bericht wird vermutlich in der ZAMP erscheinen.

Über thermische Effekte bei Resonanzrohren, von H. Sprenger, Zürich!

Wenn der Gasinhalt eines relativ starren Hohlraumes periodisch komprimie und expandiert wird, können irreversible Vorgänge Temperatursteigerungen veursachen, die ein Vielfaches der adiabatischen Temperaturerhöhung betragen Dieser Effekt tritt besonders ausgeprägt in Erscheinung, wenn das Gasvolume Resonanzschwingungen mit grossen Amplituden ausführt. Für die Untersuchungen sind Rohrresonatoren verwendet worden, die sich mit Gasstrahlen leicht an regen lassen. Es zeigte sich, dass mit schwachen instationären Störungen in Gasstrahl, intensive Schwingungen sich auch bei unterkritischen Düsendruckvehältnissen erzeugen lassen - beispielsweise durch die Turbulenz eines quer übel die Düsenaustrittsfläche gespannten feinen Fadens. Mit dieser Massnahme kan sogar die Wirkung von Gasstrahlen, die bei überkritischen Druckverhältnisseexpandieren, verstärkt werden - eine Verbesserung, die sich vielleicht auch beden Ultraschallgeneratoren von J. Hartmann anwenden lässt. Druck-, Tempe ratur- und Schallstärkemessungen sind an zahlreichen Resonanzrohren im Fre quenzbereich 50 bis 3000 Hz mit und in Luft ausgeführt worden unter Verwei dung konvergenter Düsenformen mit Druckverhältnissen bis 7:1 und mit eine Laval-Düse für die Anströmmachzahl 1,7. Qualitative Versuche zeigten, dass d Erwärmungen abgeschwächt auch bei Ultraschallfrequenzen auftreten könner Eine optimale Temperatursteigerung von 450°C wurde gemessen am verschlos senen Ende eines dünnwandigen Metallröhrchens von 0,3 cm Durchmesser un 10 cm Länge (900 Hz) bei koaxialer Anströmung aus 1,2 cm Entfernung durch eine Düse von 0,3 cm Durchmesser. Es wurde dabei Pressluft von Raumtempera tur und 4 b Überdruck benützt. Durch Isolieren des Resonators und Vorwärme des Druckgases lässt sich die Temperaturerhöhung weiter steigern. Mit de thermischen Effekten in Resonanzrohren können exotherme Prozesse eingeleite werden. Zur Demonstration des Vorganges genügt schon ein Stück Holz m. einer Anbohrung. Wenn gegen diese Öffnung ein Luftstrahl (3 bis 4 atü Druck) s gerichtet wird, dass intensive Resonanztöne zu hören sind, verbrennt das Holl von innen heraus unter lebhafter Rauchentwicklung und Funkenbildung.

Wird in der Nähe des geschlossenen Endes eines Resonanzrohres eine kleir Öffnung angebracht, so dass ein Teil des sich im Hohlraum ansammelnden Warm gases entweichen kann, so erfährt der aus dem Rohr rückfliessende Treibgasstrall eine der abgegebenen Kompressionsarbeit entsprechende Abkühlung unter d Drosseltemperatur. Resonanzrohre können wie Ranquesche Wirbelrohre benutz werden zum Trennen expandierender Gase in erwärmte und abgekühlte Teilströme. Die Charakteristiken eines «Wirbelrohres ohne Blende» und eines Resonanzrohres einfachster Bauart sind unter gleichen Betriebsbedingungen gemesse worden. Die Ähnlichkeit der Kurven deutet hin auf eine physikalische Versonschaften der Schaffliche Geschlossen der Schaffliche Versonschaffliche Schaffliche Versonschaffliche Schaffliche Versonschaffliche Schaffliche Versonschaffliche Vers

wandtschaft der beiden Separationsvorgänge.

¹⁾ Institut für Aerodynamik, ETH.

Über das radiale Gleichgewicht in axialen Turbomaschinen, von P. DE HALLER, Winterthur¹).

Wenn in einer axialen Turbomaschine die Verteilung der Umfangskomponente ler absoluten Geschwindigkeit nicht dem Drallgesetz $c_u \, r = \text{const}$ folgt, kann lie Strömung nicht mehr parallel zur Achse verlaufen, da Druck- und Massenräfte nicht im Gleichgewicht stehen. Es wird an Hand des Beispieles der Strönung hinter einem Leitrad mit konstantem Austrittswinkel gezeigt, dass in den ür die Praxis wichtigen Fällen die radiale Komponente der Geschwindigkeit lein bleibt und dass ein neues Gleichgewicht mit veränderten Verteilungen der txial- und Umfangskomponenten sehr rasch, nach ungefähr einer Kanalhöhe, rreicht wird. Gleichzeitig werden einige Eigenschaften der Differentialgleichung nd ihrer Lösungen diskutiert.

Cnickung gerader Stäbe durch Druck und konservative Torsion, von Iax Beck, Zürich²).

Deformiert sich der durch das Torsionsmoment \overrightarrow{W} belastete Stab (Figur 1), p ist zu erwarten, dass der Momentvektor seine ursprünglich axiale Richtung ndert. Beim Ausknicken des Stabes sind die Deformationen zuerst klein, und ie Beziehungen zwischen \overrightarrow{W} und dem Tangenten-Einheitsvektor $\overrightarrow{t}(x', y', 1)$ könen allgemein durch den linearen Ansatz

$$W_x = \, W \, \left(A \,\, x' \, \dot{+} \,\, B \,\, y' \right); \quad W_y = \, W \, \left(C \,\, x' \, + \,\, D \,\, y' \right); \quad W_z = \, W$$

iedergegeben werden. Für die mathematische Behandlung eines Knickproblems tes wichtig, zu wissen, ob die Belastung konservativ sei oder nicht³). Die Bechnung der virtuellen Arbeit ergibt, dass das Torsionsmoment konservativ ist, enn die Bedingung A + D = 1 erfüllt ist. Die einfachsten konservativen Monente erhält man für A = 1; B = C = D = 0:

$$\overrightarrow{W}=W\left(x^{\prime}\text{, 0, 1}\right)$$
 : quasitangentiales Moment,

ad für
$$A = D = 1/2$$
; $B = C = 0$

$$\overrightarrow{W}=W\left(\frac{1}{2}\ x',\,\frac{1}{2}\ y',\,1\right)$$
 : semitangentiales Moment.

agegen sind das axiale Moment (A=B=C=D=0) und das tangentiale Moment $(A=D=1\,;\,B=C=0)$ nicht konservativ.

Um zu erfahren, wie sich der Momentvektor bei der Deformation verhält, muss an auf die das Moment erzeugenden Einzelkräfte zurückgehen. H. Ziegler 4) ut gezeigt, dass man mit der Annahme, dass die Kräfte ihre ursprüngliche Richng beibehalten, konservative Momente erhält. Die einfachsten und wohl wichzsten Anordnungen der Kräfte führen auf quasi-, semi- oder pseudotangentiale omente. H. Ziegler findet in allen drei Fällen für alle Arten der Lagerung ausible Knickmomente, während die bisher übliche, wohl selten verwirklichte mahme, der Momentvektor bleibe beim Ausknicken axial, für gewisse Lagengen auf unbefriedigende Resultate führt.

¹⁾ Gebrüder Sulzer AG.

²⁾ Assistenz für technische Mechanik, ETH.

³⁾ H. Ziegler, Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ing.-Arch. 20, 49 (1952).

⁴⁾ H. Ziegler, Knickung gerader Stäbe unter Torsion, ZAMP 3, 96 (1952).

Diese Rechnungen sind nun auf den auf Druck und Torsion beanspruchte Stab sowie auf den Stab mit zwei verschiedenen Biegesteifigkeiten und den verwundenen Stab ausgedehnt worden. Von den Resultaten sind hier nur die Knictlasten für den durch eine axiale Druckkraft und ein semitangentiales Momesbeanspruchten Stab wiedergegeben (Figur 2). Ein Stab ist stabil, solange sein



Fig. 1
Zum Verhalten des Torsionsmomentes beim Ausknicken.

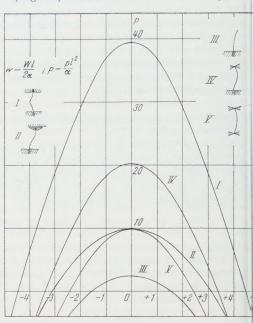


Fig. 2

Die Knicklasten des durch ein semitangentiales Momeund eine axiale Druckkraft beanspruchten Stabes für verschiedene Arten der Lagerung ($\alpha =$ Biegesteifigkeit l = Länge des Stabes).

Belastung einen Punkt innerhalb der zu seiner Lagerung gehörenden kritischen Kurve ergibt. Die Gleichungen der Kurven sind für die Lagerungen I, IV, transzendent, lassen sich aber durch einfache Polynome gut annähern. Da in der Fällen I und II der belastende Momentvektor seine Richtung nicht ändern kan is sind die zugehörigen Kurven allgemein gültig.

Ein Bericht über diese Untersuchungen und eine Zusammenstellung der Risultate sollen bald veröffentlicht werden.

Errata

Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückte Stabes. Von Max Beck (ZAMP 3, Fasc. 3, 225 [1952]).

Auf Seite 228, zweite Zeile, ist der Satz «Im Falle einer Doppelwurzel kar y die Form

$$y(x, t) = Y(x) t \sin(\omega t)$$

unnehmen» zu ersetzen durch: «Tritt für $P=P_k$ eine Doppelwurzel auf, so treten bei einer beliebig kleinen Erhöhung von P über P_k hinaus an Stelle der zwei verschwundenen reellen zwei komplexe Wurzeln für ω^2), und y kann die Form

$$y(x, t) = Y(x) e^{\omega''t} \sin(\omega' t) \qquad (\omega'' > 0)$$

nnehmen.» – Auf die übrigen Teile der Arbeit und insbesondere auf die Schlussolgerungen wirkt sich diese Änderung nicht aus²).

Über die Koppelkurven des Zwillingkurbeltriebes. Von W. MEYER ZUR APELLEN (ZAMP 2, Fasc. 3, 189–207 [1951]).

Seite 189: Dass gewisse Koppelkurven des Antiparallelkurbeltriebes als Umss von Tragflügelprofilen benutzt werden können, wurde nicht von Piercy usw. Anmerkung 1, Seite 189) angegeben, sondern wohl zuerst von Cleff und Welourne (beide England) ausgesprochen. Den Beweis für die Identität dieser Toppelkurven mit den zu den Kegelschnitten inversen Kurven gab O. S. Heck, angew. Math. Mech. 30, 239 (1950).

Seite 194, Zeile 18 von unten: Statt $p \sin \tau$ muss es $(c \sin \tau)/2$ heissen.

Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques

Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939 bis 1946 (für den uchhandel bestimmte Ausgabe der *Fiat Review of German Science*) (Dieterichhe Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden). Preis je Band DM. 10.—.

Band 8 und 9: Physik der festen Körper. Herausgegeben von G. Joos (Wiesden 1947 bzw. 1948), 228 und 235 S.

In diesen zwei Bänden berichten achtundzwanzig durchwegs wohlausgewiesene utoren in zusammenfassenden Referaten über Fortschritt und Stand der Forhung in den verschiedenen Zweigen der Festkörperphysik. Der Inhalt umfasst grossen Zügen: Struktur, mechanische Eigenschaften, Thermodynamik, agnetische Eigenschaften, elektrische Eigenschaften und Optik der festen örper. Jedes dieser Kapitel ist durch mehrere gründliche und konzentriert geltene Aufsätze belegt.

Wenn auch in einzelnen Abschnitten die Darstellung den Zusammenhang mit n Forschungen in andern Ländern zu sehr vernachlässigt, so erfüllt doch s Buch seinen Hauptzweck aufs beste: Es bringt eine gründliche Übersicht er das während der Kriegszeit nur lückenhaft zu uns gelangte, umfangreiche utsche Schrifttum über Festkörperphysik.

H. Labhart

Bd. 13: Kernphysik und kosmische Strahlen, Teil. I. Von W. Вотне und Flügge (Wiesbaden 1948), 230 Seiten.

In den beiden ersten Abschnitten des Buches wird der Problemkreis der ementarteilchen und der Felder, der vor allem für die Elektrodynamik und

¹⁾ Vergleiche Ernst Lindelöf, Le calcul des résidus (Gauthier-Villars, Paris 1905), S. 26, r Edouard Goursat, Cours d'analyse mathématique, Bd. 2, Kapitel XVII: Théorème de Weierss. – Der Ausdruck «Doppelwurzel» wird im Hinblick auf Figur 4 verwendet.

2) Die Aufdeckung dieses Fehlers verdanke ich Herrn Prof. Dr. R. von Mises.

die kosmische Strahlung von fundamentaler Bedeutung ist, sowohl vom theoretischen als auch vom experimentellen Standpunkt aus behandelt. Die restliche Kapitel befassen sich mit der Physik der Atomkerne, der Kernumwandlungs prozesse und der Spaltung der schwersten Kerne. Die Abhandlungen geben de deutschen Beitrag zu den aktuellen Problemen der Physik wieder; dabei musste zufolge des fehlenden Kontaktes zahlreiche ausländische, vor allem amerikanisch Arbeiten unberücksichtigt bleiben. Trotzdem sind die Berichte stellenweise für den Fachmann fesselnd geschrieben.

H. Wäffle

Einführung in die Differentialgeometrie. Von W. Blaschke (Springes Verlag, Berlin 1950). 146 S., 57 Abb.; DM 16.-.

Das neue Lehrbuch von Wilhelm Blaschke über Differentialgeometrie ver mittelt eine ausgezeichnete, moderne Einführung in dieses interessante Gebieder Geometrie, dessen Anfänge auf C. F. Gauss und G. Monge zurückgeher Eingangs sind auf knappem Raume die Hilfsmittel aus der linearen Algebrazusammengestellt, anschliessend folgt die Behandlung der Streifen und Liniemit Hilfe des begleitenden Dreibeins (repère mobile). Der dritte Teil bringt eine Einführung in den Cartanschen Kalkül der alternierenden Differentialformer (Pfaffsche Formen), der für die folgenden Entwicklungen grundlegend ist. Dinnere Flächenlehre, welche die bei einer Verbiegung invarianten Eigenschaften der Fläche umfasst, ist im nächsten Kapitel dargestellt, an das die Untersuchunger geodätischen Linien anknüpft. Alsdann folgt die äussere Flächenlehre (bewegungsinvariante Eigenschaften); und schliesslich die Behandlung der Minimarflächen.

Jedem Kapitel sind eine Reihe von zum Teil neuen Aufgaben, die eine wesentlichen und wertvollen Bestandteil des Buches bilden, sowie Ergänzunge zur Theorie beigefügt. Das bemerkenswerte Werk wird wirksam belebt und abgrundet durch zahlreiche in den Text eingestreute historische Bemerkungen und Hinweise auf aktuelle Probleme der Forschung. Die Darstellung, die sich auf das Wesentliche beschränkt, ist durch die konsequente Verwendung des Cartansches Kalküls sehr elegant und kurz.

Diese meisterhafte Einführung in die Differentialgeometrie kann allen Inte essenten, zu denen neben den Mathematikern auch die Geodäten, Astronome und Physiker zu zählen sind, sehr empfohlen werden.

E. Roth-Desmeul.

Linear Computations. By P. S. DWYER (John Wiley & Sons, New York 1951), 344 pp.; \$6.-.

Das Buch will Statistiker mit den modernen Methoden zum Auflösen linear Gleichungssysteme bekanntmachen. Ein Einführungskapitel hat das Rechne mit Annäherungswerten (Fehlerrechnung) und andere grundsätzliche Fragen den umerischen Rechnens zum Gegenstand. Darauf folgen längere Ausführungen über die Auflösung von linearen Gleichungssystemen und die Inversion von Matrizen, beginnend mit den zum Teil veralteten Verfahren wie «Multiplikation Subtraktion» bis zu den modernen Matrizenverfahren. Dabei sind zahllose num rische Beispiele in den Text eingeflochten, die besonders für den Anfänger sell instruktiv sind. Ferner enthält das Buch einige Abschnitte über die Berechnung von Determinanten, Eigenwerten sowie über Matrizenrechnung im allgemeinen Leider wird aber auf iterative Methoden wie die Relaxation überhaupt nicht eingegangen. Den Abschluss des Buches bildet ein Kapitel mit zahlreichen Anwerdungsbeispielen aus der Statistik.